Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Posloupnosti

Jaroslav Reichl

OBSAH

Text je psán pomocí několika zvláštních stylů:

Běžný text, odvozování vztahů, výsledné vztahy, …

DEFINICE DŮLEŽITÝCH MATEMATICKÝCH POJMŮ, ZNĚNÍ MATEMATICKÝCH VĚT.

Komentář, který probíranou látku rozšiřuje, upřesňuje či doplňuje.

Zjednodušená tvrzení pro lepší pochopení, která jsou tedy z matematického hlediska nepřesná, ale která mohou napomoci k lepšímu pochopení probírané látky.

Text v některých částech překračuje běžně probíranou středoškolskou látku z matematiky. Tyto rozšiřující poznatky mohou přispět k hlubšímu pochopení látky těm žákům, kteří budou matematiku studovat i na vysoké škole (a to nejen technického zaměření).

Text neprošel odbornou ani jazykovou korekturou. Narazíte-li na chyby, prosím na jejich upozornění. Předem děkuji.

Jaroslav Reichl

1. POSLOUPNOSTI A JEJICH VLASTNOSTI

Posloupnosti jsou speciálním případem funkcí, a proto budeme často při vyšetřování vlastností posloupností využívat základních znalostí funkcí (monotonie, limity, …).

1.1 Pojem posloupnost

1.1.1 Připomenutí funkcí

Vzhledem k tomu, že posloupnost je zvláštním případem funkce, bylo by dobré připomenout definici funkce.

FUNKCE f JE ZOBRAZENÍ LIBOVOLNÉ NEPRÁZDNÉ MNOŽINY A DO MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL.

Obecně funkcí tedy může být např. přiřazení, které danému člověku přiřadí jeho výšku. Člověka vybíráme z určité množiny lidí (ve třídě, ve městě, …) a výška je určena obecně reálným číslem. Takže to funkce je.

Speciálním případem pak je reálná funkce (jedné reálné proměnné):

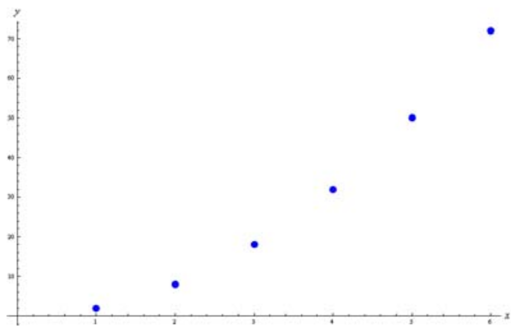
REÁLNÁ FUNKCE (JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ) JE ZOBRAZENÍ Z PODMNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL DO MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL.

V případě reálné funkce jedné reálné proměnné již není možné vybírat např. z množiny lidí, předmětů, … Obě množiny (jak ta, z níž zobrazujeme, tak ta, do které zobrazujeme) musí být podmnožinou množiny reálných čísel.

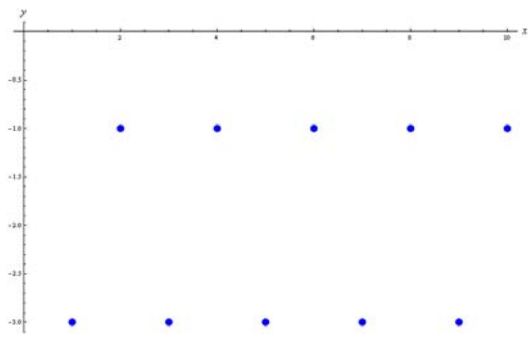
Nyní zkusíme vykreslit několik příkladů funkcí, na kterých si ukážeme, jak se liší funkce od posloupnosti.

Ilustrační příklad: Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = 2x^2$, kde $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Řešení: Graf, který je řešením zadané úlohy, je zobrazen na obr. 1. Graf připomíná graf funkce $y = 2x^2$, ale v tomto případě je dána množina, z níž zobrazujeme, pouze výčtem prvků. Proto grafem nebude spojitá křivka, jak jsme byli zvyklí v případě funkcí, ale pouze jednotlivé body.



obr. 1



obr. 2

Příklad: Je dána funkce $h: y = -2 + (-1)^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Zobrazte její body do soustavy souřadnic.

Řešení: Graf funkce h je zobrazen na obr. 2. Opět jsou výsledkem jednotlivé body a ne spojitá křivka. Navíc v tomto případě vykazují body grafu funkce jistou periodicitu. I takové funkce (resp. posloupnosti) se v matematice občas vyskytnou.

