Vyšetřování průběhu funkce

V tomto textu je vzorově vyřešeno několik úloh na vyšetření průběhu funkce. Při řešení úlohy jsou využity základní vlastnosti diferenciálního počtu.

1. Řešený příklad s komentářem

Je dána funkce $f(x): y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$. Vyšetřete její průběh a nakreslete pěkně její graf.

Při řešení zadané úlohy budeme postupovat podle doporučeného postupu a přitom využívat poznatky diferenciálního počtu.

Je vhodné postupovat v uvedeném pořadí a postupně určit:

1. definiční obor funkce
2. sudost, lichost, periodičnost funkce - má-li totiž funkce jednu z uvedených vlastností, zjednoduší to vyšetřování jejího průběhu
3. průsečíky s osami kartézského systému souřadnic
4. limity v krajních bodech definičního oboru
5. první derivaci funkce, stacionární body a body, v nichž není první derivace definována
6. intervaly monotónnosti a lokální extrémy
7. druhou derivaci funkce, nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace funkce definována
8. intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body
9. asymptoty funkce
10. obor hodnot
11. graf funkce

1.1. ***Definiční obor***

Zadaná funkce je polynomická, a proto je jejím definičním oborem množina všech reálných čísel, tj. $D(f) = \mathbb{R}$.

1.2. ***Sudost nebo lichost funkce***

Definiční obor je symetrický vzhledem k nule, a proto zadaná funkce může být jak lichá, tak i sudá (a nebo nemusí mít žádnou z uvedených vlastností). Je nutné ještě ověřit, jaká je funkční hodnota funkce *f* v bodě $-x$ ve srovnání s funkční hodnotou v bodě *x*. Bod *x* i $-x$ přitom patří do definičního oboru zadané funkce.

Pro funkční hodnotu v bodě $-x$ dostáváme: $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) + 2 = -x^3 - 6x^2 - 9x + 2$. Tento výraz přitom není shodný ani se zadaným předpisem funkce *f*, ani k němu není opačný. Pro zadaná funkce *f* není ani sudá ani lichá.

Pokud by nastala jedna z možností, další řešení úlohy by se zjednodušilo. Bylo by možné vyšetřit průběh funkce např. na podmnožině kladných čísel a potom získané výsledky zobrazit i na podmnožinu záporných čísel:

1. u sudé funkce pomocí osové souměrnosti, jejíž osa souměrnosti je osa y
2. u liché funkce pomocí středové souměrnosti, jejíž střed souměrnosti je bod $[0; 0]$

1.3. ***Průsečíky s osami kartézského systému souřadnic***

Znalost průsečíků s osami kartézského systému je jednou z pomůcek pro snadnější sestrojení grafu zadané funkce. Nicméně jejich znalost není nezbytná. V případě, že rovnice, jejíž sestavení je nutné pro hledání průsečíků s osou *x*, není jednoduše řešitelná (tj. jedná-li se např. o polynomickou funkci stupně vyššího než tři, složitou logaritmickou rovnici, …), průsečíky s osou *x* neurčujeme. Na správné vyřešení úlohy nebude mít absence průsečíků významný vliv.

x-ovou souřadnici průsečíků $P_x = [x_P; 0]$ s osou x získáme řešením rovnice $f(x_P) = 0$, což v případě zadané funkce vede na kubickou rovnici $x_P^3 - 6x_P^2 + 9x_P + 2 = 0$. Řešení této rovnice není možné snadno určit, proto průsečíky s osou x určovat nebudeme.

Určit y-ovou souřadnici průsečíku $P_y = [0; y_P]$ s osou y je výrazně jednodušší. Platí: $y_P = f(0)$. V případě zadané funkce dostáváme $y_P = f(0) = 0^3 - 6.0^2 + 9.0 + 2 = 2$.

1.4. Limity v krajních bodech definičního oboru

Limity v krajních bodech definičního oboru pomáhají určit chování funkce v blízkosti bodů, v nichž není možné zjistit funkční hodnotu přímým dosazením. Přitom je pro správné vykreslení grafu funkce důležité vědět, jak v okolí těchto bodů vyšetřovaná funkce vypadá.

