Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Základy planimetrie

učební text z matematiky

Jaroslav Reichl

Obsah

ZÁKLADY PLANIMETRIE

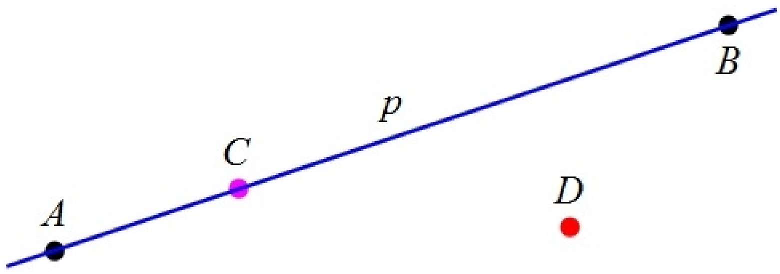
Planimetrie je část matematiky, která se zabývá studiem geometrických útvarů v rovině. Těmito útvary v rovině jsou:

1. body – značí se velkými písmeny latinské abecedy (A, B, C, D, …);
2. přímky – značí se malými písmeny latinské abecedy (*p*, *q*, *r*, …);
3. úhly – značí se malými písmeny řecké abecedy (α , β , γ , …).

1.1 Přímka

DVĚMA RŮZNÝMI BODY PROCHÁZÍ JEDINÁ PŘÍMKA.

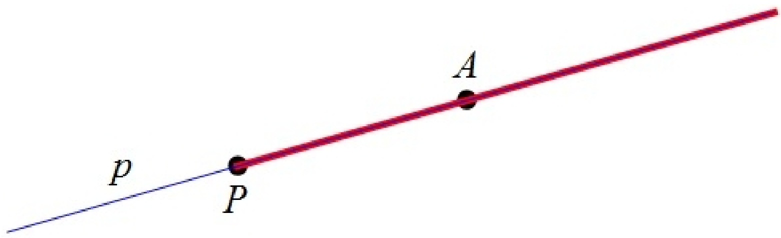
Přímka *p* určená dvěma navzájem různými body A a B se označuje $p = \leftrightarrow \mathrm{AB}$. Na obr. 1 je zobrazen bod C, který leží na přímce *p* (též lze říkat *p* prochází bodem C nebo bod C je incidentní s přímkou *p*). Tato skutečnost se zapisuje zápisem $\mathrm{C} \in p$. Analogicky říkáme, že bod D nenáleží přímce *p* (přímka *p* neprochází bodem D). Tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\mathrm{D} \notin p$.



obr. 1

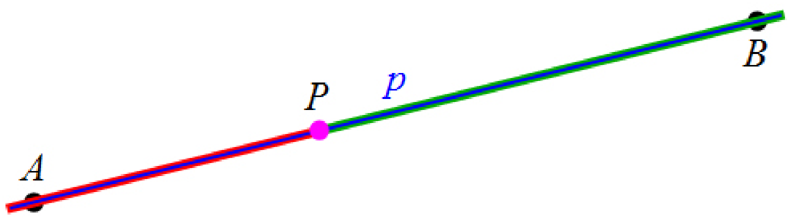
BOD LEŽÍCÍ NA PŘÍMCE ROZDĚLUJE PŘÍMKU NA DVĚ NAVZÁJEM OPAČNÉ POLOPŘÍMKY A JE JEJICH SPOLEČNÝM POČÁTKEM.

Počátek je společným bodem obou polopřímek, každý jiný bod přímky je vnitřním bodem jedné polopřímky; polopřímka s počátkem P a vnitřním bodem A se značí $\mapsto \mathrm{PA}$ (viz obr. 2).



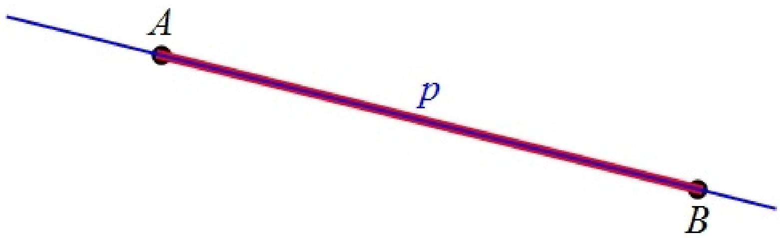
obr. 2

Dvě navzájem opačné polopřímky (polopřímka PA a polopřímka PB) přímky *p* jsou zobrazeny na obr. 3.



obr. 3

ÚSEČKU AB TVOŘÍ VŠECHNY BODY PŘÍMKY AB, KTERÉ LEŽÍ MEZI BODY A A B A BODY A, B (VIZ OBR. 4).



obr. 4

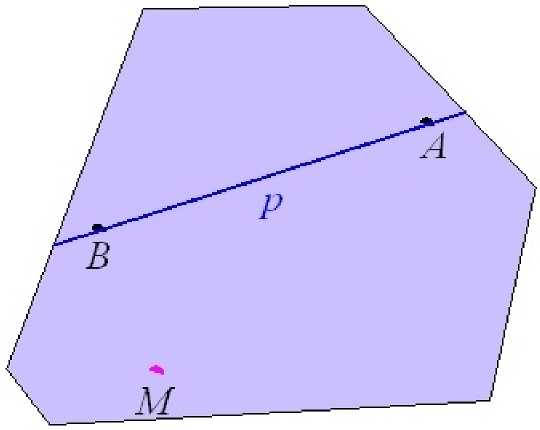
Délka (velikost) úsečky AB je vzdálenost bodů A a B; značí se symbolem $|\mathrm{AB}|$.

1.2 Polorovina

PŘÍMKA DĚLÍ ROVINU NA DVĚ NAVZÁJEM OPAČNÉ POLOROVINY A JE JEJICH SPOLEČNOU HRANICÍ (HRANIČNÍ PŘÍMKOU).

Polorovina s hraniční přímkou p a vnitřním bodem M (bod, který leží v dané rovině, ale neleží na hraniční přímce) se značí $\mapsto p\mathrm{M}$; je-li $p = \leftrightarrow \mathrm{AB}$, pak $\mapsto p\mathrm{M} = \mapsto \mathrm{ABM}$. Výřez takové roviny je zobrazen na obr. 5.

Značení polopřímky a poloroviny je tedy stejné. Rozlišení, zda se jedná o polopřímku nebo o polorovinu vyplyne z kontextu (zadání úlohy, textu, …). Navíc to lze poznat i podle počtu malých a velkých písmen. O přímku se bude jednat tehdy, budou-li následovat za šipkou dvě velká písmena. O rovinu se bude jednat tehdy, budou-li za šipkou následovat jedno malé a jedno velké písmeno a nebo tři velká písmena.



obr. 5

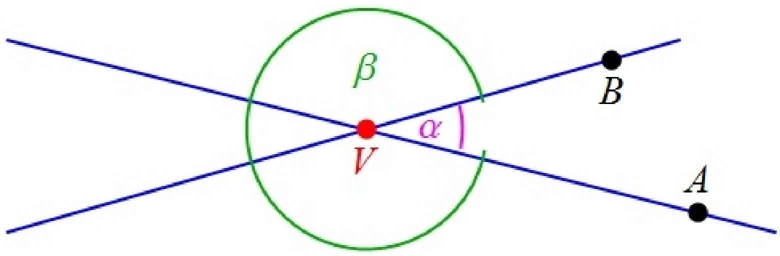
1.3 Úhel

1.3.1 Základní vlastnosti

DVĚ RŮZNÉ POLOPŘÍMKY VA A VB DĚLÍ ROVINU NA DVA ÚHLY AVB.

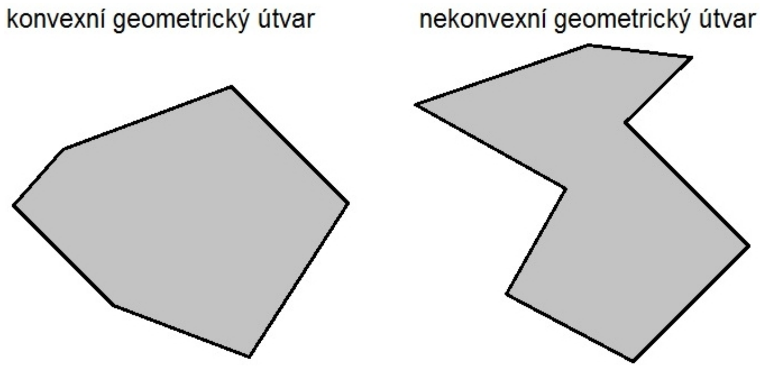
Přímky VA a VB se nazývají **ramena úhlu**, bod V **vrchol** obou úhlů. Nejsou-li přímky VA a VB navzájem opačné, pak se menší z úhlů nazývá **konvexní úhel** (na obr. 6 je to úhel α) a druhý **nekonvexní úhel** (na obr. 6 je to úhel β).

Název úhlu je tvořen posloupností názvů bodů ležících na jednom a druhém rameni úhlu a v jeho vrcholu. Bod ležící ve vrcholu úhlu je vždy uprostřed názvu úhlu.



obr. 6

Analogicky se zavádí pojem konvexní geometrický útvar (viz obr. 7).

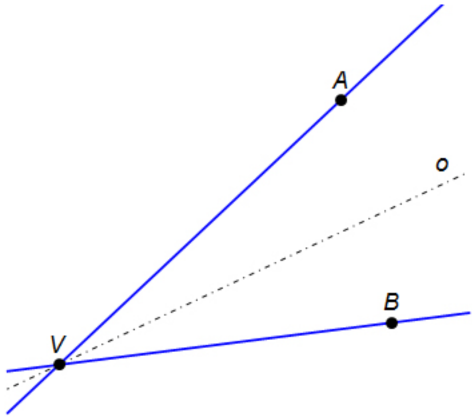


obr. 7

GEOMETRICKÝ ÚTVAR SE NAZÝVÁ KONVEXNÍ, JESTLIŽE ÚSEČKA, SPOJUJÍCÍ LIBOVOLNÉ DVA BODY ÚTVARU, JE ČÁSTÍ TOHOTO ÚTVARU.

Za konvexní geometrický útvar považujeme takový útvar, ve kterém dva libovolně umístění lidé na sebe navzájem vidí. V takovém útvaru se tedy lidé nikdy nedostanou „za roh“. Konvexní tvar mají hřiště na fotbal, hokej a další sporty – hráči na sebe potřebují během hry navzájem vidět.

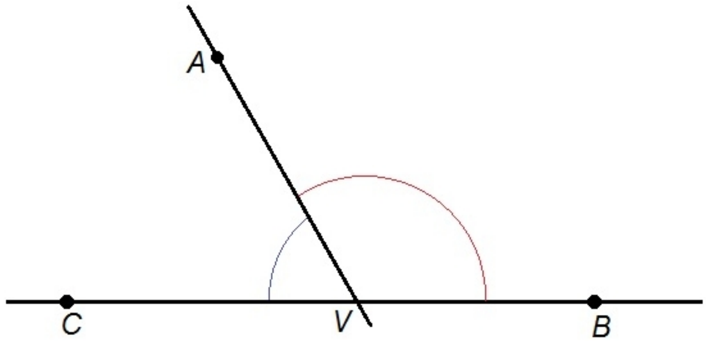
OSA ÚHLU JE POLOPŘÍMKA S POČÁTKEM VE VRCHOLU ÚHLU, KTERÁ ÚHEL DĚLÍ NA DVA SHODNÉ ÚHLY.



obr. 8

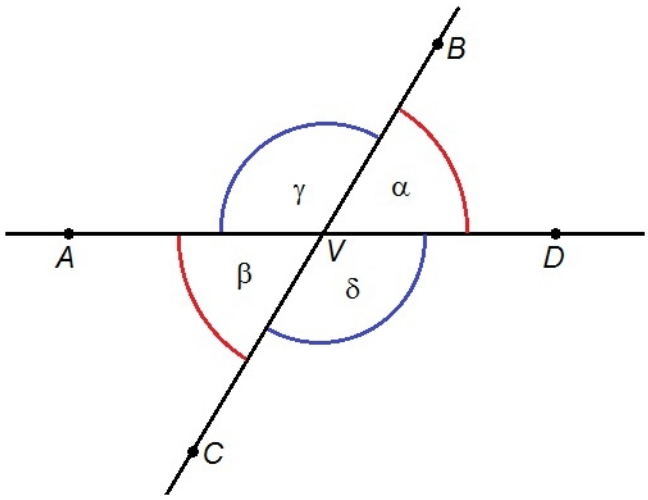
DVA KONVEXNÍ ÚHLY AVB A AVC, KTERÉ MAJÍ SPOLEČNÉ RAMENO VA A JEJICHŽ RAMENA VB A VC JSOU NAVZÁJEM OPAČNÉ POLOPŘÍMKY, SE NAZÝVAJÍ ÚHLY VEDLEJŠÍ.

Vedlejší úhly jsou tedy takové úhly, které mají jedno rameno společné a jejich součet je 180 stupňů.



obr. 9

DVA KONVEXNÍ ÚHLY AVB A CVD, JEJICHŽ RAMENA VA A VD A ROVNĚŽ RAMENA VB A VC JSOU NAVZÁJEM OPAČNÉ POLOPŘÍMKY, SE NAZÝVAJÍ ÚHLY VRCHOLOVÉ. VRCHOLOVÉ ÚHLY JSOU SHODNÉ.



obr. 10

Na obr. 10 jsou zobrazeny dvě dvojici vrcholových úhlů: jedna dvojice je dvojice úhlů α a β, druhou dvojicí je dvojice úhlů γ a δ.

PRAVÝ ÚHEL JE TAKOVÝ ÚHEL, KTERÝ JE SHODNÝ SE SVÝM ÚHLEM VEDLEJŠÍM.

