



PANSKÁ

Střední průmyslová škola sdělovací techniky

Panská 3

Praha 1

© Jaroslav Reichl, 2018

Odhady fyzikálních veličin

sbírka úloh zaměřených na odhad různých fyzikálních veličin

Jaroslav Reichl

1. ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

1. Kolem rovníku Země těsně natáhneme provázek. Pak přidáme jeden metr provázku a provázek rovnoměrně nařásíme tak, aby byl všude stejně vzdálen od rovníku. Jaké zvíře projde pod takto nařášeným provázkem (nezmar, blecha, myš, kočka, pes, kráva, slon, žirafa)?
2. Kolik provázku je nutné přidat, aby v situaci popsané v úloze 1 byla vzdálenost mezi rovníkem a provázkem 1 metr?
3. Jak se změní výsledek úlohy 1, jestliže provázek napneme a zvedneme do výšky?
4. Odhadněte, jak velkou rychlostí lze běžet s krychlí zlata o hraně délky 10 cm v ruce.
5. Jaká je délka hrany krychle, která plná zlata má stejnou hmotnost, jako krychle vody o hraně délky 1 m? Jaké hmotnosti by měly uvažované krychle, kdybychom jejich materiály zaměnily (tj. do krychle, kde bylo původně zlato, dali vodu a do krychle, kde byla původně voda, dali zlato)?
6. Jarda, Petr a Pavel sledují ze břehu výstřel z děla umístěného na lodi. V jakém pořadí se o výstřelu dozví, jestliže Jarda pouze slyší výstřel, Petr pouze vidí výstřel z děla a Pavel vidí dopad střely do vody?
7. Kolik litrů vody se vejde do desetimetrové hadice o vnitřním průměru 1 cm?
8. Jak velká by byla koule obsahující všechnu vodu na Zemi?
9. Jaká je průměrná hloubka světových moří?
10. Jakou hmotnost má zlatá olympijská medaile z brazilského Rio de Janera z roku 2016?

2. ELEKTRINA A MAGNETISMUS

11. Jaká by byla délka stříbrného vodiče, který má při daném průřezu stejný odpor jako metr dlouhý prut diamantu?

3. MOLEKULOVÁ FYZIKA

12. Jak dlouhá by byla délka úsečky sestavená z molekul vody obsažených v kapce vody o poloměru 1 mm?
13. Za jak dlouho se vypaří kapka vody o objemu 1 mm^3 , jestliže se každou sekundu odpaří milion jejích molekul?
14. Kolik „označených molekul“ z jednoho litru vody vlitého do vod světového oceánu bude po důkladném promíchání v každém litru vody?
15. V čem (kapsa, taška, vozík, nákladní automobil, vlak) lze přepravit 1 mol cukru?
16. Kolik molů vzduchu je v učebně?
17. Při vytváření homeopatických léků se ředí účinná látka ve 100násobném objemu vody. Jeden díl této směsi se pak opět ředí ve 100násobném objemu vody. Kolik účinné látky bude po pěti děleních v objemu vody odpovídající vodě v plaveckém bazénu? Kolik molekul účinné látky zůstane ze vzorku 10 ml (a s dalšími vlastnostmi podobnými vodě) v jednom litru výsledné směsi po třiceti děleních, která se obvykle při výrobě těchto typů léků provádějí? (Inspirace úlohy - viz [5].)

4. ASTRONOMIE

18. Jak by vypadaly planety Sluneční soustavy při pohledu ze Země, kdyby se nacházely ve stejné vzdálenosti, jako se nyní nachází Měsíc?

Odhady fyzikálních veličin - řešení

1. ZÁKLADNÍ FYZIKÁLNÍ VELIČINY

1.

Platí $o_{Země} = 2\pi r$ a $l_{\text{provázku}} = o_{Země} + \Delta l$, kde $\Delta l = 1 \text{ m}$ a r je poloměr Země. Podle zadání provaz rovnoměrně rozprostře kolem Země, takže vytvoří kružnici o poloměru o Δr větším, než je poloměr Země. Proto můžeme postupně psát $l_{\text{provázku}} = o_{Země} + \Delta l = 2\pi(r + \Delta r)$. Po úpravě získáme rovnici $o_{Země} + \Delta l = 2\pi r + 2\pi\Delta r$, a tedy $o_{Země} + \Delta l = o_{Země} + 2\pi\Delta r$. Po odečtení stejných členů a následném vydělení dostáváme vztah $\Delta r = \frac{\Delta l}{2\pi} = \frac{1}{6,28} \text{ m} \doteq 0,16 \text{ m}$.