V případě zadané funkce jsou krajními body definičního oboru dva body: ∞ a $-\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 6x^2 + 9x + 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\right) = -\infty$$

1.5. První derivace funkce

První derivace f' zadané funkce f je mocným nástrojem pro určení:

1. stacionárních bodů - body „podezřelé z extrému“; stacionární body jsou kořeny rovnice $f'(x) = 0$, z nichž lze určit ty, které jsou lokálními extrémy, pomocí druhé derivace funkce (viz odstavec 1.7) nebo pomocí intervalů monotónnosti (viz odstavec 1.6)
2. bodů, v nichž není derivace definovaná - tyto body určíme na základě definičního oboru funkce f' (tj. funkce, která je první derivací zadané funkce f)

Stacionární body hledáme tak, že řešíme rovnici $f'(x) = 0$, tj. hledáme body, v nichž je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x. Derivace funkce totiž udává směrnici tečny v daném bodě. Je-li tečna sestrojená v daném bodě rovnoběžná s osou x, má nulovou směrnici. **V TAKOVÉM BODĚ ALE NEMUSÍ BÝT EXTRÉM!!!** (Viz graf funkce $y = x^3$ v bodě 0: první derivace je v něm nulová, ale přitom v něm není extrém!!!)

Určitě ale platí, že směrnice tečny sestrojená v bodě extrému je nulová!

Pro zadanou funkci je: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Stacionární body určíme řešením rovnice: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

Body, v nichž by mohl být extrém jsou tedy body $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Vzhledem k tomu, že definiční obor derivace je množina všech reálných čísel, je derivace funkce definovaná ve všech bodech definičního oboru funkce.

1.6. Intervaly monotónnosti a lokální extrémy

Určení intervalů, na nichž je funkce rostoucí nebo klesající, lze provést na základě první derivace funkce. Platí totiž:

1. je-li $f'(x) > 0$ pro všechna x z určitého intervalu, je funkce f na tomto intervalu rostoucí
2. je-li $f'(x) < 0$ pro všechna x z určitého intervalu, je funkce f na tomto intervalu klesající

Je-li zadaná funkce spojitá, lze určit pouze interval, na kterém je funkce rostoucí. Interval, na kterém je funkce klesající, je doplňkem vypočteného intervalu v definičním oboru funkce.

Poznámka: *Předchozí věta není formulována zcela přesně, protože z intervalů jsou vynechány jejich krajní body, v nichž funkce přechází z klesající na rostoucí či naopak.*

Interval, na kterém je zadaná funkce rostoucí určíme (s využitím výpočtů v odstavci 1.5) takto:

$$f'(x) > 0$$

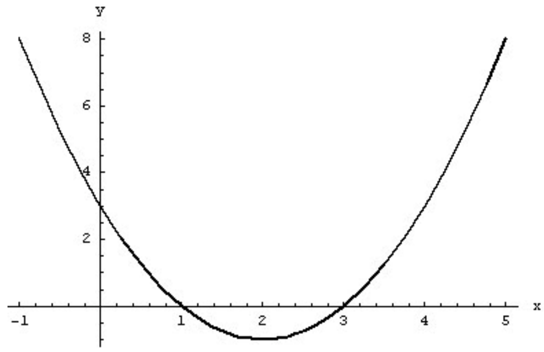
$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$(x-1)(x-3) > 0$$

Nejrychleji lze tuto nerovnici vyřešit graficky s využitím obr. 1. Z něj je patrné, že funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty; 1)$ a na intervalu $(3; \infty)$.

Vzhledem k tomu, že funkce f je spojitá ve svém definičním oboru, plyne z předchozího, že:

1. f je klesající na intervalu $(1; 3)$
2. f má v bodě $[1; 6]$ lokální maximum a v bodě $[3; 2]$ lokální minimum



obr. 1

1.7. Druhá derivace funkce

Pomocí druhé derivace f'' funkce f lze určit:

1. body, v nichž je druhá derivace nulová - body, které „by mohly být inflexními", tj. body, které by mohly vymezovat intervaly, na kterých je funkce konvexní resp. konkávní (viz odstavec 1.8)
2. body, v nichž není druhá derivace funkce definovaná - tyto body určíme na základě definičního oboru funkce f'', tj. funkce, která je druhou derivací zadané funkce f

Body, které by mohly být inflexními body, najdeme řešením rovnice $f''(x) = 0$. I zde (stejně jako v odstavci 1.5) je nutné postupovat opatrně. **BOD, V NĚMŽ JE DRUHÁ DERIVACE FUNKCE NULOVÁ, NEMUSÍ BÝT INFLEXNÍM BODEM!!!** (Viz např. funkce $y = x^4$ v bodě 0: druhá derivace je v tomto bodě nulová, ale tento bod není rozhodně inflexním - jedná se „pouze" o lokální minimum!)