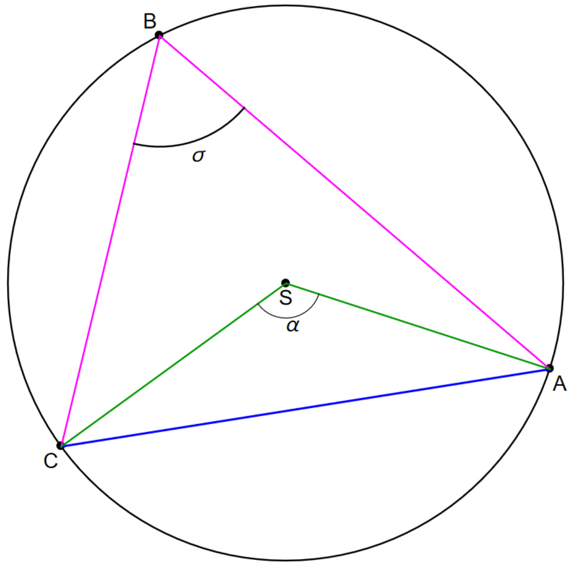
KONVEXNÍ ÚHEL, KTERÝ JE MENŠÍ NEŽ ÚHEL PRAVÝ, SE NAZÝVÁ OSTRÝ; KONVEXNÍ ÚHEL, KTERÝ JE VĚTŠÍ NEŽ ÚHEL PRAVÝ, SE NAZÝVÁ TUPÝ.

To tedy znamená, že:

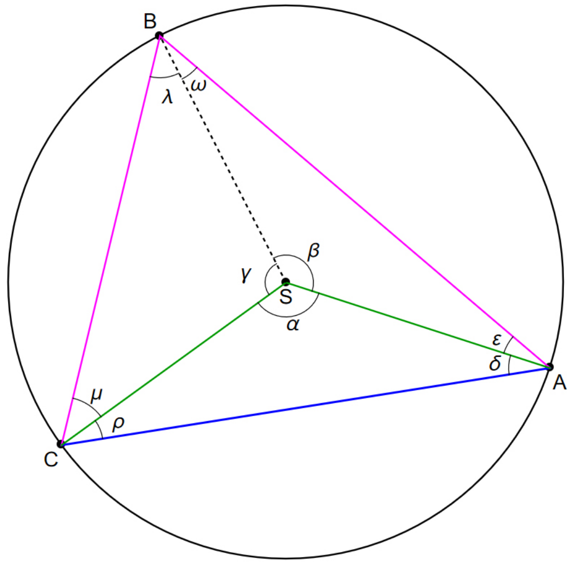
1. hodnota ostrého úhlu leží v intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;
2. hodnota tupého úhlu leží v intervalu $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;
3. hodnota konvexního úhlu leží v intervalu $(0; \pi)$;
4. hodnota nekonvexního úhlu leží v intervalu $(\pi; 2\pi)$.

1.3.2 Obvodový a středový úhel

Pro řadu úloh je vhodné znát vztah mezi obvodovým úhlem σ a středovým úhlem α, které jsou sestrojeny nad stejnou úsečkou s krajními body A a C ležícími na kružnici se středem S (viz obr. 11). Pro odvození do obrázku doplníme ještě spojnici bodů S a B a označíme si všechny úhly (viz obr. 12).



obr. 11



obr. 12

Trojúhelník ASC je rovnoramenný (strany SA a SC mají délku rovnou poloměru kružnice), a proto jsou úhly ρ a δ stejné. Analogicky lze zdůvodnit skutečnosti, že $\mu = \lambda$ a $\varepsilon = \omega$. V trojúhelníku ASC tedy platí $\rho = \delta = \frac{180° - \alpha}{2}$, v trojúhelníku ABS platí $\varepsilon = \omega = \frac{180° - \beta}{2}$ a v trojúhelníku BCS platí $\mu = \lambda = \frac{180° - \gamma}{2}$, protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je $180°$.

Pro vnitřní úhel trojúhelníku ABC u vrcholu B můžeme tedy postupně psát: $\sigma = \lambda + \omega = \frac{180° - \gamma}{2} + \frac{180° - \beta}{2} = 180° - \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$. Odtud můžeme vyjádřit $\beta + \gamma = 360° - 2\sigma$.

Pro úhly α, β a γ přitom platí: $\alpha + \beta + \gamma = 360°$ (viz obr. 12).

Po dosazení z předposledního uvedeného vztahu do posledního, dostaneme: $\alpha + 360° - 2\sigma = 360°$. Odkud již dostáváme vztah:

$$\alpha = 2\sigma. \tag{1}$$

Můžeme tedy vyslovit závěr:

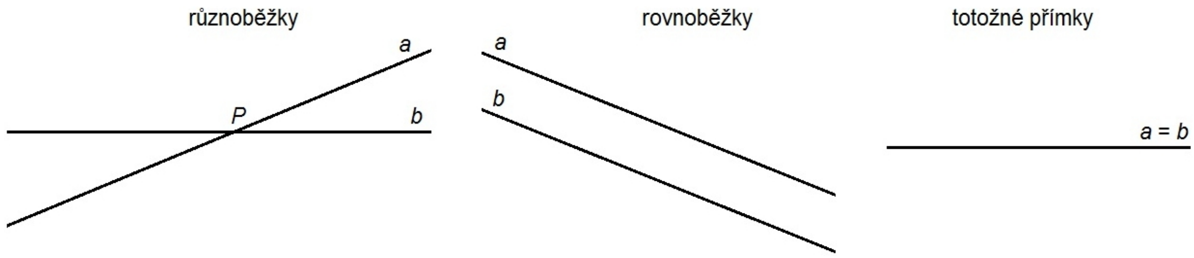
VELIKOST STŘEDOVÉHO ÚHLU SESTROJENÉHO NAD DANOU TĚTIVOU KRUŽNICE JE DVOJNÁSOBNÁ VE SROVNÁNÍ S VELIKOSTÍ OBVODOVÉHO ÚHLU SESTROJENÉHO NAD STEJNOU TĚTIVOU TÉŽE KRUŽNICE.

Speciálním případem pak je úhel sestrojený nad průměrem zadané kružnice; tento úhel je (ve shodě se zněním Thaletovy věty) pravý.

1.4 Vzájemná poloha dvou přímek

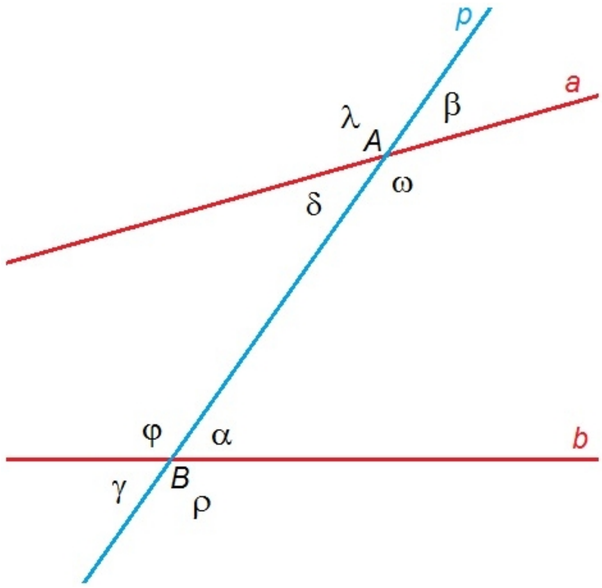
Dvě přímky v rovině mohou mít tyto vzájemné polohy (viz obr. 13):

1. přímky jsou různoběžné (různoběžky) – přímky mají jeden společný bod – tzv. **průsečík**; je-li *P* průsečíkem přímek *a* a *b*, pak lze psát $P \in a \cap b$ resp. $\{P\} = a \cap b$;
2. přímky jsou rovnoběžné různé (rovnoběžky) – přímky nemají žádný společný bod; rovnoběžnost přímek *a* a *b* se značí symbolem $a \| b$ (rovnoběžnost polopřímek a úseček na daných přímkách ležící se značí analogicky);
3. přímky jsou splývající (totožné) – přímky mají společné všechny své body; jedná se o zvláštní případ rovnoběžnosti.



obr. 13

Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku. Rovnoběžnost je tranzitivní vztah, tj. je-li $a \| b$ a $b \| c$, pak je také $a \| c$.



obr. 14

Jsou-li dány dvě různé přímky *a*, *b* a přímka *p*, která je protíná v různých bodech A a B, říkáme, že přímky *a*, *b* jsou **proťaty příčkou** *p* (viz obr. 14). Každý z bodů A i B je vrcholem čtyř konvexních úhlů. Dvojice úhlů $\alpha - \beta$, $\gamma - \delta$, $\varphi - \lambda$ a $\rho - \omega$ se nazývají **úhly souhlasné**. Nahradíme-li jeden ze dvou souhlasných úhlů úhlem k němu vrcholovým, dostaneme **úhly střídavé**.

Každá dvojice souhlasných (resp. střídavých) úhlů vyťatých příčkou *p* přímek *a*, *b* jsou úhly shodné, jsou-li přímky *a*, *b* rovnoběžné. (Platí i obráceně.)

Odchylka dvou přímek *a*, *b* v rovině je v případě různoběžných přímek velikost α každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají; značí se $|\sphericalangle ab| = \alpha$. Je-li $a = b$, pak $\alpha = 0°$.

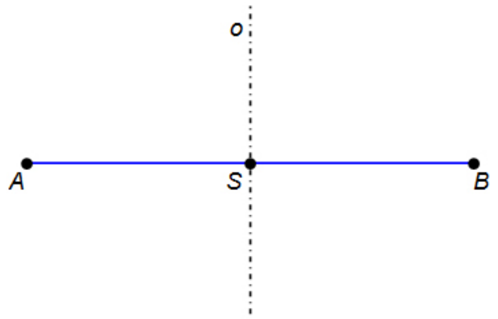
Pro $\alpha = 90°$ se nazývají různoběžky *a*, *b* **přímkami kolmými (kolmicemi)** a tato skutečnost se označuje zápisem $a \perp b$.

Každým bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmici.

Platí: $a \perp b \ \wedge\ a \perp c \ \Rightarrow\ b \| c$ a dále také $b \| c \ \wedge\ a \perp b \ \Rightarrow\ a \perp c$

Osa úsečky je kolmice k této úsečce procházející jejím středem (viz obr. 15).

Vzdálenost bodu A od přímky *p* je vzdálenost bodu A a paty kolmice vedené bodem A na přímku *p*.



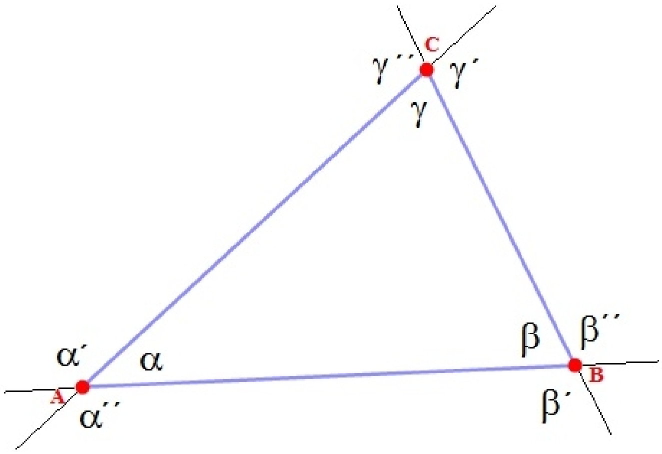
obr. 15

1.5 Trojúhelník

1.5.1 Základní definice

Tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce, určují **trojúhelník ABC**. V tomto trojúhelníku platí (viz obr. 16):

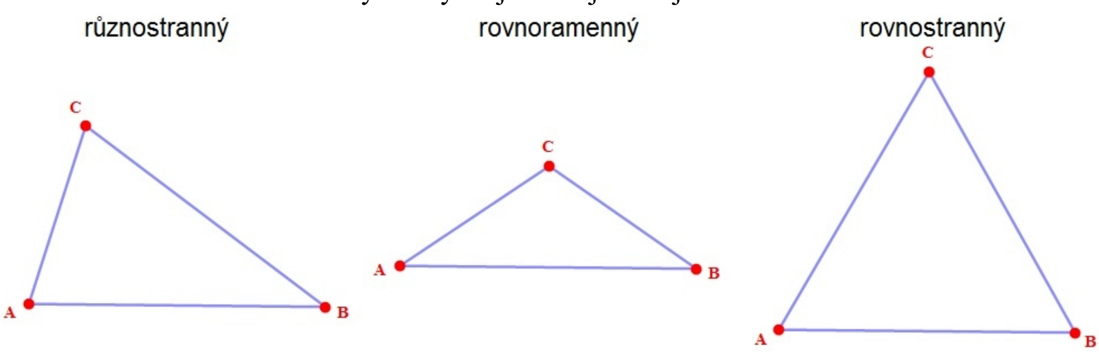
1. A, B, C jsou **vrcholy** trojúhelníku ABC;
2. AB, BC, AC jsou **strany** trojúhelníku ABC;
3. konvexní úhly BAC, ABC, BCA (tj. úhly α, β, γ) jsou **vnitřní úhly** trojúhelníku ABC;
4. vedlejší úhly k vnitřním úhlům trojúhelníku ABC (tj. úhly α', β', γ' a α'', β'', γ'') jsou **vnější úhly** trojúhelníku ABC.



obr. 16

Podle délek stran se trojúhelníky dělí na (viz obr. 17):

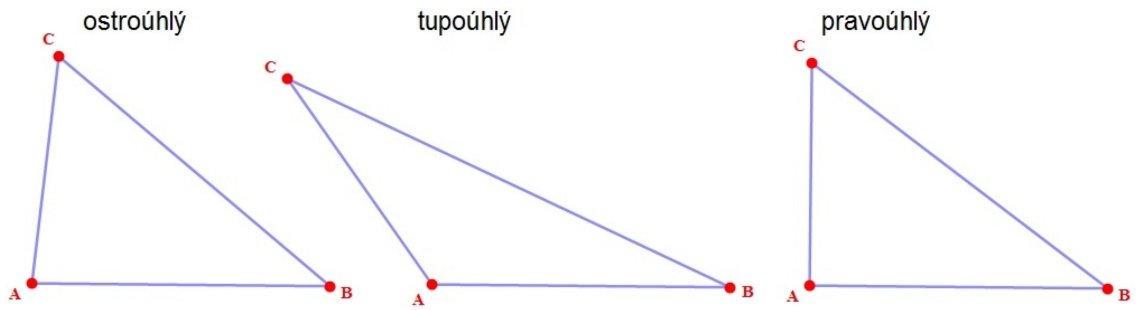
1. různostranné (obecné);
2. rovnoramenné – dvě strany (ramena) mají shodnou délku, třetí strana se nazývá základna;
3. rovnostranné – všechny strany mají navzájem stejnou délku.



obr. 17

Podle velikosti vnitřních úhlů se trojúhelníky dělí na (viz obr. 18):

1. ostroúhlé – všechny vnitřní úhly trojúhelníka jsou ostré;
2. tupoúhlé – jeden vnitřní úhel trojúhelníka je tupý;
3. pravoúhlé – jeden vnitřní úhel trojúhelníka je pravý.



obr. 18

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je úhel přímý (tj. $180°$).

