Vlastnosti funkcí

Vlastnosti funkcí, které se využívají jak v matematice, tak v aplikačních předmětech, budou uvedeny formou definice a příkladu funkce (předpis a graf), která má danou vlastnost.

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ:

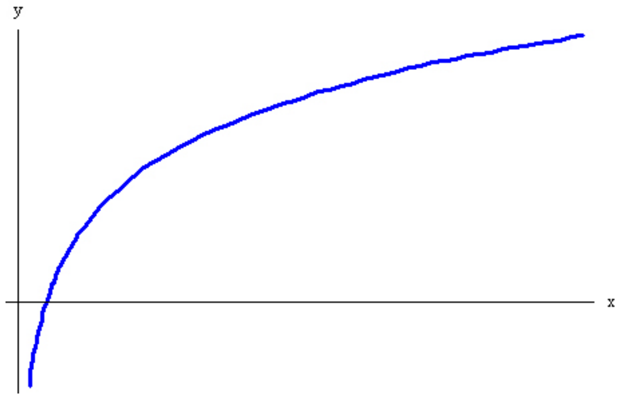
1. **ROSTOUCÍ**
2. **NEKLESAJÍCÍ**
3. **KLESAJÍCÍ**
4. **NEROSTOUCÍ**
5. **KONSTANTNÍ**

NA INTERVALU $\langle a;b\rangle \subset D(f)$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ PRO KAŽDÁ DVĚ $x_1, x_2 \in \langle a;b\rangle$ PLATÍ:

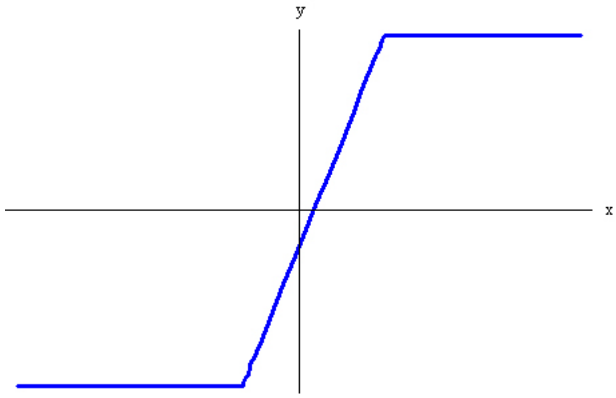
1. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
2. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$;
3. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
4. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$;
5. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Uvedené vlastnosti mají např. tyto funkce:

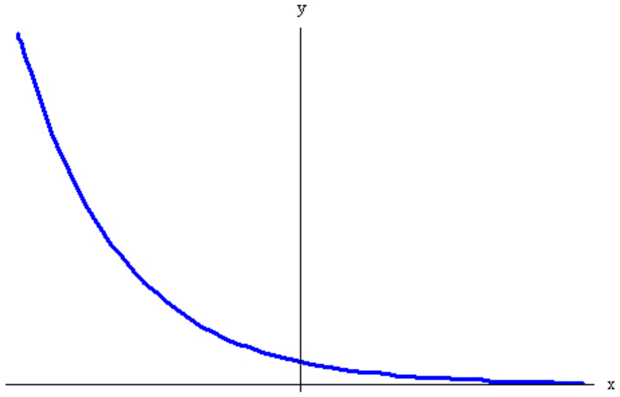
- funkce $f: y = \log x$ je (na svém definičním oboru) rostoucí (viz obr. 1),
- funkce $g: y = |x+2| - |x-3|$ je (na svém definičním oboru) neklesající (viz obr. 2),
- funkce $h: y = 0{,}5^x$ je (na svém definičním oboru) klesající (viz obr. 3),
- funkce $j: y = |x+2| - x$ je (na svém definičním oboru) nerostoucí (viz obr. 4),
- funkce $k: y = 5$ je (na svém definičním oboru) konstantní (viz obr. 5).



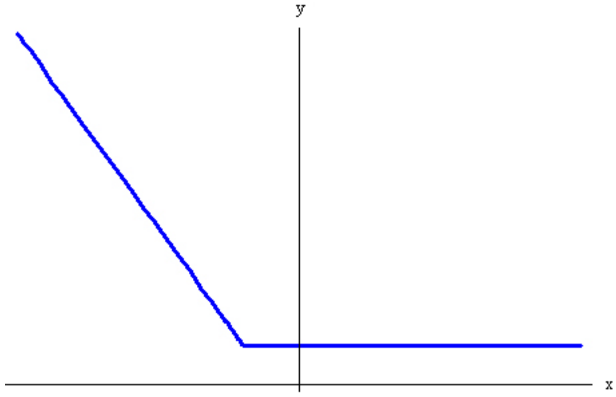
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

D: NEKLESAJÍCÍ A NEROSTOUCÍ FUNKCE SE NAZÝVAJÍ **MONOTÓNNÍ**, ROSTOUCÍ A KLESAJÍCÍ FUNKCE SE NAZÝVAJÍ **RYZE MONOTÓNNÍ**.