Určitě ale platí, že druhá derivace v inflexním bodě je nulová!

Druhá derivace zadané funkce (tj. první derivace první derivace funkce) je: $f''(x) = 6x - 12$.

Definičním oborem druhé derivace jsou všechna reálná čísla, a proto druhá derivace zadané funkce existuje ve všech bodech svého definičního oboru.

Nulové body druhé derivace určíme řešením rovnice: $f''(x) = 0$

$$6x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

V bodě $x = 2$ by tedy mohl být inflexní bod. Jestli tam skutečně je nebo není, zjistíme v odstavci 1.8.

1.8. Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Určit intervaly, na kterých je funkce konkávní resp. konvexní, lze pomocí druhé derivace funkce. Platí totiž:

1. je-li $f''(x) > 0$ pro všechna x z určitého intervalu, je funkce f na tomto intervalu konvexní
2. je-li $f''(x) < 0$ pro všechna x z určitého intervalu, je funkce f na tomto intervalu konkávní

Je-li funkce f spojitá ve svém definičním oboru, lze určit pouze interval, na němž je funkce konvexní. Interval, na němž je funkce konkávní, tvoří doplněk vypočteného intervalu v množině reálných čísel.

Poznámka: Předchozí věta není formulována zcela přesně, protože z intervalů jsou vynechány jejich krajní body, v nichž funkce přechází z konvexní na konkávní či naopak.

Interval, na kterém je zadaná funkce konvexní, lze určit (s využitím výpočtu z odstavce 1.7) takto:

$$f''(x) > 0$$
$$6x - 12 > 0$$
$$x > 2$$

Funkce f je tedy konvexní na intervalu $(2; \infty)$. Vzhledem k tomu, že funkce f je spojitá na svém definičním oboru, je na intervalu $(-\infty; 2)$ konkávní. Proto je v bodě $x = 2$ inflexní bod a funkce v něm přechází z konkávní na konvexní.

1.9. Asymptoty grafu funkce

Asymptoty funkce jsou přímky, k nimž se funkce „přimyká“ nebo které ji v okolí daného bodu nejlépe „nahrazují“.

Existují dva typy asymptot:

1. asymptoty se směrnicí - jsou přímky, které mají rovnici $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$); jedná se o asymptoty funkce v nevlastních bodech (tj. pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$)
2. asymptoty bez směrnice - jsou přímky ve tvaru $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$); jde o asymptoty funkce v takových vlastních bodech *c*, v nichž není funkce definována (např. body, v nichž je jmenovatel zlomku z definice funkce nulový, …); při hledání rovnic těchto asymptot je nutné vyšetřit jednostranné limity v bodech, v nichž není daná funkce definována

ASYMPTOTY SE SMĚRNICÍ NESUPLUJÍ VÝPOČET LIMIT V KRAJNÍCH BODECH DEFINIČNÍHO OBORU!!!

Limita v krajních bodech definičního oboru určí, **K JAKÉ** hodnotě se blíží funkční hodnoty v těchto bodech, zatímco asymptota určuje **JAK** se k této hodnotě funkce blíží.

Koeficienty *a* a *b* v rovnici asymptoty se směrnicí se určí pomocí **vlastních** limit takto: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right)$.

Náznak „odvození“ lze provést pomocí intuitivní představy, že asymptota má nahradit v blízkosti nevlastních bodů graf funkce *f*. Proto musí platit

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (ax + b)\right] = 0.$$

Pokud platí tento vztah, tím spíše pak platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = 0.$$

Tento vztah lze dále upravit:

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - a - 0$$

a odtud

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Podobnými úpravami lze získat ze vztahu $\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ vztah pro výpočet koeficientu *b*:

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right).$$

Analogicky lze postupovat v případě asymptoty pro $x\to-\infty$.