A tedy platí (ve shodě s obr. 16) platí:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° . \tag{2}$$

Velikost vnějšího úhlu je rovna součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.

Platí tedy (ve shodě se značením na obr. 16):

$$\alpha' = \beta + \gamma \,,\ \beta' = \alpha + \gamma \ \text{ a } \ \gamma' = \alpha + \beta . \tag{3}$$

Důkaz vztahů (3) plyne ze vztahu (2) a z faktu, že vnitřní úhel a vnější úhel u daného vrcholu trojúhelníka jsou úhly vedlejší. Tedy např. pro úhly u vrcholu A (podle obr. 16) platí: $\alpha + \alpha' = 180°$. Po dosazení ze vztahu (2) dostáváme vztah $180° - \beta - \gamma + \alpha' = 180°$, odkud již snadno plyne $\alpha' = \beta + \gamma$. Zbývající dva vztahy (3) se dokáží analogicky.

Součet každých dvou stran trojúhelníku je vždy větší než strana třetí (tzv. trojúhelníková nerovnost).

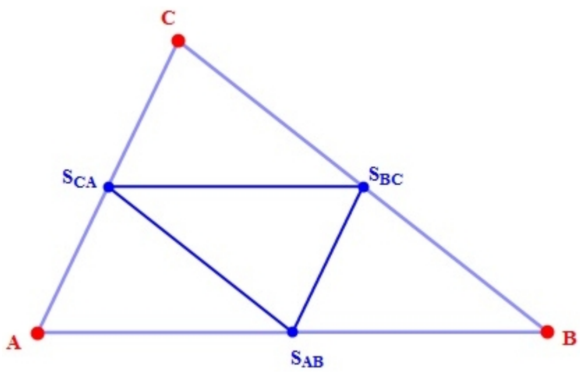
Trojúhelníkovou nerovnost si lze představit na analogii s cestováním: cesta z *A* do *B* přes *C* je vždy delší, než přímá cesta z *A* do *B*. To platí ovšem za předpokladu, že body *A*, *B* a *C* neleží na jedné přímce. A to body tvořící trojúhelník na jedné přímce ležet nemohou!

V trojúhelníku leží proti větší straně větší vnitřní úhel; proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strana.

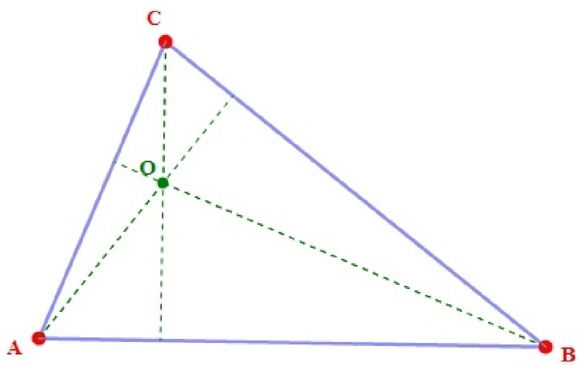
Střední příčka trojúhelníku je úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníka.

Každá střední příčka trojúhelníka je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje. Její délka je rovna polovině délky této strany.

Výška trojúhelníku je úsečka vedená z vrcholu trojúhelníka kolmo na přímku, na níž leží strana trojúhelníku protilehlá k danému vrcholu. Všechny tři přímky, na nichž leží výšky trojúhelníka, se protínají v jediném bodě O – tzv. průsečík výšek (ortocentrum).

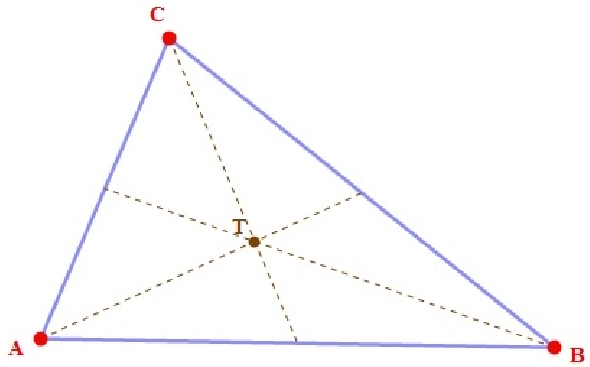


obr. 19



obr. 20

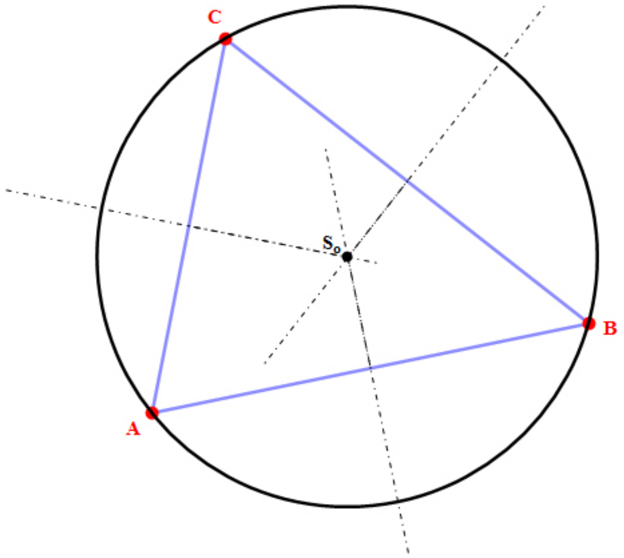
Těžnice trojúhelníka je úsečka spojující vrchol trojúhelníka se středem protější strany. Těžnice trojúhelníka se protínají v jednom bodě – v těžišti T. Vzdálenost těžiště trojúhelníka od vrcholu trojúhelníku je rovna dvěma třetinám délky příslušné těžnice.



obr. 21

KRUŽNICE OPSANÁ TROJÚHELNÍKU JE KRUŽNICE PROCHÁZEJÍCÍ VŠEMI VRCHOLY TROJÚHELNÍKA. JEJÍ STŘED LEŽÍ V PRŮSEČÍKU OS STRAN TROJÚHELNÍKU.

Poloměr kružnice opsané se většinou značí *r*.



obr. 22

Pro odvození vztahu pro poloměr *r* kružnice opsané trojúhelníku budeme uvažovat obecný trojúhelník ABC, v němž jsou sestrojeny osy stran a kterému je opsána kružnice s poloměrem právě *r* (viz obr. 23). Bez újmy na obecnosti uvažujme trojúhelník AS_1S_o, kde S_1 je střed strany AB a S_o je střed kružnice opsané trojúhelníku.

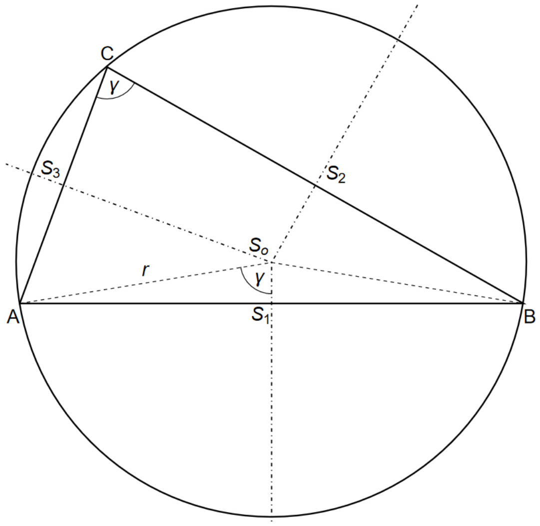
V bodě S_o se protínají všechny tři osy stran trojúhelníka ABC a tento bod je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Velikost úhlu AS_oB je rovna 2γ. Úhel AS_oB je totiž středový úhel sestrojený nad tětivou AB sestrojené kružnice a úhel ACB je obvodový úhel sestrojený nad stejnou tětivou kružnice; uvedená rovnost úhlů pak plyne ze vztahu (1) odvozeného v kapitole 1.3.2. Úsečky AS_o a S_oB jsou stejně dlouhé (plyne z faktu, že bod S_o leží na ose úsečky AB), a proto i úhly AS_oS_1 a BS_oS_1 jsou shodné. Vzhledem k výše uvedenému platí: $|\sphericalangle AS_oS_1| = |\sphericalangle BS_oS_1| = \gamma$.

V pravoúhlém trojúhelníku AS_1S_o tedy můžeme psát $\sin\gamma = \frac{0{,}5c}{r}$, kde *c* je délka strany AB. Odtud pro poloměr *r* opsané kružnice dostáváme vztah:

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\alpha}; \qquad (4)$$

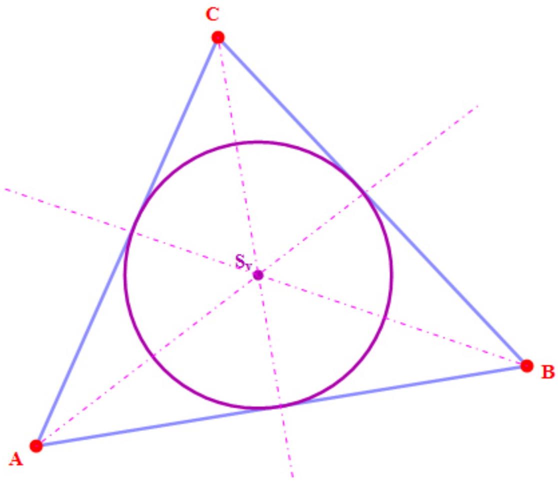
přičemž další dva vztahy lze odvodit analogickým postupem.



obr. 23

KRUŽNICE VEPSANÁ TROJÚHELNÍKU JE KRUŽNICE, KTERÁ SE DOTÝKÁ VŠECH STRAN TROJÚHELNÍKA. JEJÍ STŘED LEŽÍ V PRŮSEČÍKU OS VNITŘNÍCH ÚHLŮ TROJÚHELNÍKA.

Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku se většinou značí symbolem ρ.



obr. 24

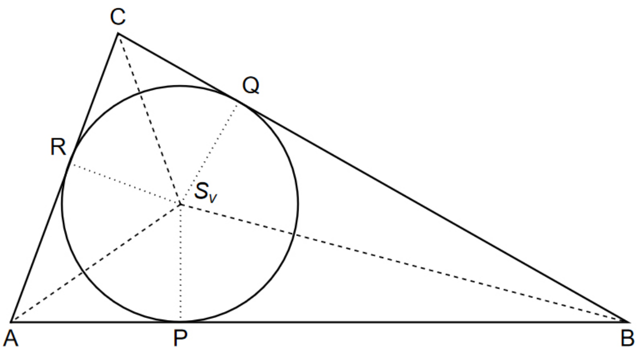
Pro odvození hodnoty poloměru vepsané kružnice vyjdeme z obecného trojúhelníka ABC, ve kterém je sestrojena kružnice vepsaná se středem v bodě $\mathrm{S_v}$ a který si můžeme rozdělit spojnicemi tohoto středu s vrcholy trojúhelníka na tři menší trojúhelníky (viz obr. 25). Body P, Q a R jsou paty kolmic vedených k jednotlivým stranám trojúhelníka ze středu kružnice vepsané. Obsah trojúhelníka ABC můžeme psát jako součet obsahů trojúhelníků $\mathrm{ABS_v}$, $\mathrm{BCS_v}$ a $\mathrm{CAS_v}$, tj. můžeme psát: $S = S_{\mathrm{ABS_v}} + S_{\mathrm{BCS_v}} + S_{\mathrm{CAS_v}}$. Uvědomíme-li si vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku, můžeme dosadit a psát:

$$S = \frac{1}{2}|\mathrm{AB}|\cdot|\mathrm{S_vP}| + \frac{1}{2}|\mathrm{BC}|\cdot|\mathrm{S_vQ}| + \frac{1}{2}|\mathrm{CA}|\cdot|\mathrm{S_vR}|, \tag{5}$$

kde $\rho = |\mathrm{S_vP}| = |\mathrm{S_vQ}| = |\mathrm{S_vR}|$ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Vztah (5) tedy můžeme zapsat ve tvaru $S = \frac{1}{2}|\mathrm{AB}|\cdot\rho + \frac{1}{2}|\mathrm{BC}|\cdot\rho + \frac{1}{2}|\mathrm{CA}|\cdot\rho$ a zjednodušit do tvaru $S = \frac{1}{2}\rho\left(|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{CA}|\right)$.
Odtud již můžeme hledaný poloměr ρ kružnice vepsané vyjádřit ve tvaru:

$$\rho = \frac{2S}{|\mathrm{AB}| + |\mathrm{BC}| + |\mathrm{CA}|} = \frac{2S}{o}, \tag{6}$$

kde o je obvod trojúhelníka ABC.



obr. 25

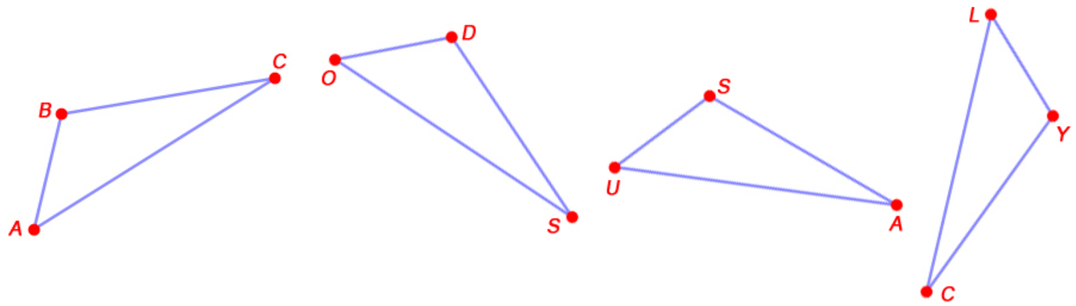
Střed kružnice vepsané a těžiště trojúhelníka jsou vždy vnitřní body trojúhelníku. Průsečík výšek a střed kružnice opsané jsou vnitřními body jen u ostroúhlého trojúhelníku; o vnější body se jedná u tupoúhlého trojúhelníku. U pravoúhlého trojúhelníku splývá průsečík výšek s vrcholem pravého úhlu a střed kružnice opsané se středem přepony.