I další vlastnosti funkcí jsou důležité pro využití funkcí v aplikačních předmětech (fyzika, elektrotechnika,…), ale i pro samotnou matematiku.

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **OMEZENÁ ZDOLA** NA MNOŽINĚ $M \subset D(f)$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO d TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $x \in M$ PLATÍ: $f(x) \ge d$.

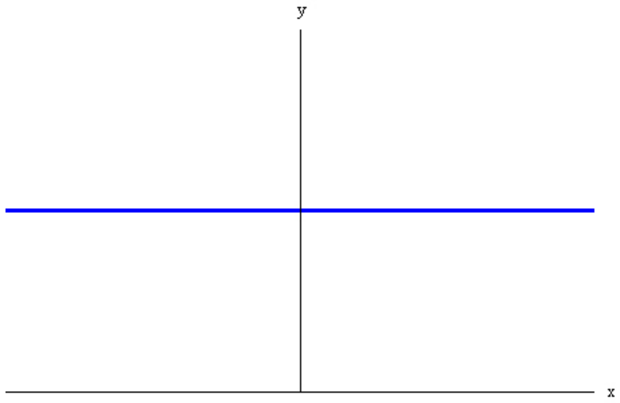
Funkce omezená zdola „neuteče“ se svými funkčními hodnotami do $-\infty$.

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **OMEZENÁ SHORA** NA MNOŽINĚ $M \subset D(f)$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO h TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $x \in M$ PLATÍ: $f(x) \le h$.

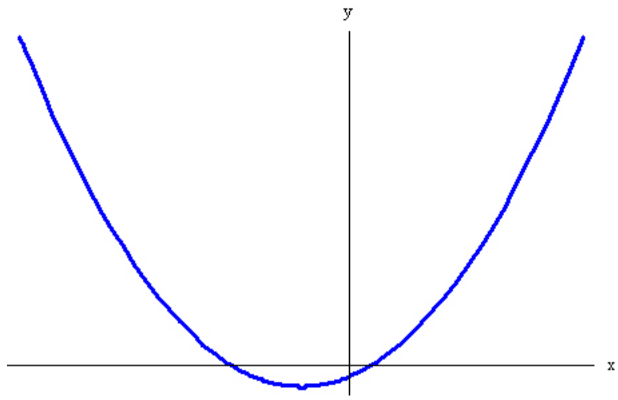
Funkce omezená shora „neuteče" se svými funkčními hodnotami do ∞.

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **OMEZENÁ** NA MNOŽINĚ $M \subset D(f)$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ JE OMEZENÁ ZDOLA I SHORA.

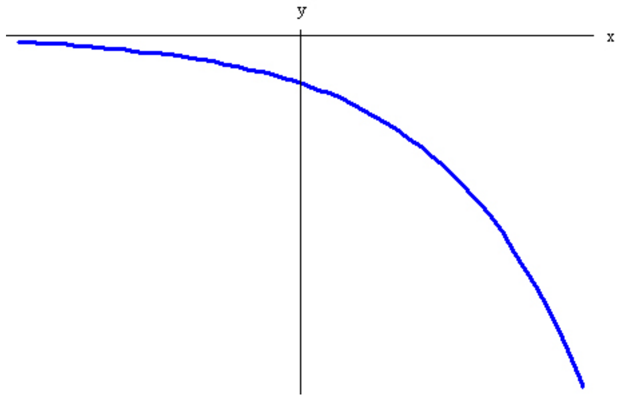
Omezená funkce je funkce, jejíž funkční hodnoty se nacházejí pouze v určitém **KONEČNÉM** intervalu (jsou ohraničené dvěma mantinely).



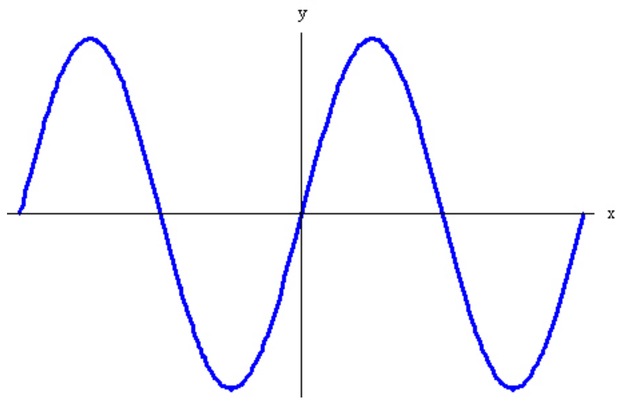
obr. 5



obr. 6



obr. 7



obr. 8

Mezi omezené funkce (resp. funkce omezené shora či zdola) patří např.:

- funkce $l: y = x^2 + 4x - 5$, která je omezená zdola (viz obr. 6),
- funkce $m: y = e^x$ (kde $e = 2,71828...$ je Eulerovo číslo), která je omezená shora (viz obr. 7),
- funkce $n: y = \sin x$, která je omezená (viz obr. 8).