To tedy znamená, že pod provazem určitě projdou všichni živočichové až po kočku. Řešení úlohy nezávisí na poloměru koule, kolem které byl provázek natažen. To znamená, že v případě každé koule, kolem které natáhneme provaz o 1 m delší, než je délka „rovničky“ této koule, zůstane mezi koulí a provázkem přibližně 16centimetrová mezera.

2.

S využitím řešení úlohy 1 můžeme psát podmínku: $l_{\text{provázku}} = o_{Země} + \Delta l = 2\pi(r + \Delta r)$, kde tentokrát je $\Delta r = 1 \text{ m}$. Postupnými úpravami pak dostaneme: $\Delta l = 2\pi \cdot \Delta r = 6,28 \cdot 1 \text{ m} \doteq 6,3 \text{ m}$.

Provaz tedy musíme prodloužit o 6,3 m.

3.

Nejdříve si uvědomíme, že celková délka provázku je $l_{\text{provázku}} = o_{Země} + s = 2\pi r + s$, kde s je onen 1 metr provázku popisovaný v zadání. Provázek, který se dotýká Země, má délku (podle obr. 1) $o_1 = (2\pi - 2\varphi)r$. Provázek, který neleží na Zemi, má délku $o_2 = 2l$. Neznámou l vyjádříme z pravoúhlého trojúhelníka pomocí goniometrické funkce tangens (viz obr. 1). Platí $\text{tg } \varphi = \frac{l}{r}$ a tedy $l = r \cdot \text{tg } \varphi$. Po dosazení do vztahu pro celkovou délku provázku postupně dostáváme:

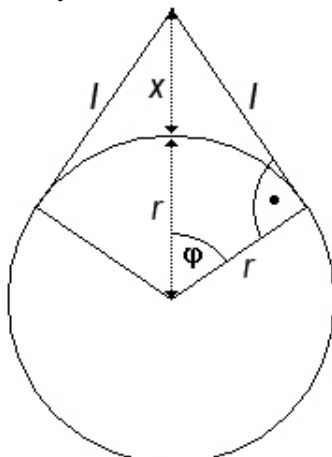
$$o_1 + o_2 = l_{\text{provázku}}$$

$$(2\pi - 2\varphi)r + 2l = 2\pi r + s$$

$$2\pi r - 2\varphi r + 2r \cdot \text{tg } \varphi = 2\pi r + s$$

$$2\varphi r - 2r \cdot \text{tg } \varphi + s = 0$$

Získali jsme tedy rovnici pro neznámou φ , která není analyticky řešitelná. Tato rovnice je řešitelná pouze numericky, a nebo graficky.



obr. 1

Po vyřešení rovnice lze neznámou výšku x určit z pravoúhlého trojúhelníka pomocí funkce kosinus. Platí $\cos \varphi = \frac{r}{x+r}$, a tedy dostáváme $x = r \left(\frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right)$.

Pro $s = 1$ m vychází $x = 121,5$ m.

4.

Daná krychle zlata má objem $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$. Vzhledem k tomu, že hustota zlata je $19300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 19,3 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, má daná krychle hmotnost 19,3 kg. A s takovou rychlí netrénovaný jedinec příliš rychle nepoběží.

5.

Krychle o hraně 1 m plná vody má hmotnost 1000 kg (nepočítáme s hmotností samotné krychlové nádoby). Vzhledem k tomu, že zlato má hustotu $19300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, má hledaná krychle objem

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1000}{19300} \text{ m}^3 = 0,052 \text{ m}^3. \text{ Délka hrany této krychle pak je } a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{0,052} \text{ m} \doteq 0,37 \text{ m}.$$

Délka hrany takové krychle tedy je přibližně 37 cm.

Dáme-li do krychle, v níž bylo původně zlato, vodu, bude mít krychle hmotnost 52 kg.

Dáme-li do krychle, v níž je nyní voda, zlato, bude mít krychle hmotnost 19,3 tun.

6.

Pro určení pořadí stačí znát velikosti rychlosti jednotlivých objektů:

velikost rychlosti světla ve vakuu (a přibližně ve vzduchu) je $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

velikost rychlosti zvuku ve vzduchu je přibližně $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

velikost rychlosti střel vypálených z děla je (dle [1]) $700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ až $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Kluci se tedy o výstřelu dozvědí v pořadí Petr, Pavel a Jarda.

7.

$$\text{Stačí vypočítat objem válce: } V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2 \cdot v = 3,14 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 785 \text{ cm}^3 \doteq 0,8 \text{ l}.$$

Do hadice se tedy vejde přibližně 0,8 litru vody.