KRUŽNICE PŘIPSANÁ TROJÚHELNÍKU JE KRUŽNICE, KTERÁ SE DOTÝKÁ VŽDY JEDNÉ STRANY A DVOU PŘÍMEK, NA NICHŽ LEŽÍ ZBÝVAJÍCÍ STRANY TROJÚHELNÍKA. JEJÍ STŘED JE PRŮSEČÍKEM OSY PŘÍSLUŠNÉHO VNITŘNÍHO ÚHLU A OS ZBÝVAJÍCÍCH DVOU SOUSEDNÍCH VNĚJŠÍCH ÚHLŮ.

1.5.2 Shodnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky jsou shodné, jestliže je lze přemístit v rovině tak, že se po uvažovaném přemístění vzájemně kryjí – v tomto případě se jedná o tzv. **shodnost přímou**. Shodnost trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ se zapisuje zápisem $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Při uvažovaném přemístění přejde bod A do bodu A', bod B do bodu B' a bod C do bodu C'. Z toho plyne, že každé dvě k sobě příslušné strany uvažovaných trojúhelníků jsou navzájem shodné a každé dva k sobě příslušné úhly jsou navzájem shodné.

Např. podle obr. 26 platí: $\Delta\,ABC \cong \Delta\,ODS \cong \Delta\,USA \cong \Delta\,LYC$.



obr. 26

Při zápisu podobnosti dvou trojúhelníků je nutné dávat pozor na pořadí vrcholů trojúhelníků!

Např. podle obr. 26 je trojúhelník ABC shodný s trojúhelníkem ODS, ale trojúhelník ABC není shodný s trojúhelníkem SOD. Důvodem je skutečnost, že vrcholy (a jim příslušné strany trojúhelníka) jsou v obou trojúhelnících uvedeny v jiném pořadí (pojmenování trojúhelníka začíná pokaždé od jiného vrcholu). A s trojúhelníkem ABC není shodný ani trojúhelník OSD – jednotlivé vrcholy (a tedy i strany a úhly) si vzájemně neodpovídají!

Platí tyto věty o shodnosti trojúhelníků, na základě lze určit, zda trojúhelníky jsou shodné nebo ne:

VĚTA *SSS*: DVA TROJÚHELNÍKY, KTERÉ SE SHODUJÍ VE VŠECH STRANÁCH, JSOU SHODNÉ.

VĚTA *USU*: DVA TROJÚHELNÍKY, KTERÉ SE SHODUJÍ V JEDNÉ STRANĚ A ÚHLECH PŘILEHLÝCH K TÉTO STRANĚ, JSOU SHODNÉ.

VĚTA *SUS*: DVA TROJÚHELNÍKY, KTERÉ SE SHODUJÍ VE DVOU STRANÁCH A ÚHLU JIMI SEVŘENÉM, JSOU SHODNÉ.

VĚTA *Ssu*: DVA TROJÚHELNÍKY JSOU SHODNÉ, SHODUJÍ-LI SE VE DVOU STRANÁCH A ÚHLU PROTI VĚTŠÍ Z NICH.

Ke všem uvedeným větám platí i věty obrácené.

1.5.3 Podobnost trojúhelníků

Pro každé dvě úsečky AB a CD je možné stanovit kladné reálné číslo k, pro které platí: $k = \frac{|AB|}{|CD|}$, přičemž se číslo k nazývá **poměr úseček** *AB* a *CD*.

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, jestliže existuje kladné reálné číslo k takové, že pro strany uvažovaných trojúhelníků platí: $|A'B'| = k \cdot |AB|$, $|B'C'| = k \cdot |BC|$, $|C'A'| = k \cdot |CA|$, neboli $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$. Číslo k se nazývá poměr podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. Je-li $k > 1$ nazývá se podobnost zvětšení (viz obr. 27a), je-li $k < 1$, jedná se o zmenšení (viz obr. 27b), je-li $k = 1$, jsou oba trojúhelníky shodné.

Podobnost trojúhelníků zapisujeme zápisem: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. I v tomto případě (stejně jako u shodnosti trojúhelníků – viz kapitola 1.5.2) je důležité zapisovat vrcholy dvou podobných trojúhelníků ve správném pořadí.

Z rovnosti poměrů $a' : a = b' : b = c' : c$ vyplývá též rovnost poměrů $a' : b' : c' = a : b : c$.

Podobnost trojúhelníků je vztah tranzitivní.

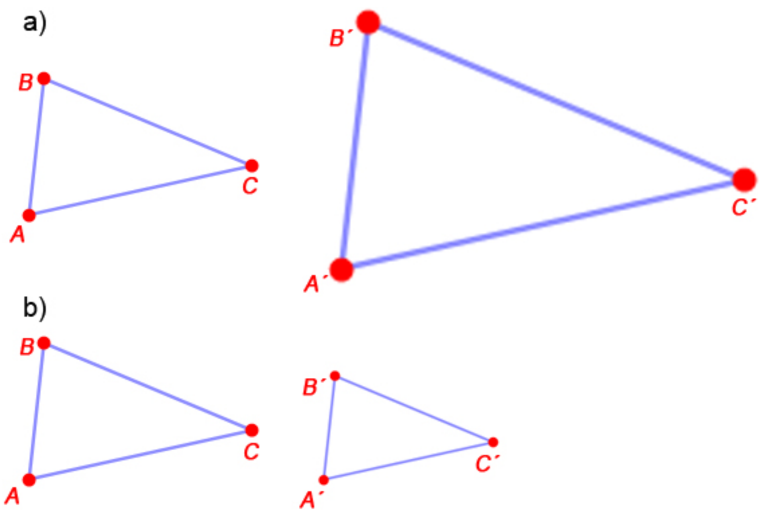
Tranzitivnost v tomto případě znamená, že je-li trojúhelník ABC podobný trojúhelníku KDU a současně je trojúhelník KDU podobný trojúhelník HIV, pak i trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku HIV.

O podobnosti trojúhelníků lze rozhodnout nejen pomocí délek jejich stran, ale i pomocí jejich vnitřních úhlů:

<u>Věta *uu*</u>: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.

V podobných trojúhelnících jsou tedy všechny navzájem si odpovídající úhly shodné.

<u>Věta *sus*</u>: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu a v poměru délek stran ležících na jeho ramenech.



obr. 27

V podobných trojúhelnících jsou odpovídající si těžnice, výšky, střední příčky, poloměry kružnic vepsaných daným trojúhelníkům a poloměry kružnic opsaných daným trojúhelníkům v tomtéž poměru jako odpovídající si strany.

1.5.4 Konstrukce bodu dělícího danou úsečku v daném poměru

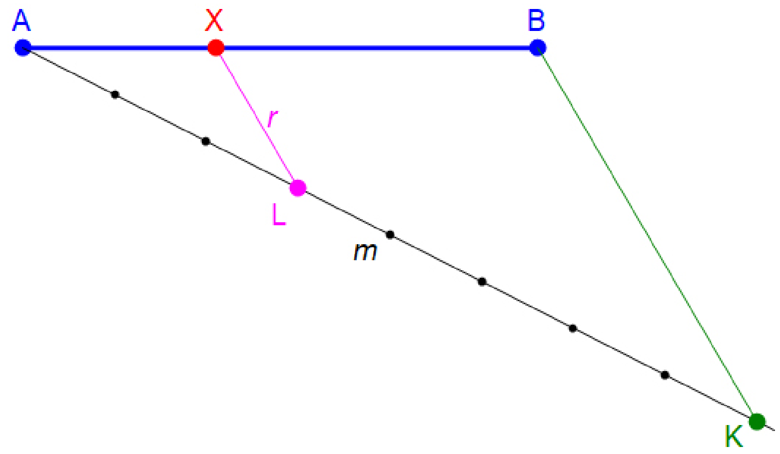
Tato konstrukce sloužící k rozdělení úsečky v daném poměru je založena na podobnosti trojúhelníků.

Je dána úsečka AB, kterou máme rozdělit na dvě části v poměru $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Hledáme tedy takový bod X ležící na úsečce AB, pro který platí:

$$\frac{|\mathrm{AX}|}{|\mathrm{XB}|} = \frac{p}{q}. \qquad (7)$$

Postup konstrukce je následující (viz finální konstrukce zobrazená na obr. 28 pro poměr $\frac{p}{q} = \frac{3}{8}$):

1. narýsujeme úsečku AB;
2. sestrojíme pomocnou přímku *m*, která svírá s přímkou AB libovolný ostrý úhel;
3. na přímku *m* naneseme $p + q$ stejných dílků;
4. koncový bod posledního dílku (bod K) spojíme s bodem B;
5. koncovým bodem *p*-tého dílku (bod L) vedeme rovnoběžku *r* s úsečkou KB;
6. průsečík přímky *r* s úsečkou AB je hledaný bod X.



obr. 28

Důkaz správnosti této konstrukce plyne z podobnosti trojúhelníků AXL a ABK, které jsou podobné, protože dvě jejich strany leží na stejných přímkách a třetí strany jsou vzájemně rovnoběžné (jedná se vlastně o aplikaci věty *sus* – viz kapitola 1.5.3): $\frac{|\mathrm{AX}|}{|\mathrm{AB}|} = \frac{|\mathrm{AL}|}{|\mathrm{AK}|}$. Poměr $\frac{|\mathrm{AL}|}{|\mathrm{AK}|}$ je přitom (ve shodě s popsaným postupem konstrukce) roven $\frac{|\mathrm{AL}|}{|\mathrm{AK}|} = \frac{p}{p+q}$. S využitím poměru (7) a skutečnosti, že pro délky úseček AX, XB a AB platí vztah $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AX}| + |\mathrm{XB}|$, lze psát $|\mathrm{AB}| = |\mathrm{AX}| + |\mathrm{AX}| \cdot \frac{q}{p} = |\mathrm{AX}| \cdot \frac{p+q}{p}$. Tedy $\frac{|\mathrm{AX}|}{|\mathrm{AB}|} = \frac{p}{p+q}$, což je stejný poměr, který vyplývá z podobnosti trojúhelníků AXL a ABK.

Pokud budeme mít za úkol rozdělit danou úsečku na polovinu nebo čtvrtinu, lze postupovat i jednodušeji: využít půlení úsečky (např. s využití osy úsečky – viz kapitola 1.4).

1.5.5 Čtvrtá geometrická úměrná

Čtvrtá geometrická úměrná úseček délek *a*, *b* a *c* je vlastně konstrukce úsečky délky *x*, pro kterou platí:

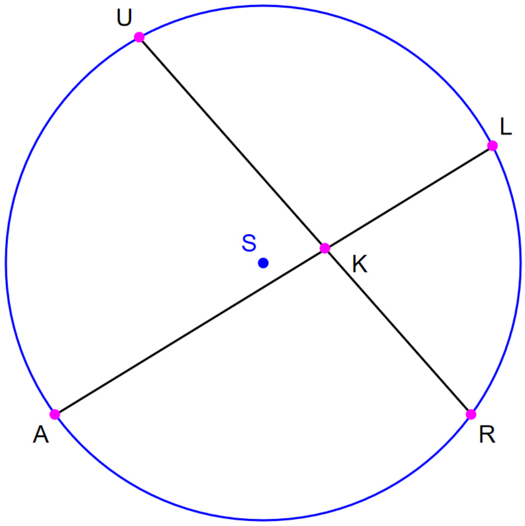
$$x = \frac{a \cdot b}{c}. \qquad (8)$$

Upravíme-li vztah (8) do tvaru $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$, zjistíme, že se vlastně jedná (ve shodě se vztahem (7)) o hledání délky *x* úsečky, která dělí úsečku délky *b* v poměru $\frac{a}{c}$.

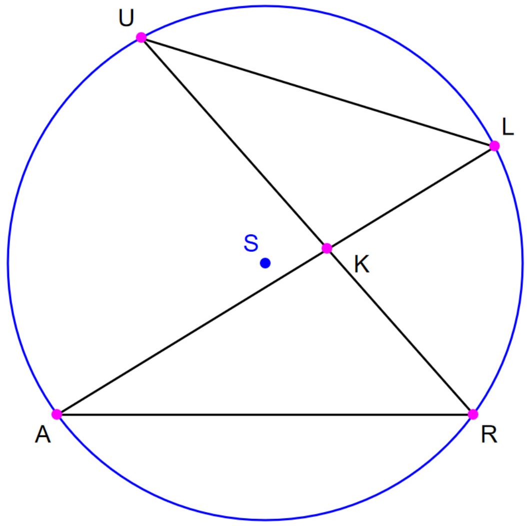
Analogicky lze na upravený vztah (8) nahlížet tak, že hledáme úsečku, která dělí úsečku délky *a* v poměru $\frac{b}{c}$.

1.5.6 Tětivový teorém

Při početním řešení některých typů úloh lze s úspěchem použít vztah mezi délkami částí tětiv dané kružnice. Na obr. 29 je zobrazena kružnice k se středem S a její tětivy LA a UR, které se protínají v bodě K; ten nemusí být obecně totožný se středem kružnice k. Abychom mohli odvodit vztah, který platí pro délky částí LK, KA, UK a KR zobrazených tětiv, doplníme si do obrázku ještě úsečky LU a AR. Tím získáme trojúhelníky LUK a RAK (viz obr. 30), o kterých nejdříve ukážeme, že jsou podobné.



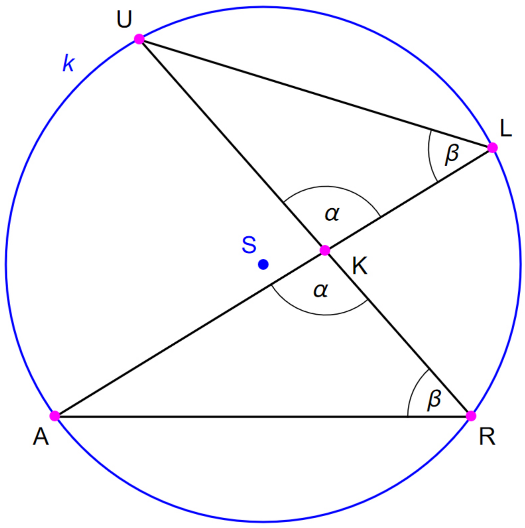
obr. 29



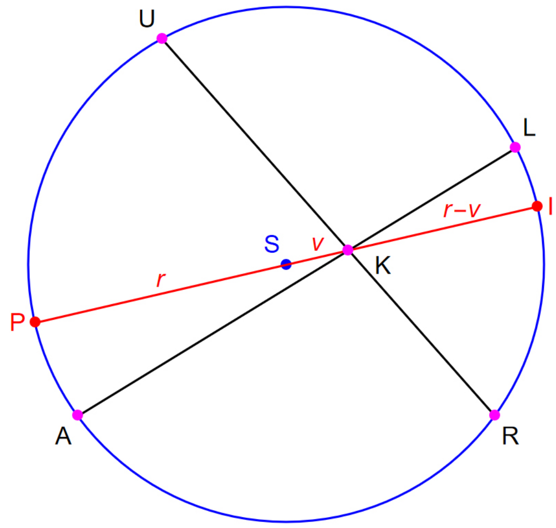
obr. 30

Úhly LKU a RKA v obou zobrazených trojúhelnících jsou shodné, neboť se jedná o úhly vrcholové (viz kapitola 1.2); na obr. 31 jsou tyto úhly označeny symbolem α. Úhly KLU a KRA obou uvažovaných trojúhelníků jsou také shodné (na obr. 31 jsou označeny symbolem β), protože jsou to úhly sestrojené nad stejnou úsečkou AU.