Pro koeficient *a* asymptoty zadané funkce *f* v bodě $x\to\infty$ lze tedy psát: $a = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+9x+2}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)\right)=\infty$. Asymptota funkce *f* pro $x\to\infty$ neexistuje.

Stejný výsledek získáme pro druhý nevlastní bod, tj. pro $x\to-\infty$.

1.10. Obor hodnot

Obor hodnot získáme na základě znalostí:

1. limit v krajních bodech definičního oboru
2. lokálních extrémů funkce
3. asymptot funkce

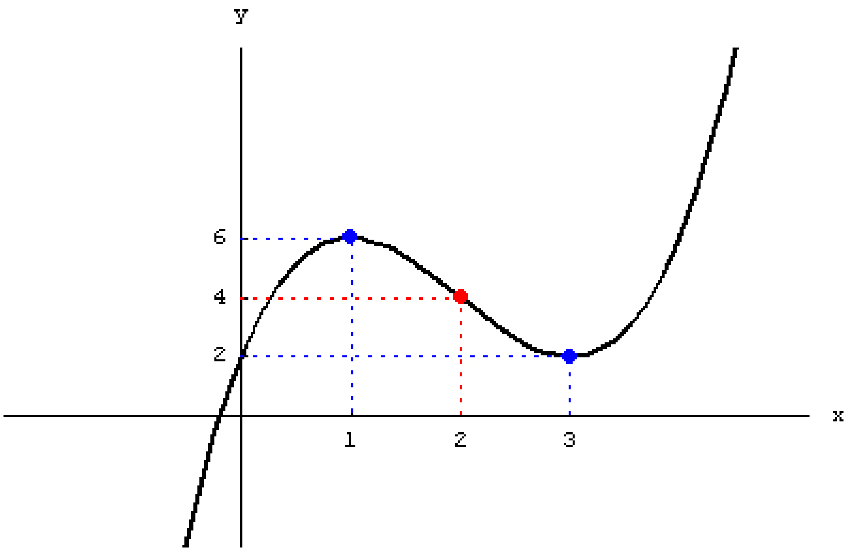
Pro zadanou funkci je $H(f)=\mathbb{R}$.

1.11. Graf funkce

Na základě postupných výpočtů v odstavcích 1.1 až 1.10 lze nakreslit graf funkce. Při jeho sestrojování je nutné vzít v úvahu tyto vlastnosti funkce:

1. intervaly, na nichž je funkce rostoucí resp. klesající
2. intervaly, na nichž je funkce konvexní resp. konkávní
3. průsečíky grafu funkce s osami kartézského systému souřadnic
4. body, v nichž má funkce lokální extrémy a jejich funkční hodnoty
5. asymptoty grafu funkce

Graf zadané funkce je na obr. 2.



obr. 2

2. Řešené příklady bez komentáře

2.1. $g(x): y = \ln\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

Je dána funkce $g(x): y = \ln\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$. Vyšetřete její průběh a nakreslete pěkně její graf.

Při řešení budeme vycházet z postupu uvedeného v odstavci 1. , ale už omezíme komentář k jednotlivým krokům řešení.

Před samotným řešením zadanou funkci upravíme na tvar, který bude pro následné výpočty přijatelnější: $y = \ln\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2}$.

Definiční obor

$\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ a zároveň $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} > 0$; výsledná podmínka proto je $\frac{x+2}{x-2} > 0$, z níž vyplývá $D(g) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

Sudost nebo lichost

$g(-x) = \frac{1}{2}\ln\frac{-x+2}{-x-2} = \frac{1}{2}\ln\frac{-(x-2)}{-(x+2)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-2}{x+2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2} = -g(x)$ - funkce g je tedy lichá (definiční obor je symetrický podle bodu 0); stačí tedy vyšetřovat funkci jen na intervalu $(2; \infty)$

Průsečíky s osami

s osou x:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x_P+2}{x_P-2} = 0$$

$$\frac{x_P+2}{x_P-2} = 1$$

$$x_P + 2 = x_P - 2$$

$$2 \neq -2$$

Průsečík s osou x tedy není.

s osou y: neexistuje, protože za x nelze dosadit 0 - nepatří do definičního oboru funkce g

Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1} = 0$$

První derivace a stacionární body

$$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{x+2}{x-2}}\frac{1(x-2)-1(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x-2}{x+2}\frac{-4}{(x-2)^2} = -\frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

derivace není definovaná v bodech -2 a 2, které ale stejně nepatří do definičního oboru

stacionární body neexistují ($g'(x)$ nemůže být nikdy rovna nule) - neexistují tedy ani lokální extrémy funkce

Intervaly monotónnosti

$g'(x) = -\frac{2}{(x+2)(x-2)} = -\frac{2}{x^2-4}$, tj. pro všechna x z definičního obou je vždy záporná (jmenovatel zlomku je vždy kladný) - funkce g je tedy na celém svém definičním oboru klesající

Proto neexistují ani lokální extrémy funkce.

Druhá derivace

nejdříve si upravíme první derivaci: $g'(x) = -\frac{2}{x^2-4} = -2\left(x^2-4\right)^{-1}$

$g''(x) = -2.(-1).\left(x^2-4\right)^{-2}.2x = \frac{4x}{\left(x^2-4\right)^2}$

$g''(x) = 0$ pro $x = 0$, ale tento bod nepatří do definičního oboru funkce; inflexní body tedy neexistují

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

$g''(x) > 0$ pro $x > 0$; vzhledem k definičnímu oboru funkce g je funkce g konvexní na intervalu $(2;\infty)$

Asymptoty funkce

asymptota bez směrnice existuje v bodě -2 a 2: $x = -2$ a $x = 2$

asymptota se směrnicí: $$\left.\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}}{x} = 0 \\ b &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x-2} - 0.x\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\ln\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = 0$$

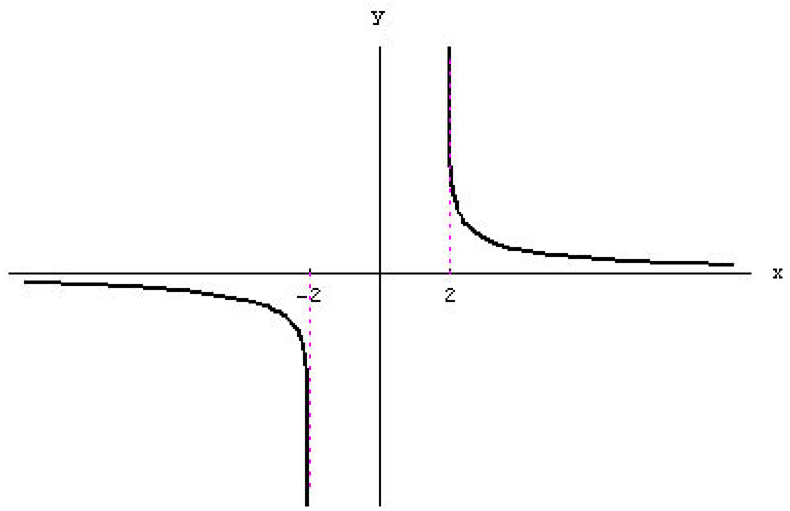
pro $x \to -\infty$ získáme tutéž asymptotu

Obor hodnot

$H(g) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Graf funkce

Vyšetření vlastností funkce bylo provedeno pouze na intervalu $(2;\infty)$, na celý definiční obor rozšíříme vlastnosti funkce tak, že část grafu z intervalu $(2;\infty)$ zobrazíme souměrně podle počátku kartézské soustavy souřadnic (funkce g je lichá). Graf je zobrazen na obr. 3.



obr. 3

2.2. $h(x): y = \frac{8x^3+4}{x^2}$

Je dána funkce $h(x): y = \frac{8x^3+4}{x^2}$. Vyšetřete její průběh a nakreslete pěkně její graf.

Při řešení budeme vycházet z postupu uvedeného v odstavci 1. , ale už omezíme komentář k jednotlivým krokům řešení.