8.

Na Zemi se nachází (např. dle [2]) $1,386 \cdot 10^9 \text{ km}^3 = 1,386 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ vody. Pro objem koule platí

vztah $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$. Pro poloměr r tak dostáváme vztah: $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} V}$. Po dosazení tedy získáme:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4 \cdot 3,14} \cdot 1,386 \cdot 10^{18}} \text{ m} \doteq 691 \text{ km}.$$



obr. 2

Poloměr koule, která obsahuje všechnu vodu vyskytující se na Zemi, tedy je 691 km. Porovnání této koule se Zemí zobrazuje obr. 2, na kterém je Zemí zobrazena i voda. Správný obrázek je uveden v [2].

9.

Vzhledem k tomu, že známe objem vody na Zemi (viz řešení úlohy 8), a víme, že voda zaujímá rozlohu přibližně $361,3 \cdot 10^6 \text{ km}^2 = 361,3 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$ (podle [3]), pak průměrnou hloubku h světového oceánu můžeme počítat podle vztahu $h = \frac{V}{S} = \frac{1,386 \cdot 10^{18}}{361,3 \cdot 10^{12}} \text{ m} = 3836 \text{ m}$.

Průměrná hloubka světových moří tedy je přibližně 3800 metrů.

10.

S využitím [4] má zlatá olympijská medaile z Rio de Janera z roku 2016 hmotnost 0,5 kg. Z toho je pouze 6 gramů zlata, zbytek je stříbro.

2. ELEKTRINA A MAGNETISMUS

11.

Podle zadání víme, že $l_d = 1 \text{ m}$. Pro odpor vodiče délky l a průřezu S platí vztah $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$, kde ρ je měrný odpor materiálu vodiče. Podle zadání má platit $R_{Ag} = R_d$, tedy $\rho_{Ag} \cdot \frac{l_{Ag}}{S} = \rho_d \cdot \frac{l_d}{S}$. Odtud pro hledanou délku l_{Ag} dostáváme $l_{Ag} = l_d \cdot \frac{\rho_d}{\rho_{Ag}}$. Platí: $\rho_{Ag} = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ a $\rho_d = 3 \cdot 10^{16} \Omega \cdot \text{m}$; proto pro hledanou délku dostáváme: $l_{Ag} = 1 \cdot \frac{3 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-8}} \text{ m} \doteq 2 \cdot 10^{24} \text{ m}$. Jedná se poměrně nepředstavitelnou délku vodiče. Zkusme jí proto vyjádřit v jiných jednotkách.

Platí: $1 \text{ AU} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ m}$ a $1 \text{ ly} \doteq 10^{16} \text{ m}$. Proto $l_{Ag} \doteq 1,3 \cdot 10^{16} \text{ AU} \doteq 2 \cdot 10^8 \text{ ly}$. To znamená, že světlo by podél stříbrného vodiče putovalo 200 milionů let.

Tato úloha ukazuje názorně, jak odlišné jsou hodnoty měrných odporů. Stříbro je (z běžných materiálů) nejlepší vodič, zatímco diamant patří mezi nejlepší izolanty. Navíc řádový rozdíl je v tomto případě nejvyšší v celé fyzice - 24 řádů! Vyrobít tak dlouhý vodič je pochopitelně nereálné.

3. MOLEKULOVÁ FYZIKA

12.

Abychom mohli určit délku úsečky, je nutné znát počet N molekul obsažených v dané kapce. K tomu je nutné znát hmotnost m kapky vody a její molární hmotnost M_m . Postupně tedy můžeme

psát: $N = N_A \cdot n = N_A \cdot \frac{m}{M_m} = N_A \cdot \frac{\rho \cdot V}{M_m} = N_A \cdot \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3}{M_m} = 4N_A \cdot \frac{\rho \cdot \pi \cdot r^3}{3M_m}$. Molární hmotnost vody vyplývá z relativní atomové hmotnosti kyslíku a vodíku: $M_m = (2A_{\text{H}} + A_{\text{O}}) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Po dosazení dostáváme: $N = 4 \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1000 \cdot 3,14 \cdot (10^{-3})^3}{3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 1,4 \cdot 10^{20}$. Odhadneme-li průměr molekuly vody řádově jako $d \approx 10^{-8} \text{ m}$, můžeme pro hledanou délku l úsečky psát: $l = N \cdot d = 1,4 \cdot 10^{20} \cdot 10^{-8} \text{ m} = 1,4 \cdot 10^{12} \text{ m}$.