Jinými slovy: z bodů L a R je vidět úsečku AU pod stejným úhlem – pod úhlem β. Konstrukce bodů, z nichž je vidět danou úsečku pod zadaným úhlem, je popsána v kapitole 0.



obr. 31



obr. 32

Mají-li dva trojúhelníky dva navzájem stejné úhly, jsou podle věty *uu* podobné (viz kapitola 1.5.3). Trojúhelníky LUK a RAK jsou tedy podobné. Na základě podobnosti trojúhelníků lze psát pro délky jejich stran poměr ve tvaru: $\frac{|LK|}{|KR|} = \frac{|UK|}{|KA|}$. Tento vztah lze přepsat ve tvaru:

$$|LK| \cdot |KA| = |UK| \cdot |KR|, \tag{9}$$

což je vztah popisující tětivový teorém.

Tento vztah si lze pamatovat tak, že se jedná o rovnost dvou součinů délek částí tětiv se společným průsečíkem, přičemž na každé straně rovnice je součin délek částí téže tětivy. Na levé straně vztahu (9) je součin délek částí LK a KA tětivy LA a na pravé straně je součin délek částí UK a KR tětivy UR

Bude-li navíc jedna z tětiv procházet současně bodem K i středem S kružnice *k* o poloměru *r* (viz obr. 32), lze označit symbolem *v* vzdálenost průsečíku tětiv K od středu S kružnice *k*. Pak lze např. pro tětivu LA a tětivu PI v souladu se vztahem (9) psát: $|\mathrm{LK}|\cdot|\mathrm{KA}|=(r+v)\cdot(r-v)$. S využitím algebraického vztahu pak můžeme uvedený vztah přepsat ve tvaru:

$$|\mathrm{LK}|\cdot|\mathrm{KA}|=|\mathrm{UK}|\cdot|\mathrm{KR}|=r^2-v^2. \qquad (10)$$

Výhodou vztahu (10) je, že při dané poloze průsečíku K daných tětiv je vzdálenost *v* stálá. Poloměr *r* dané kružnice je také stálý, a proto lze vztah (10) využít i tehdy, když pracujeme s jednou obecnou tětivou a jednou, která prochází středem zadané kružnice.

Jsou-li uvažované tětivy sestrojené v kružnice na sebe navíc kolmé, platí pro délky jejich částí navíc i další vztah odvozený s využitím Pythagorovy věty v kapitole 1.7.5.

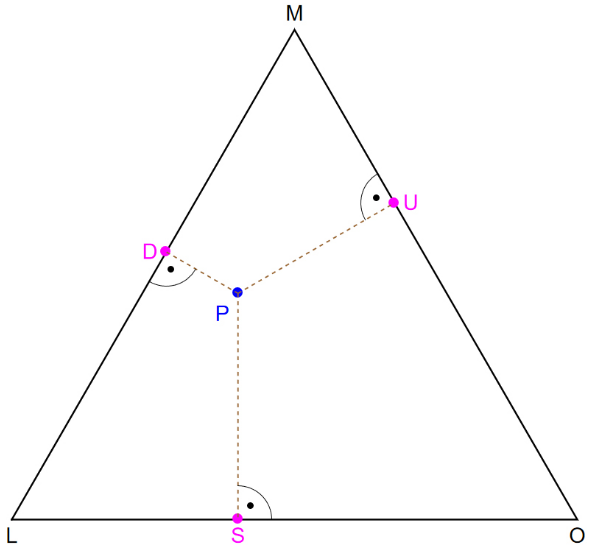
1.5.7 Vivianiho věta

Větu, která se týká jedné vlastnosti rovnostranného trojúhelníka, formuloval italský matematik a vědec Vincenzo Viviani (1622 – 1703).

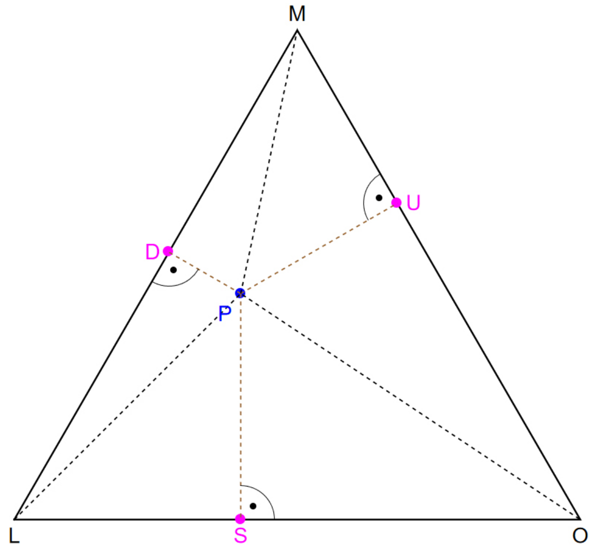
VIVIANIHO VĚTA: SOUČET VZDÁLENOSTÍ LIBOVOLNÉHO VNITŘNÍHO BODU V ROVNOSTRANNÉM TROJÚHELNÍKU OD JEHO STRAN JE ROVEN VÝŠCE TOHOTO TROJÚHELNÍKU.

Jinými slovy: vedeme-li z libovolného vnitřního bodu rovnostranného trojúhelníku kolmice na jeho strany, pak celková délka těchto tří kolmic je rovna výšce daného rovnostranného trojúhelníka.

Situace popsaná ve výše uvedené větě je pro trojúhelník LOM a bod P zobrazena na obr. 33. Jeden z důkazů Vivianiho věty lze vyvodit na základě obsahů trojúhelníků, které jsou zobrazeny na obr. 34.



obr. 33



obr. 34

Označíme-li délku strany uvažovaného rovnostranného trojúhelníka *a*, pak pro obsah:

1. trojúhelníka LOP platí $S_{\mathrm{LOP}}=\frac{1}{2}a\cdot|\mathrm{PS}|$;
2. trojúhelníka OMP platí $S_{\mathrm{OMP}}=\frac{1}{2}a\cdot|\mathrm{PU}|$;
3. trojúhelníka MLP platí $S_{\mathrm{MLP}}=\frac{1}{2}a\cdot|\mathrm{PD}|$.

Pro obsah trojúhelníka LOM pak platí $S=S_{\mathrm{LOP}}+S_{\mathrm{OMP}}+S_{\mathrm{MLP}}=\frac{1}{2}a\cdot(|\mathrm{PS}|+|\mathrm{PU}|+|\mathrm{PD}|)$. Současně lze ale obsah trojúhelníka LOM psát ve tvaru $S=\frac{1}{2}a\cdot v$, kde *v* výška na jeho stranu.

Porovnáním obou uvedených vztahů pro obsah trojúhelníka LOM dostáváme vztah:

$$v=|\mathrm{PS}|+|\mathrm{PU}|+|\mathrm{PD}|, \qquad (11)$$

což je závěr Vivianiho věty.

1.5.8 Osa úhlu dělící stranu trojúhelníka

V obecném trojúhelníku platí následující věta:

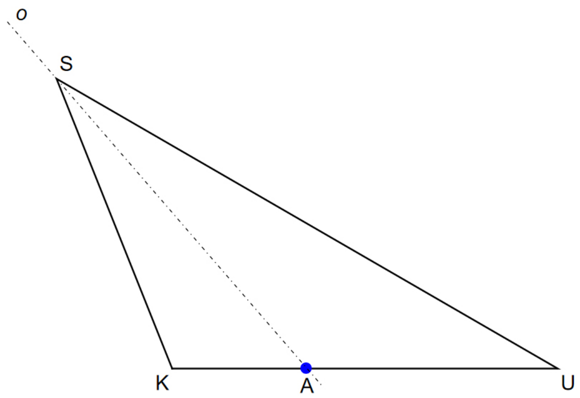
OSA KAŽDÉHO VNITŘNÍHO ÚHLU KAŽDÉHO TROJÚHELNÍKA DĚLÍ JEHO PROTILEHLOU STRANU V POMĚRU DÉLEK PŘILEHLÝCH STRAN TOHOTO TROJÚHELNÍKA.

Sledujme uvedenou větu na obr. 35, na kterém je zobrazený obecný trojúhelník KUS a osa jeho úhlu KSU protínající protilehlou stranu v bodě A. Odvození příslušného poměru (resp. důkaz uvedené věty) provedeme pomocí obsahů vybraných trojúhelníků.

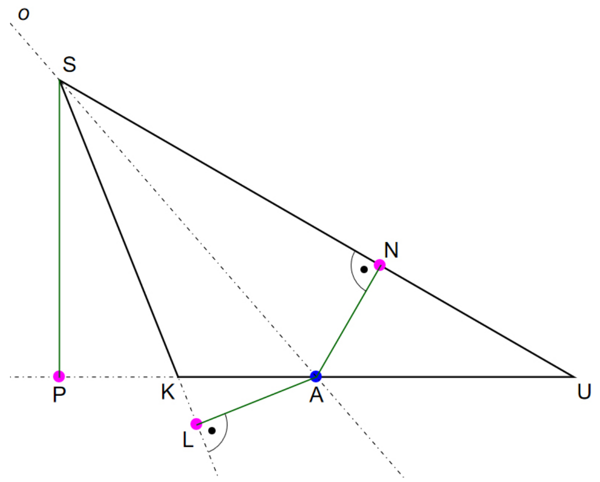
Na obr. 36 jsou proto kromě uvažovaného obecného trojúhelníka KUS zobrazeny i:

1. výška na stranu KU v trojúhelníku KUS (ale i na stranu KA v trojúhelníku KAS a na stranu AU v trojúhelníku AUS) protínající přímku UK v bodě P;
2. výška na stranu SK v trojúhelníku KAS protínající přímku SK v bodě L;
3. výška na stranu SU v trojúhelníku AUS protínající přímku SU v bodě N.

Před dalšímu úvahami je třeba si uvědomit, že trojúhelníky LAS a NAS jsou shodné. Oba trojúhelníky totiž jsou pravoúhlé, oba mají stejný úhel u vrcholu S (přímka *o*, na níž leží strana AS obou trojúhelníků, je osou úhlu KSU, a tedy tento úhel půlí) a oba mají shodnou stranu AS (viz věta *usu* v kapitole 1.5.2). Proto jsou shodné i sestrojené výšky LA a NA.



obr. 35



obr. 36

Nyní můžeme pro obsah trojúhelníka KAS psát: $S_{\mathrm{KAS}} = \frac{1}{2}\cdot|\mathrm{KA}|\cdot|\mathrm{SP}| = \frac{1}{2}\cdot|\mathrm{SK}|\cdot|\mathrm{LA}|$. Pro obsah trojúhelníka AUS platí: $S_{\mathrm{AUS}} = \frac{1}{2}\cdot|\mathrm{AU}|\cdot|\mathrm{SP}| = \frac{1}{2}\cdot|\mathrm{US}|\cdot|\mathrm{NA}|$. Pro poměr těchto obsahů (s uvědoměním si dokázaného vztahu $|\mathrm{LA}| = |\mathrm{NA}|$) platí: $\frac{S_{\mathrm{KAS}}}{S_{\mathrm{AUS}}} = \frac{|\mathrm{KA}|}{|\mathrm{AU}|} = \frac{|\mathrm{SK}|}{|\mathrm{US}|}$. Odtud již plyne hledaný závěr výše uvedené věty:

$$\frac{|\mathrm{KA}|}{|\mathrm{AU}|} = \frac{|\mathrm{SK}|}{|\mathrm{US}|}, \tag{12}$$

tedy poměr délek úseček KA a AU, na které dělí protilehlou stranu KU trojúhelníka KUS osa úhlu KSU, je roven poměru délek přilehlých stran SK a US tohoto trojúhelníka.

1.6 Množina bodů, z nichž je úsečku vidět pod daným úhlem

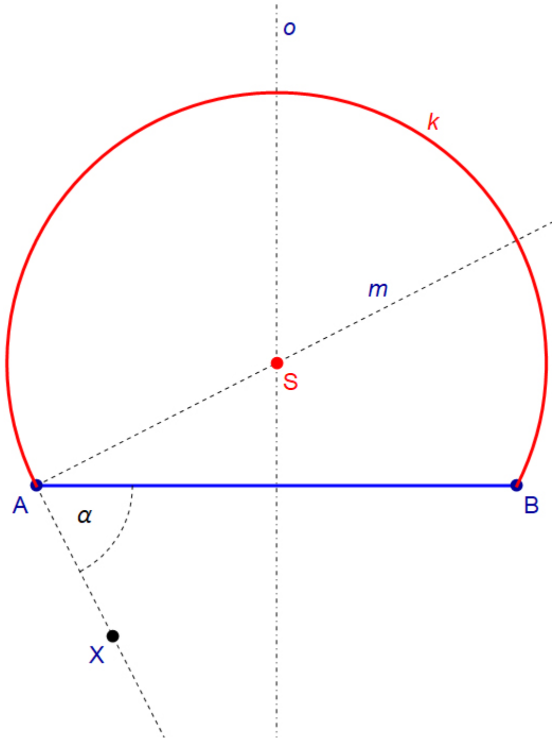
V řadě konstrukčních úloh je nutné znát množinu bodů, z nichž je vidět zadanou úsečku AB pod daným úhlem α. Konstrukce této množiny je popsána v bodech ve shodě s obr. 37 (pro ostrý úhel α) a obr. 38 (pro tupý úhel α), na kterých je zobrazena již celá konstrukce:

1. narýsujeme úsečku AB;
2. sestrojíme osu *o* úsečky AB;
3. narýsujeme polopřímku AX tak, že $|\sphericalangle \mathrm{BAX}| = \alpha$;
4. sestrojíme přímku *m*, která je kolmá k polopřímce AX a která prochází bodem A;

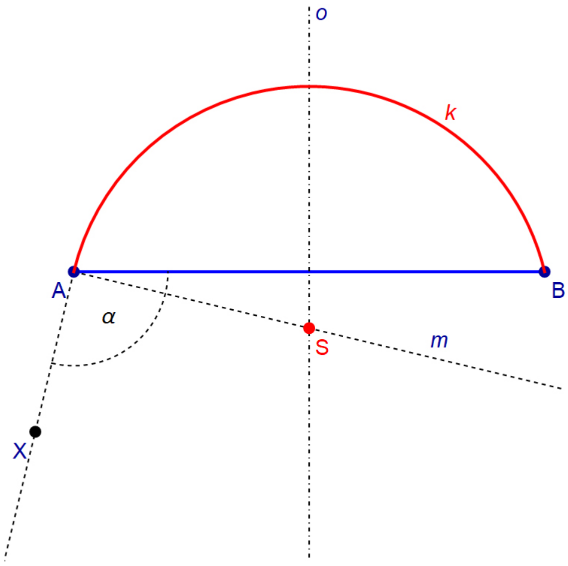
5. najdeme bod S jako průsečík přímek *o* a *m*;
6. v polorovině opačné k polorovině ABX (poloroviny jsou vymezeny hraniční přímkou AB), sestrojíme část kružnice *k*, která splňuje požadovaná kritéria.