Pokud bude mít funkce aspoň jednu z následujících vlastností, usnadní se vyšetřování takové funkce. Navíc jsou tyto vlastnosti funkce v řadě případů důležité i pro aplikační předměty (fyzika, elektronika, zvuková technika, …).

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **SUDÁ** PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ PLATÍ: $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy *y*.

D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **LICHÁ** PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ PLATÍ: $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadnic.

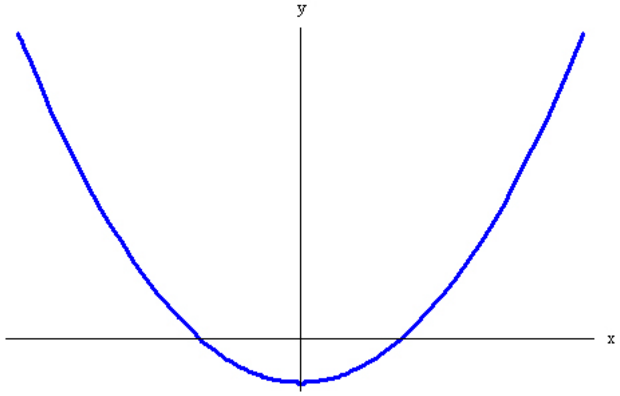
Většina funkcí není asi sudá, ani lichá. Mezi funkce, které jednu z uvedených vlastností mají, patří např.:

- funkce $p: y = x^2 - 2$, která je sudá (viz obr. 9),
- funkce $q: y = x^3$, která je lichá (viz obr. 10).

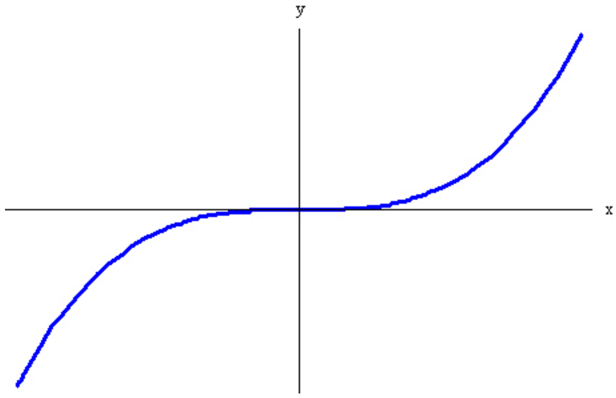
D: FUNKCE f SE NAZÝVÁ **PERIODICKÁ** S PERIODOU p, EXISTUJE-LI TAKOVÉ NEJMENŠÍ ČÍSLO $p > 0$, ŽE PLATÍ:
1. JE-LI FUNKCE DEFINOVÁNA V BODĚ x_0, JE DEFINOVÁNA I V BODECH $x_k = x_0 + kp$ PRO VŠECHNA CELÁ k.
2. PRO VŠECHNA $x \in D(f)$ PLATÍ $f(x) = f(x + kp)$.

Na grafu funkce tedy nepoznáme, pokud se posuneme o *p* vlevo nebo vpravo. Tvar funkce, funkční hodnoty, monotonie, … - vše bude vypadat stejně, jako v bodě, který je od daného bodu vzdálen o *p* (a jeho celé násobky).

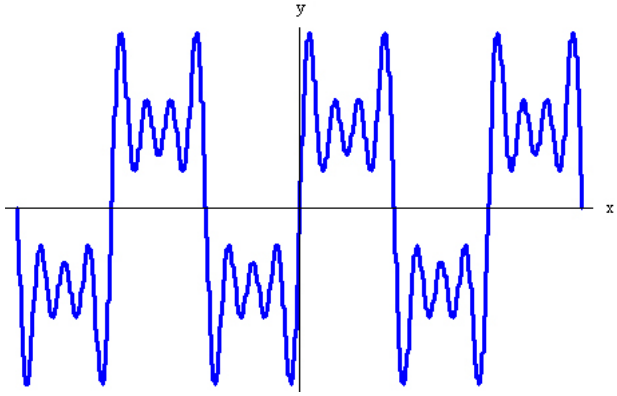
Mezi periodické funkce patří např. funkce $f: y = \sin x + 0,5\sin 3x + 0,5\sin 5x + 0,5\sin 7x$ (viz obr. 11).



obr. 9



obr. 10



obr. 11