Délka úsečky by tedy byla téměř 10 AU (tedy téměř vzdálenost planety Saturn od Slunce).

13.

K určení času je nutné znát počet molekul v dané kapce, který určíme podobným způsobem jako v řešení úlohy 12. Pro počet N molekul tedy platí: $N = N_A \cdot n = N_A \cdot \frac{m}{M_m} = N_A \cdot \frac{\rho \cdot V}{M_m}$. Po dosazení

pak dostáváme: $N = 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1000 \cdot 10^{-9}}{18 \cdot 10^{-3}} \doteq 3 \cdot 10^{19}$. Pro čas, za který se vypaří celá kapka, dostáváme:

$$t = \frac{3 \cdot 10^{19}}{10^6} \text{ s} = 3 \cdot 10^{13} \text{ s} \doteq 10^6 \text{ let}.$$

Kapka vody o objemu 1 mm^3 se tedy vypaří přibližně za milion let.

14.

Na základě řešení úlohy 8 víme, že na Zemi se nachází $1,386 \cdot 10^9 \text{ km}^3 = 1,386 \cdot 10^{21} \text{ l}$ vody. V jednom litru vody je $N = N_A \cdot n = N_A \cdot \frac{m}{M_m} = N_A \cdot \frac{\rho \cdot V}{M_m} = 6 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{18 \cdot 10^{-3}} \doteq 3 \cdot 10^{25}$ molekul. Pokud chceme vědět, kolik jich bude v každém litru mořské vody, musíme určit „hustotu“ výskytu těchto molekul v mořské vodě. Proto můžeme psát $N_{\text{označené}} = \frac{N}{V_{\text{vody}}} = \frac{3 \cdot 10^{25}}{1,386 \cdot 10^{21}} \text{ l}^{-1} = 24000 \text{ l}^{-1}$.

V každém litru mořské vody se tedy bude nacházet přibližně 24000 molekul z onoho jednoho litru vody vlitého a následně promíchaného s vodou světového oceánu.

15.

Abychom mohli odhadnout, v čem přepravíme 1 mol cukru, musíme znát hmotnost tohoto množství cukru. Cukr je tvořen převážně sacharózou $\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{16}$, jejíž molární hmotnost je $M_m = (12A_{\text{C}} + 22A_{\text{H}} + 16A_{\text{O}}) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,422 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Hmotnost sacharózy s daným látkovým množstvím pak je: $m = n \cdot M_m = 1 \cdot 0,422 \text{ kg} = 0,422 \text{ kg}$.

Cukr o hmotnosti 0,4 kg možná uneseme v kapse; v tašce naprosto pohodlně.

16.

Pro určení látkového množství budeme potřebovat rozměry učebny. Lze odhadnout, že učebna má tvar kvádra s rozměry 5 m, 10 m a 3 m. Pro látkové množství pak můžeme psát $n = \frac{m}{M_m} = \frac{\rho \cdot V}{M_m}$. Molární hmotnost vzduchu je přibližně $M_m = 30 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ a jeho hustota přibližně $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Proto můžeme psát: $n = \frac{1,3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 3}{30 \cdot 10^{-3}} \text{ mol} = 6500 \text{ mol}$.

V učebně tedy je přibližně 6500 molů vzduchu.

17.

Pro získání odhadu množství účinné látky budeme potřebovat znát přibližné rozměry plaveckého bazénu. Uvažujte tedy bazén ve tvaru kvádra o rozměrech 50 m, 20 m a 3 m. Pro objem bazénu tak dostáváme $V = 3000 \text{ m}^3$. Po pěti popsaných děleních bude objem účinné látky

$$V_L = \frac{3000}{100^5} \text{ m}^3 = \frac{3000 \cdot 10^6}{10^{10}} \text{ ml} = 0,3 \text{ ml}. \text{ V objemu vody bazénu tedy bude několik kapek účinné látky.}$$

Pro počet částic původního vzorku účinné látky můžeme psát: $N = N_A n = N_A \frac{m}{M_m} = N_A \frac{\rho \cdot V}{M_m}$. Pro počet molekul účinné látky v jednom litru směsi po 30 děleních můžeme psát: $N_L = \frac{N}{100^{30} \cdot V_1}$. Po

dosazení tak můžeme postupně psát: $N_L = \frac{N_A \rho \cdot V}{100^{30} \cdot V_1 \cdot M_m} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 1000 \cdot 10}{10^{60} \cdot 1000 \cdot 18 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-34}$. Po popsaném dělení nezůstane v daném objemu už žádná molekula účinné směsi.