Relativně komplikovaně zapsaný poslední bod konstrukce zobecňuje situace, pro které bod S neleží resp. leží v polorovině ABX. Tyto dvě situace jsou zobrazeny na obr. 37 a obr. 38.

Pro případ $\alpha = 90°$ se jedná o Thaletovu kružnici.



obr. 37



obr. 38

Část kružnice *k*, která je hledanou množinou, bývá někdy nazývána též jako brankářská množina, což vyplývá z faktu, že z bodů na dané množině mají hráči, kteří chtějí vstřelit ve fotbale, hokeji, … branku, stejnou šanci.

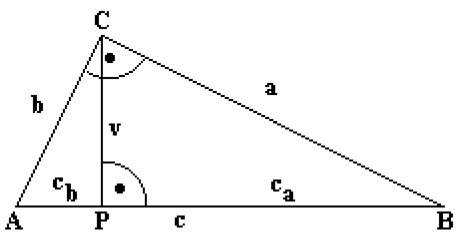
1.7 Eukleidovy věty, věta Pythagorova

1.7.1 Eukleidovy věty

V pravoúhlém trojúhelníku ABC zobrazeném na obr. 39 sestrojíme výšku CP ke straně AB. Označíme: délky odvěsen *a*, *b*, délku přepony *c*, výšku na přeponu *v*, úsek přepony přilehlý k odvěsně BC jako c_a a úsek přepony přilehlý k odvěsně AC jako c_b.

Pravoúhlé trojúhelníky ACP, CBP a ABC jsou podobné (vyplývá z věty *uu* uvedené v kapitole 1.5.3).

Z podobnosti trojúhelníků ACP a CBP vyplývá poměr $c_b : v = v : c_a$. Z tohoto poměru lze vyjádřit $v^2 = c_a \cdot c_b$. Odtud již plyne vztah pro výšku k přeponě pravoúhlého trojúhelníka: $v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$.



obr. 39

EUKLEIDOVA VĚTA O VÝŠCE: V KAŽDÉM PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU JE DRUHÁ MOCNINA VÝŠKY K PŘEPONĚ ROVNA SOUČINU OBOU ÚSEKŮ PŘEPONY, TJ. PLATÍ

$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b}\,. \tag{13}$$

Geometrický význam Eukleidovy věty o výšce vyplývá z právě uvedené formulace. Eukleidovu větu o výšce lze převést do tohoto tvaru: Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

Dále lze z podobnosti trojúhelníků CBP a ABC napsat rovnost poměrů $a : c_a = c : a$. Z této rovnosti plyne vztah $a^2 = c \cdot c_a$, ze kterého lze již vyjádřit $a = \sqrt{c \cdot c_a}$.

Analogicky lze z podobnosti trojúhelníků ACP a ABC vyjádřit rovnost $b : c_b = c : b$. Z ní můžeme vyjádřit $b^2 = c \cdot c_b$, a tedy platí $b = \sqrt{c \cdot c_b}$. Analogicky platí vztah pro odvěsnu a a úsek přepony c_a.

<u>EUKLEIDOVA VĚTA O ODVĚSNĚ:</u> V KAŽDÉM PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU JE DRUHÁ MOCNINA DÉLKY ODVĚSNY ROVNA SOUČINU DÉLEK PŘEPONY A K DANÉ ODVĚSNĚ PŘILEHLÉHO ÚSEKU PŘEPONY, TJ. PLATÍ

$$a = \sqrt{c \cdot c_a} \text{ resp. } b = \sqrt{c \cdot c_b}. \tag{14}$$

Geometrický význam Eukleidovy věty o odvěsně vyplývá z právě uvedené formulace: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony přilehlého k dané odvěsně.

1.7.2 <u>Střední geometrická úměrná</u>

Střední geometrická úměrná dvou úseček délek *a* a *b* je taková úsečka, pro jejíž délku *x* platí

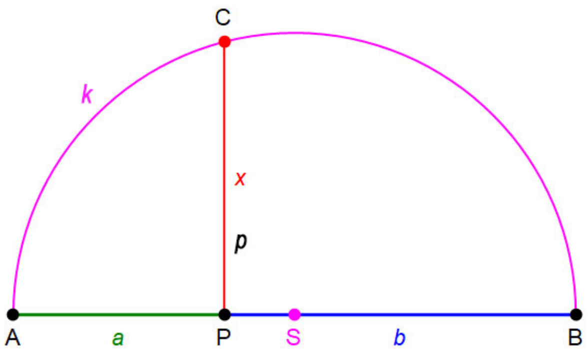
$$x = \sqrt{a \cdot b}. \tag{15}$$

Při známých délkách *a* a *b* zadaných úseček lze délku *x* určit na základě jedné z Eukleidových vět.

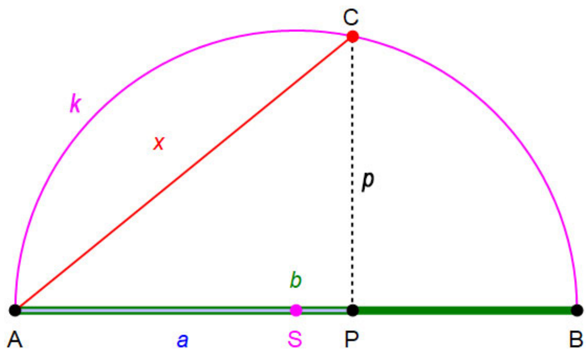
Při konstrukci pomocí Eukleidovy věty o výšce lze postupovat takto (viz finální konstrukce zobrazená na obr. 40):

1. sestrojíme úsečku AB délky $a + b$ skládající se ze dvou úseček: AP (o délce *a*) a PB (o délce *b*);
2. najdeme její střed S;
3. opíšeme kružnici *k* se středem S a poloměrem rovným délce úsečky SA (resp. SB);
4. z bodu P sestrojíme kolmici *p* k úsečce AB;
5. najdeme bod C ležící na průsečíku kružnice *k* a přímky *p*;
6. délka úsečky CP je hledanou délkou *x*.

Kružnice *k* sestrojovaná v popsané konstrukci je Thaletova kružnice nad úsečkou AB. Proto má trojúhelník ABC pravý úhel u vrcholu C a využití Eukleidovy věty o výšce je tedy v pořádku.



obr. 40



obr. 41

S využitím Eukleidovy věty o odvěsně lze postupovat při konstrukci, která je celá zobrazená na obr. 41, takto:

1. sestrojíme úsečku AB délky *b*, přičemž $b > a$ (bez újmy na obecnosti);

Začneme prostě konstrukci s delší úsečkou.

2. najdeme její střed S;
3. opíšeme kružnici *k* se středem S a poloměrem rovným délce úsečky SA (resp. SB);
4. z bodu A naneseme na úsečku AB úsečku AP délky *a*;
5. z bodu P sestrojíme kolmici *p* k úsečce AB;
6. najdeme bod C ležící na průsečíku kružnice *k* a přímky *p*;

7. délka úsečky AC je hledanou délkou x.

I v tomto případě je kružnice k sestrojovaná v popsané konstrukci Thaletovou kružnicí nad úsečkou AB. Proto má trojúhelník ABC pravý úhel u vrcholu C a využití Eukleidovy věty o odvěsně je tedy v pořádku.

V algebře se charakteristika x dvou kladných reálných čísel a a b daná vztahem (15) nazývá **geometrický průměr** čísel a a b.

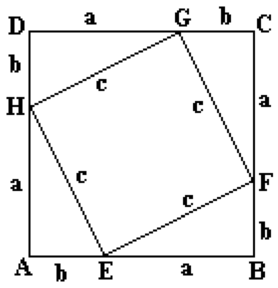
1.7.3 Pythagorova věta

Součtem vztahů pro Eukleidovy věty o odvěsnách dostáváme postupnými úpravami rovnost: $a^2+b^2=c\cdot c_{\mathrm{a}}+c\cdot c_{\mathrm{b}}=c\cdot\left(c_{\mathrm{a}}+c_{\mathrm{b}}\right)=c\cdot c=c^2$. Formálně jsme tedy získali symbolický zápis Pythagorovy věty.

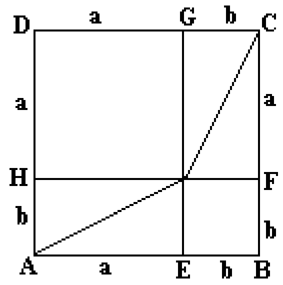
PYTHAGOROVA VĚTA: V KAŽDÉM PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU JE DRUHÁ MOCNINA DÉLKY PŘEPONY ROVNA SOUČTU DRUHÝCH MOCNIN DÉLEK OBOU ODVĚSEN.

Geometrický význam Pythagorovy věty je zřejmý: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.

Při odvozování Pythagorovy věty se nemusí nutně vycházet z Eukleidových vět (viz kapitola 1.7.1). Pythagorovu větu lze odvodit nezávisle na Eukleidových větách a ty pak odvodit pomocí Pythagorovy věty. Pythagorovu větu lze odvodit na základě porovnání obsahů geometrických obrazců zobrazených např. na obr. 42 resp. obr. 43.



obr. 42

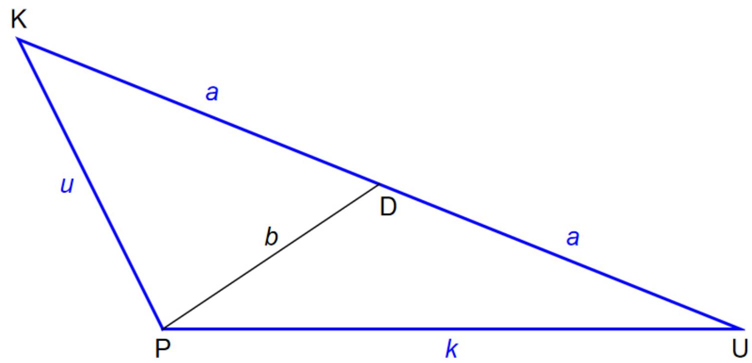


obr. 43

1.7.4 Vztah mezi stranami a těžnicí obecného trojúhelníka

S využitím Pythagorovy věty lze odvodit vztah, který platí v obecném trojúhelníku mezi délkami jeho stran a délkou těžnice. Odvození bude provedeno pro trojúhelník PUK, jehož strany mají délky $2a$, u a k a délka těžnice na stranu UK je b (viz obr. 44).

Abychom mohli použít Pythagorovu větu, je třeba v daném trojúhelníku najít pravoúhlý trojúhelník. Ten lze sestrojit tak, že sestrojíme výšku na stranu UK, která protne stranu UK v bodě C a která má délku v (viz obr. 45). Délka úsečky CD (tj. vzdálenost mezi patou výšky a středem úsečky UK) je x (viz obr. 46).



obr. 44

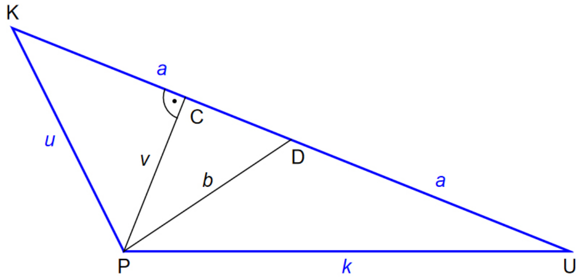
V pravoúhlém trojúhelníku PCK lze Pythagorovu větu psát ve tvaru: $v^2=u^2-\left(a-x\right)^2$. Dvojčlen můžeme umocnit a dostaneme vztah ve tvaru: $v^2=u^2-a^2+2ax-x^2$.

V pravoúhlém trojúhelníku PUC lze Pythagorovu větu psát ve tvaru: $v^2=k^2-\left(a+x\right)^2$. Další úpravou dostaneme vztah ve tvaru: $v^2=k^2-a^2-2ax-x^2$.

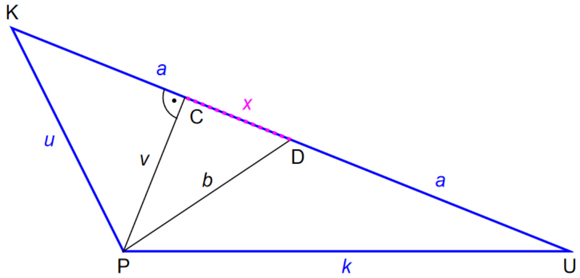
Sečtením obou odvozených vztahů dostaneme vztah: $2v^2 = u^2 + k^2 - 2a^2 - 2x^2$. Ten můžeme přepsat ve tvaru: $u^2 + k^2 = 2a^2 + 2\left(v^2 + x^2\right)$. Pythagorova věta v trojúhelníku PDC má tvar $v^2 + x^2 = b^2$. Proto můžeme finální vztah psát ve tvaru

$$u^2 + k^2 = 2a^2 + 2b^2. \tag{16}$$

Mnemotechnicky si lze odvozený vztah (16) pamatovat tak, že na jeho levé straně je součet kvadrátů délek dvou stran obecného trojúhelníka a na jeho pravé straně je dvojnásobek součtu kvadrátů délky poloviny třetí strany uvedeného trojúhelníka a délky těžnice na tuto třetí stranu.