Definiční obor

$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sudost nebo lichost

$h(-x) = \frac{8(-x)^3+4}{(-x)^2} = \frac{-8x^3+4}{x^2}$ - funkce h není ani sudá ani lichá

Průsečíky s osami

s osou x:

$$\frac{8x_P^3+4}{x_P^2} = 0$$

$$8x_P^3+4 = 0$$

$$x_P = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

s osou y: neexistuje, protože za x nelze dosadit 0 - nepatří do definičního oboru funkce h

Limity v krajních bodech definičního oboru

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3+4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x + \frac{4}{x^2}}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x + \frac{4}{x^2}}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{8x^3+4}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \frac{8x^3+4}{x^2} = \infty$$

První derivace a stacionární body

$$h'(x) = \frac{8x^3+4}{x^2} = \frac{24x^2.x^2 - (8x^3+4).2x}{x^4} = \frac{24x^3-16x^3-8}{x^3} = \frac{8x^3-8}{x^3}$$

derivace není definovaná v bodě 0, který nepatří do definičního oboru funkce h

stacionární body:

$$h'(x) = 0$$

$$\frac{8x^3-8}{x^3} = 0$$

$$8x^3-8 = 0$$

$$x = 1$$

V bodě $x = 1$ by tedy mohl být lokální extrém.

Intervaly monotónnosti

funkce je rostoucí:

$$h'(x) > 0$$

$$\frac{8x^3-8}{x^3} > 0$$

$$\frac{x^3-1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow (x > 1 \wedge x > 0) \vee (x < 1 \wedge x < 0)$$

Funkce h je tedy rostoucí pro všechna x z intervalu $(-\infty; 0)$ a pro všechna x z intervalu $(1; \infty)$.

Klesající je na intervalu $(0; 1)$ (protože je na svém definičním oboru spojitá).

V bodě $x = 1$ je podle výše uvedeného lokální minimum; $[1; 12]$

Druhá derivace

$$h''(x) = \frac{24x^2.x^3 - 3x^2.(8x^3 - 8)}{x^6} = \frac{24x^3 - 24x^3 + 24}{x^4} = \frac{24}{x^4}$$

Druhá derivace funkce je definovaná pro všechna x z definičního oboru funkce h a je pro ně kladná. Inflexní body proto neexistují.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

Vzhledem k tomu, že je $h''(x) > 0$ pro všechna x z definičního oboru, je funkce h na celém definičním oboru konvexní.

Asymptoty funkce

asymptota bez směrnice existuje v bodě 0: $x = 0$

asymptota se směrnicí: $$\left.\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{8x^3+4}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3+4}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8 + \dfrac{4}{x^3}}{1} = 8 \\ b = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8x^3+4}{x^2} - 8.x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3 + 4 - 8x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 8x$$

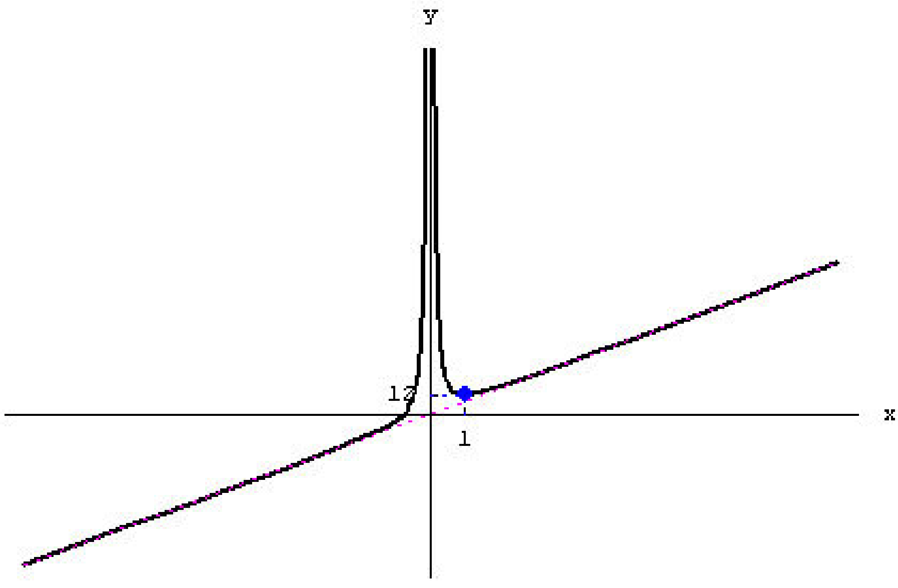
pro $x \to -\infty$ získáme tutéž asymptotu

Obor hodnot

$H(h) = \mathbb{R}$

Graf funkce

Graf funkce je zobrazen na obr. 4.



obr. 4