4. ASTRONOMIE

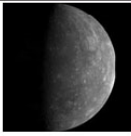


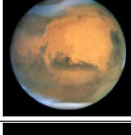


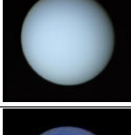
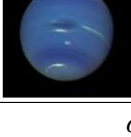
18.

Řešení je uvedeno v tabulce zobrazené na obr. 3.

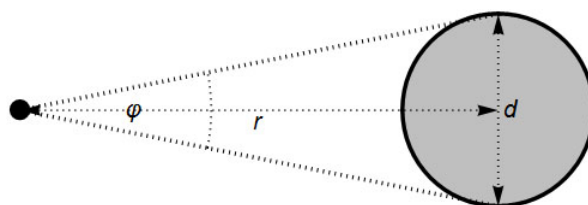
Úhly označené symbolem φ_{planety} byly vypočtené ze vztahu $\text{tg} \frac{\varphi_{\text{planety}}}{2} = \frac{d}{2r}$, kde d je průměr dané planety a r její vzdálenost od Slunce (viz obr. 4). Pod tímto úhlem tedy planetu na obloze vidíme. V tomto případě byly dosazovány do výše uvedeného vztahu hodnoty vzdálenosti dané planety od Slunce. To sice není pravda, vyšetřujeme-li situaci ze Země, ale pro účely této úlohy je to údaj dostatečně přesný. Ve skutečnosti bychom museli brát stejně v úvahu další jevy (vzdálenost dané planety od Země se v průběhu roku mění - a to jak v důsledku různé velikosti rychlosti pohybu planet kolem Slunce, tak v důsledku nerovnoměrného pohybu planet kolem Slunce, ...).

Úhel $\varphi_{\text{Měsíce}}$ byl určen na základě vztahu $\text{tg} \frac{\varphi_{\text{Měsíce}}}{2} = \frac{d_M}{2r_M}$, kde d_M je průměr Měsíce a r_M je vzdálenost Měsíce od Země (situaci opět ilustruje obr. 4). V poslední sloupci tabulky je uvedeno, kolikrát větší bychom daný objekt ve vzdálenosti Měsíce viděli.

Video zobrazující porovnání velikostí planet nacházejících se ve vzdálenosti Měsíce je dostupné na internetu (viz [6]).

Název	Obrázek	$\frac{d}{\text{km}}$	$\frac{r}{\text{AU}}$	$\frac{\varphi_{\text{planety}}}{\varphi_{\text{Měsíce}}}$	$\frac{\varphi_{\text{planety}}}{\varphi_{\text{Měsíce}}}$
Merkur		4879	0.39	17.3	1.4
Venuše		12 104	0.72	23.2	3.5
Země		12 735	1.	17.6	3.7
Mars		6771	1.5	6.2	1.9
Jupiter		138 346	5.2	36.7	39.4
Saturn		114 632	9.5	16.6	32.7
Uran		50 532	19.2	3.6	14.5
Neptun		49 105	30.1	2.2	14.1

obr. 3



obr. 4

5. LITERATURA

- [1] Wikipedie - Kanón [online]. [citováno 16. 9. 2018]. Dostupné z WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kan%C3%B3n>
- [2] How much water is on Earth? [online]. [citováno 1. 9. 2016]. Dostupné z WWW: <http://water.usgs.gov/edu/gallery/global-water-volume.html>
- [3] Světový oceán [online]. [citováno 1. 9. 2016]. Dostupné z WWW: https://cs.wikipedia.org/wiki/Sv%C4%9Btov%C3%BD_oce%C3%A1n
- [4] How they make Olympic medals [online]. [citováno 1. 9. 2016]. Dostupné z WWW: <http://edition.cnn.com/videos/world/2016/08/09/rio-olympic-medals-making-orig.cnn/video/playlists/rio-olympics/>
- [5] Česká televize, Události - Jak fungují homeopatika [online]. [citováno 16. 9. 2018]. Dostupné z WWW: <http://www.ceskatelevize.cz/ivysilani/1097181328-udalosti/218411000100121/obsah/595255-jak-funguji-homeopatika>
- [6] Jak by planety vypadaly ze Země, kdyby byly vzdálené jako Měsíc [online]. [citováno 4. 9. 2016]. Dostupné z WWW: http://videoman.eu/jak-by-ze-planety-vypadaly-ze-zeme-kdyby-byly-vzdalene-jako-mesic/?utm_source=fb&utm_medium=kaparon&utm_campaign=videoman