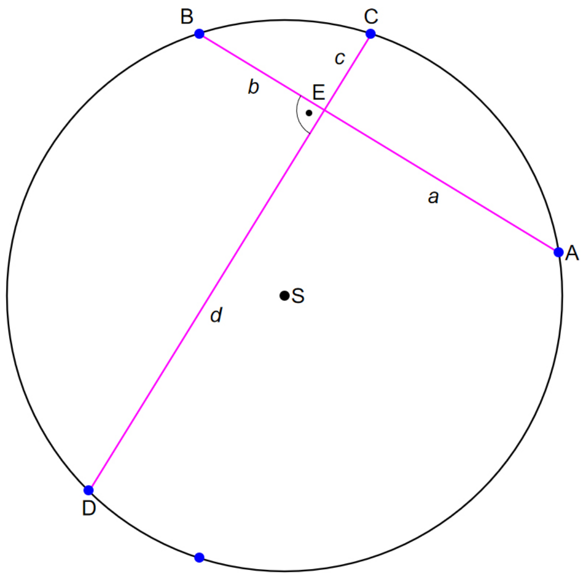
obr. 45



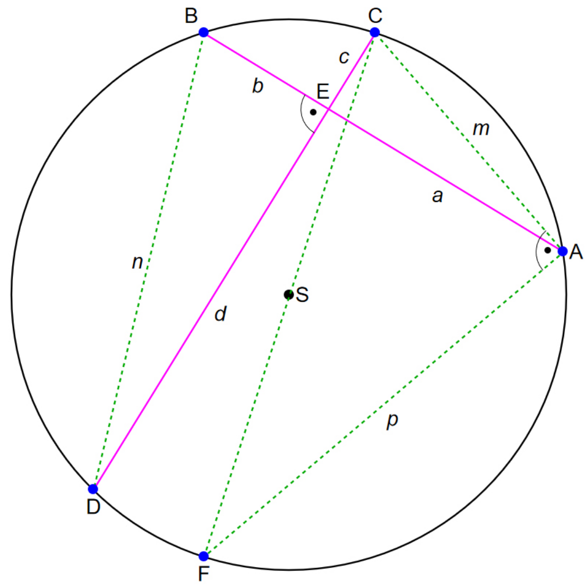
obr. 46

1.7.5 Vztah mezi délkami částí tětiv v kružnici

Další aplikací Pythagorovy je odvození vztahu mez délkami částí navzájem kolmých tětiv kružnice o poloměru *r*. Na obr. 47 je zobrazena kružnice o poloměru *r* a její dvě navzájem kolmé tětivy AB a CD, které se protínají v bodě E. Délky úseků obou tětiv jsou *a*, *b*, *c* a *d*.



obr. 47



obr. 48

Pro odvození vztahu mezi uvažovanými délkami úseků tětiv do kružnice přikreslíme další pomocné tětivy (viz obr. 48). Nyní můžeme začít s úvahami týkající se vzniklých trojúhelníků.

Trojúhelník AEC je pravoúhlý (pravý úhel v bodě E plyne ze zadání), a proto pro délky jeho stran platí Pythagorova věta ve tvaru: $a^2 + c^2 = m^2$.

Trojúhelník DEB je také pravoúhlý, a proto pro délky jeho stran lze psát vztah $b^2 + d^2 = n^2$.

Sečtením obou uvedených vztahů získáme vztah

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2 + n^2. \tag{17}$$

Úhel FAC je pravý ve shodě s Thaletovou větou, protože trojúhelník FAC je sestrojen nad průměrem uvažované kružnice. Proto v trojúhelníku FAC můžeme pro délky jeho stran psát vztah

$$m^2 + p^2 = (2r)^2 \tag{18}$$

Pro další úvahu si nejdříve uvědomíme, že úhly CAB a CDB jsou shodné (tj. platí $|\sphericalangle \mathrm{CAB}| = |\sphericalangle \mathrm{CDB}|$). Oba úhly jsou totiž obvodové úhly sestrojené nad stejným obloukem BC dané kružnice

Dále platí, že úhel BAF je doplňkový k úhlu CAB a úhel ABD je doplňkový k úhlu CDB.

To plyne ze skutečnosti, že $|\sphericalangle \mathrm{BAF}| + |\sphericalangle \mathrm{CAB}| = 90°$ a $|\sphericalangle \mathrm{ABD}| + |\sphericalangle \mathrm{CDB}| = 90°$ (viz obr. 48).

Z výše uvedeného plyne, že i úhly BAF a ABD jsou shodné. To ale znamená, že délky oblouků BDF a AFD dané kružnice jsou stejné. Oblouk DF je přitom oběma zmíněným obloukům společný, proto jsou stejné i oblouky AF a BD. Z toho vyplývá, že i délky tětiv AF a BD jsou stejné, tedy $p = n$.

Vztah (18) proto můžeme psát ve tvaru $m^2 + n^2 = (2r)^2$. Levá strana tohoto vztahu je přitom stejná jako pravá strana vztahu (17). Můžeme tedy do vztahu (17) dosadit a dostaneme hledaný vztah ve tvaru

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4r^2 . \tag{19}$$

Tento vztah nepatří mezi základní planimetrické vztahy, ale může být užitečný při řešení některých typů úloh.

1.8 Zobrazení v rovině

1.8.1 Definice zobrazení

Pro řadu matematických aplikací, ale i technických či praktických aplikací je nutné znát pojem zobrazení.

ZOBRAZENÍ Z V ROVINĚ JE PŘEDPIS, KTERÝ KAŽDÉMU BODU X ROVINY PŘIŘAZUJE PRÁVĚ JEDEN BOD X' ROVINY. BOD X SE NAZÝVÁ VZOR, BOD X' JEHO OBRAZ.

ZÁPIS: $Z: \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$.

BODY, PRO KTERÉ PLATÍ $\mathrm{X} = \mathrm{X}'$, SE NAZÝVAJÍ SAMODRUŽNÉ BODY; ZOBRAZENÍ, V NĚMŽ JE KAŽDÝ BOD SAMODRUŽNÝ, SE NAZÝVÁ IDENTITA.

V některých případech se zajímáme též o samodružné útvary. To jsou geometrické útvary, jejichž hranice neprotíná samu sebe a které nejsou obecně tvořeny samodružnými body.

Např. čtverec (resp. obdélník) je samodružný v osové souměrnosti (viz kapitola 1.8.2.1) s osou, která prochází středy jeho dvou navzájem rovnoběžných stran.

Zobrazení lze definovat i v prostoru, ale tím se nebudeme v tomto textu zabývat.

Zobrazení mohou být shodná i podobná. Mezi shodná zobrazení patří:

1. osová souměrnost (viz kapitola 1.8.2.1);
2. středová souměrnost (viz kapitola 1.8.2.2);
3. posunutí (viz kapitola 1.8.2.3);
4. otočení (viz kapitola 1.8.2.4).

Mezi podobná zobrazení patří stejnolehlost (viz kapitola 1.8.3).

1.8.2 Shodná zobrazení

ZOBRAZENÍ V ROVINĚ SE NAZÝVÁ SHODNÉ ZOBRAZENÍ (SHODNOST), JESTLIŽE OBRAZEM KAŽDÉ ÚSEČKY AB JE ÚSEČKA $\mathrm{A'B'}$ SHODNÁ S ÚSEČKOU AB.

Shodnost přitom může být dvojího druhu:

1. shodnost přímá – vzor lze převést na jeho obraz pouze otáčením nebo posouváním v rovině (viz obr. 49);

U shodnosti přímé tedy vytvoříme např. z papíru vzor příslušného geometrického obrazce, položíme na stůl a dáme na papír ruku. Pak, aniž zvedneme ruku, budeme obrazcem libovolně posouvat po stole a otáčet jím. Ať obrazec pak zůstane v jakékoliv poloze na stole, vždy se bude jednat (vzhledem k jeho počáteční poloze) o shodnost přímou.

2. shodnost nepřímá – vzor lze převést na jeho obraz pouze za předpokladu, že jej otočíme mimo uvažovanou rovinu (viz obr. 50).

obr. 49

obr. 50

Příkladem nepřímé shodnosti je např. levá a pravá rukavice či levá a pravá bota.

V každém shodném zobrazení je:

1. obrazem přímky AB přímka $A'B'$ a obrazem vzájemně rovnoběžných přímek jsou vzájemně rovnoběžné přímky;
2. obrazem polopřímky AB polopřímka $A'B'$ a obrazem navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky;
3. obrazem poloroviny pA polorovina $p'A'$ a obrazem navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny;
4. obrazem úhlu AVB úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB;
5. obrazem útvaru U útvar U' shodný s útvarem U.

<u>VĚTA:</u> KAŽDÉ SHODNÉ ZOBRAZENÍ JE PROSTÉ.

To znamená, že každý obraz má právě jeden vzor.

1.8.2.1 <u>Osová souměrnost</u>

JE DÁNA PŘÍMKA o. <u>OSOVÁ SOUMĚRNOST</u> S OSOU o JE SHODNÉ ZOBRAZENÍ $O(o)$, KTERÉ PŘIŘAZUJE:

1. KAŽDÉMU BODU $X \notin o$ BOD X' TAK, ŽE PŘÍMKA XX' JE KOLMÁ K PŘÍMCE o A STŘED ÚSEČKY XX' LEŽÍ NA PŘÍMCE o;

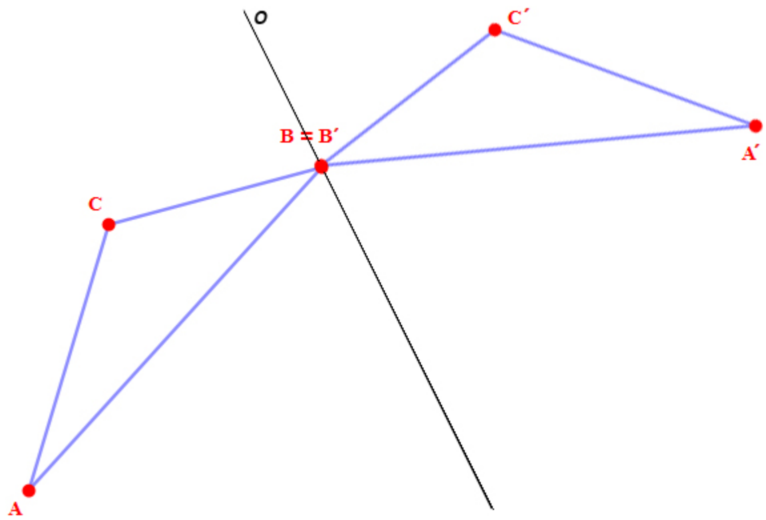
2. KAŽDÉMU BODU $Y \in o$ BOD $Y' = Y$.

PŘÍMKA o SE NAZÝVÁ OSA OSOVÉ SOUMĚRNOSTI. OSOVÁ SOUMĚRNOST JE NEPŘÍMÁ SHODNOST.

Množina všech samodružných bodů je osa souměrnosti o. Samodružné přímky osové souměrnosti jsou osa souměrnosti a všechny přímky k ní kolmé.

Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti nebo dvojicí různých bodů X a X' (vzor a obraz).

Na obr. 51 je zobrazen trojúhelník ABC, který se v osové souměrnosti s osou o zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$, tj. $O(o): \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$. Bod B (resp. bod B') je v tomto případě samodružný bod, protože leží na ose souměrnosti o.



obr. 51

1.8.2.2 <u>Středová souměrnost</u>

JE DÁN BOD S. <u>STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST</u> SE STŘEDEM S JE SHODNÉ ZOBRAZENÍ $S(S)$, KTERÉ PŘIŘAZUJE:

1. KAŽDÉMU BODU $X \neq S$ BOD X' TAK, ŽE BOD S JE STŘEDEM ÚSEČKY XX';

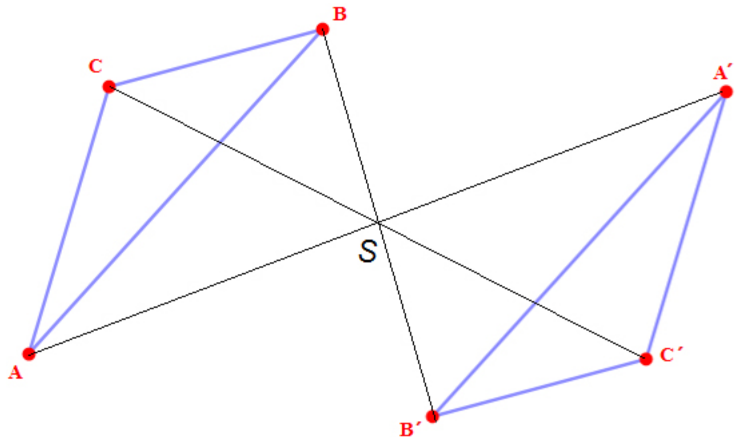
2. bodu S bod $S = S'$.

Bod S se nazývá střed středové souměrnosti. Středová souměrnost je přímá shodnost.

Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed. Obrazem přímky, která neprochází středem, je přímka s ní rovnoběžná. Všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti, jsou samodružné přímky středové souměrnosti.

Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti nebo dvojicí různých bodů X a X' (vzor a obraz).

Na obr. 52 je zobrazen trojúhelník ABC, který se ve středové souměrnosti se středem S zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$, tj. $S(S): \triangle ABC \to \triangle A'B'C'$.

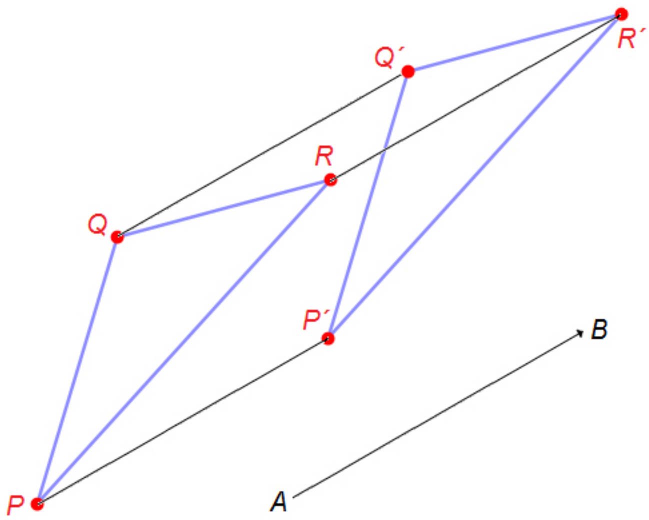


obr. 52

1.8.2.3 Posunutí (translace)

Je dána orientovaná úsečka $\overrightarrow{AB}$. <u>Posunutí (translace)</u> je shodné zobrazení $T\left(\overrightarrow{AB}\right)$, které každému bodu X přiřadí bod X′ tak, že orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{XX'}$ mají stejnou velikost a jsou souhlasně orientovány.

Délkou orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ je určena délka posunutí, orientací úsečky $\overrightarrow{AB}$ je určen směr posunutí. Posunutí je přímá shodnost.



obr. 53

Posunutí nemá žádné samodružné body. Obrazem přímky, která není rovnoběžná se směrem posunutí, je přímka rovnoběžná s původní přímkou. Přímky, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí, jsou samodružné přímky posunutí.

Na obr. 53 je zobrazen trojúhelník PQR, který se při posunutí daném orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$ zobrazí na trojúhelník $P'Q'R'$, tj. $T\left(\overrightarrow{AB}\right): \triangle PQR \to \triangle P'Q'R'$.

1.8.2.4 Otočení (rotace)

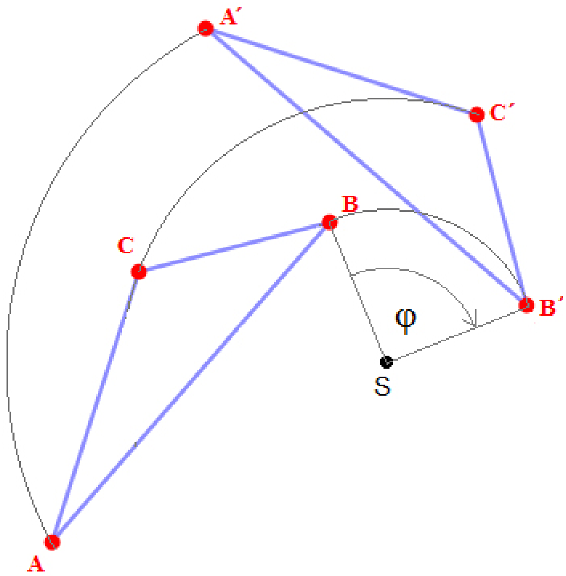
Je dán orientovaný úhel φ a bod S. Otočení (rotace) je shodné zobrazení $R(\mathrm{S},\varphi)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $\mathrm{X} \neq \mathrm{S}$ bod X' tak, že $|\mathrm{X}'\mathrm{S}| = |\mathrm{XS}|$ a orientovaný úhel XSX' má stejnou velikost jako úhel φ;

2. bodu S bod $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$.

Bod S se nazývá střed otočení, orientovaný úhel φ se nazývá úhel otočení. Otočení je přímá shodnost.

Pro $\varphi = \pi + 2k\pi$ se jedná o středovou souměrnost, pro $\varphi = 2k\pi$ se jedná o identitu; $k \in \mathbb{Z}$.



obr. 54

Otočení má jediný samodružný bod a tím je střed otočení – pokud se nejedná o identitu.

Identické otočení je otočení o úhel 0 radiánů resp. 0 stupňů.

Při otáčení přímky se otáčejí všechny její body, tedy i pata kolmice vedené středem otočení k dané přímce. Stačí tedy otočit tuto komici k přímce, což znamená otočit pouze bod, který je patou této kolmice.

Při otáčení je nutné respektovat i orientaci úhlu rotace.

Na obr. 54 je zobrazen trojúhelník ABC, který se při otočení daném orientovaným úhlem φ a středem S zobrazí na trojúhelník $\mathrm{A'B'C'}$, tj. $R(\mathrm{S},\varphi): \triangle \mathrm{ABC} \to \triangle \mathrm{A'B'C'}$. Úhel φ je v tomto případě orientován záporně.

Kladná a záporná orientace úhlů je definována stejně, jako v případě definice goniometrických funkcí: je-li úhel orientován ve směru pohybu hodinových ručiček, je jeho orientace záporná. V opačném případě je jeho orientace kladná.

1.8.3 Stejnolehlost

Stejnolehlost patří mezi podobná zobrazení.

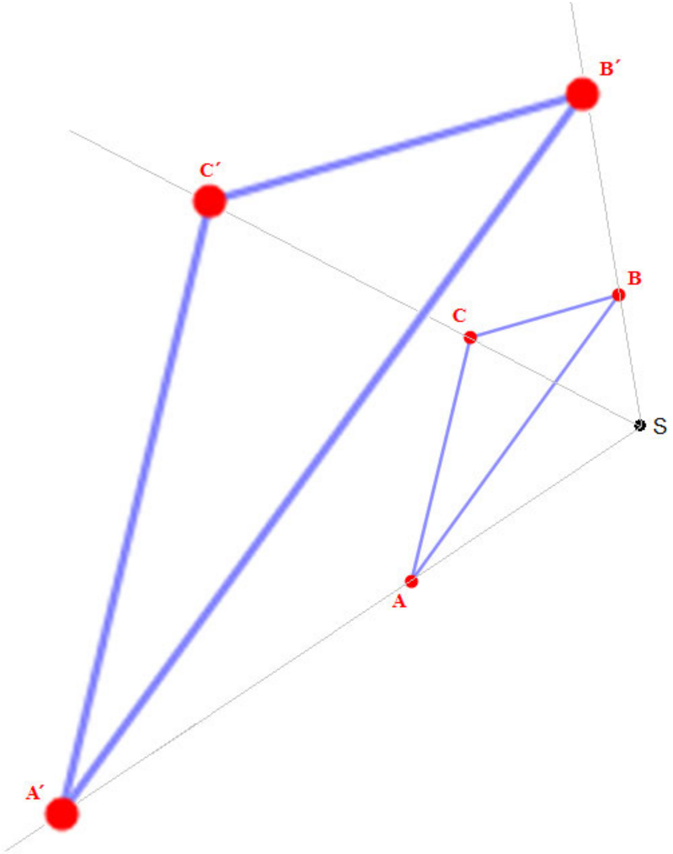
1.8.3.1 Definice a vlastnosti

Je dán bod S a reálné číslo κ ($\kappa \neq 0$). Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem κ je zobrazení $H(\mathrm{S},\kappa)$, které přiřazuje:

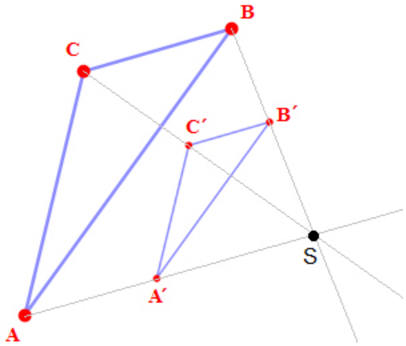
1. každému bodu $\mathrm{X} \neq \mathrm{S}$ bod X' tak, že platí $|\mathrm{SX}'| = |\kappa| \cdot |\mathrm{SX}|$; přitom pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX, pro $\kappa < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné k polopřímce SX;

2. bodu S bod $\mathrm{S} = \mathrm{S}'$.

Pro $\kappa = 1$ je každý bod roviny samodružný – zobrazení je identita. Je-li $\kappa = -1$, je stejnolehlost středovou souměrností. Stejnolehlost není zobrazení shodné, ale podobné.



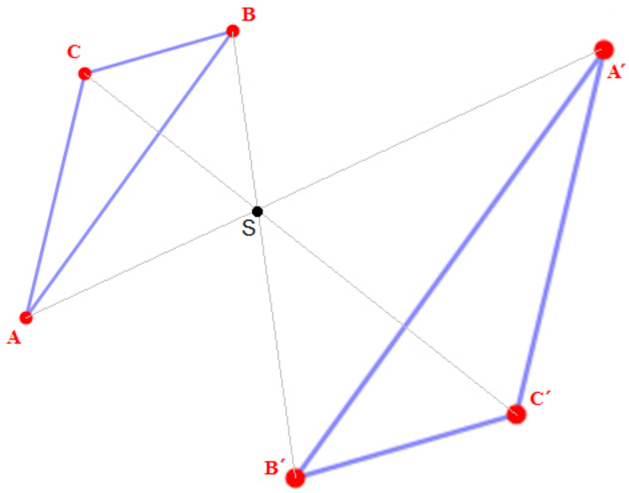
obr. 55



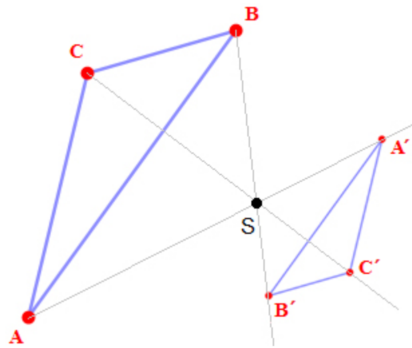
obr. 56

Stejnolehlost má tyto vlastnosti:

1. přímka a její obraz ve stejnolehlosti jsou navzájem rovnoběžné;
2. úsečka a její obraz jsou orientovány souhlasně ve stejnolehlosti s kladným koeficientem a opačně ve stejnolehlosti se záporným koeficientem;
3. poměr délek obrazu úsečky a jejího vzoru se rovná absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti;
4. obrazem úhlu je úhel s původním úhlem shodný;
5. samodružný bod je střed (není-li stejnolehlost identitou), samodružné přímky jsou přímky procházející středem stejnolehlosti;
6. pro $|\kappa| < 1$ je obraz daného útvaru ve stejnolehlosti s koeficientem κ zmenšený, pro $|\kappa| > 1$ je obraz zvětšený



obr. 57



obr. 58

Čtyři případy stejnolehlosti, které mohou nastat, jsou tyto:

1. $\kappa > 1$ – obraz je zvětšený (viz obr. 55);
2. $0 < \kappa < 1$ – obraz je zmenšený (viz obr. 56);

3. $\kappa < -1$ – obraz je zvětšený a oproti vzoru otočený o $180°$ (viz obr. 57);
4. $-1 < \kappa < 0$ – obraz je zmenšený a oproti vzoru otočený o $180°$ (viz obr. 58).

1.8.3.2 ***Stejnolehlost kružnic***

Zajímavé vlastnosti má stejnolehlost kružnice.

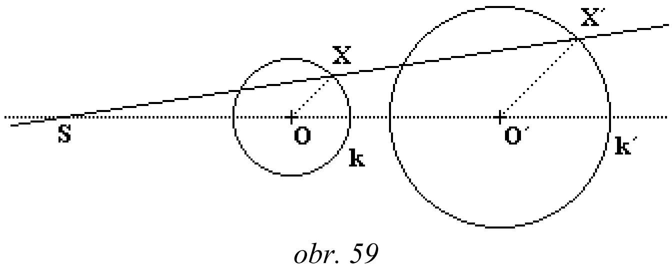
VĚTA: **OBRAZEM KRUŽNICE $k(\mathrm{O}; r)$ VE STEJNOLEHLOSTI $H(\mathrm{S}, \kappa)$ JE KRUŽNICE $k'(\mathrm{O}'; |\kappa| \cdot r)$; PŘITOM BOD O' JE OBRAZEM BODU O.**

VĚTA: **JSOU-LI DÁNY DVĚ KRUŽNICE S RŮZNÝMI POLOMĚRY, PAK EXISTUJÍ PRÁVĚ DVĚ STEJNOLEHLOSTI, KTERÉ ZOBRAZUJÍ PRVNÍ KRUŽNICI NA DRUHOU.**

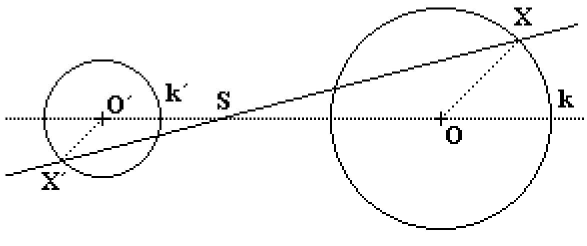
Pro dvě kružnice $k_1(\mathrm{O}_1; r_1)$ a $k_2(\mathrm{O}_2; r_2)$, pro jejichž poloměry r_1 a r_2 platí nerovnost $r_1 > r_2$, může nastat celkem 6 možností jejich vzájemné polohy:

1. $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| > r_1 + r_2$ – kružnice se navzájem nedotýkají;
1. $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = r_1 + r_2$ – kružnice se navzájem dotýkají vně a mají společný právě jeden bod;
2. $r_1 - r_2 < |\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| < r_1 + r_2$ – kružnice se protínají a mají společné právě dvě body;
3. $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = r_1 - r_2$ – kružnice se navzájem dotýkají, mají společný právě jeden bod, přičemž kružnice s menším poloměrem leží uvnitř kružnice s větším poloměrem a jedná se o tzv. vnitřní dotyk;
4. $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| < r_1 - r_2$ – kružnice s menším poloměrem leží uvnitř kružnice s větším poloměrem, kružnice nemají společný žádný bod;
5. $|\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2| = 0$ – kružnice jsou soustředné a nemají žádný společný bod.

Středy stejnolehlostí a středy obou kružnic leží na téže přímce. Střed stejnolehlosti ležící vně úsečky spojující středy obou kružnic, se nazývá **vnější střed stejnolehlosti** (viz obr. 59); střed stejnolehlosti ležící uvnitř úsečky spojující středy obou kružnic, se nazývá **vnitřní bod stejnolehlosti** (viz obr. 60). Je-li kružnice k_2 obrazem kružnice k_1, jsou koeficienty stejnolehlostí rovny poměrům $\frac{r_2}{r_1}$ a $-\frac{r_2}{r_1}$.



obr. 59



obr. 60

VĚTA: **SPOLEČNÁ TEČNA OBOU KRUŽNIC (POKUD TATO TEČNA EXISTUJE) JE BUĎ ROVNOBĚŽNÁ SE SPOJNICÍ STŘEDŮ KRUŽNIC, NEBO PROCHÁZÍ STŘEDEM NĚKTERÉ STEJNOLEHLOSTI, ZOBRAZUJÍCÍ JEDNU KRUŽNICI NA DRUHOU.**

Tečny procházející vnějším bodem stejnolehlosti se nazývají **vnější společné tečny**, tečny procházející vnitřním středem stejnolehlosti se nazývají **vnitřní společné tečny** obou kružnic.