1.1.2 Definice posloupnosti

Obě funkce zmíněné v odstavci 1.1.1 mají jedno společné: jejich definičním oborem je množina přirozených čísel nebo její část. Takové funkce se nazývají **posloupnosti**.

KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA $\mathbb{N}$ VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL, SE NAZÝVÁ NEKONEČNÁ POSLOUPNOST.

Skutečně jedinou odlišností funkce a posloupnosti je definiční obor. U funkcí je definičním oborem množina reálných čísel (nebo její část - např. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^+$, …) a jejím grafem je spojitá křivka. U posloupností je definičním obrem množina přirozených čísel resp. její část a graf tvoří jednotlivé body.

KAŽDÁ FUNKCE, JEJÍMŽ DEFINIČNÍM OBOREM JE MNOŽINA VŠECH PŘIROZENÝCH ČÍSEL $n \leq n_0$, KDE n_0 JE PEVNĚ DANÉ ČÍSLO Z MNOŽIY PŘIROZENÝCH ČÍSEL $\mathbb{N}$, SE NAZÝVÁ KONEČNÁ POSLOUPNOST.

Konečná posloupnost je tedy definovaná pouze pro část přirozených čísel. Takovou posloupnost je pak možné vyjádřit výčtem prvků (viz podrobněji v odstavci 1.1.3), a to v případě, že daná posloupnost má 5, 10 nebo 1000 členů. Principiálně je tedy možné vypsat všechny její členy. To u nekonečné posloupnosti možné není!

Bude-li ze souvislosti zřejmé, jestli se pracuje s konečnou resp. nekonečnou posloupností, stačí mluvit jen o posloupnosti.

Skutečnost, že funkční hodnota např. funkce $f: y = 2x^2$ v bodě 2 je rovna 8, se zapisuje ve tvaru $f(2) = 8$. Vzhledem k tomu, že předpis $f: y = 2x^2$ (definovaný v odstavci 1.1.1) ovšem neurčuje funkci, ale (konečnou) posloupnost (definičním oborem je totiž množina, která tvoří část množiny přirozených čísel), používá se jiný způsob zápisu: $f_2 = 8$ a čte se „druhý člen posloupnosti *f* je roven 8“.

Další rozdíl oproti funkcím je ve způsobu zápisu: tak např. místo zápisu $h: y = -2 + (-1)^{\mathrm{n}}$ se používá označení $\left(-2 + (-1)^{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ resp. $(h_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$; $h_{\mathrm{n}} = -2 + (-1)^{\mathrm{n}}$. Tyto zápisy čteme: „posloupnost $-2 + (-1)^{\mathrm{n}}$ pro *n* od jedné do nekonečna“ resp. „posloupnost h_{n}, kde *n* probíhá od jedné do nekonečna, a h_{n} se rovná $-2 + (-1)^{\mathrm{n}}$“. Obdobným způsobem je možné vyjádřit i konečnou posloupnost.

V tom případě by se místo znaku pro nekonečno v horním indexu objevilo konkrétní maximální n_0, pro které je posloupnost definována.

Analogicky je možné definovat posloupnost pro přirozená čísla začínající až od určitého čísla, které je větší než jedna.

V právě uvedených příkladech říkáme, že posloupnost je určena vzorcem pro *n*-tý člen.

Nyní uvedeme některé příklady posloupností, aby bylo zřejmé, že definice posloupnosti může být i komplikovanější:

1. $(a_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = \left((-2)^{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$;
2. $(b_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$;
3. $(c_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, kde $\begin{array}{ll} c_{\mathrm{n}} = n & \text{pro } n \text{ liché} \\ c_{\mathrm{n}} = n-1 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{array}$;
4. $(d_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, kde $\begin{array}{ll} d_{\mathrm{n}} = 3 & n \in \{1, 2\} \\ d_{\mathrm{n}} = -3 & n \in \{3, 4\} \\ d_{\mathrm{n}} = -1{,}5n & n \geq 5 \end{array}$;
5. …

1.1.3 Způsoby zadání posloupností

Existuje několik způsobů zadání posloupnosti:

1. vzorcem pro *n*-tý člen - viz konec odstavce 1.1.2;
2. tabulka uspořádaných hodnot posloupnosti - tento způsob zadání posloupnosti lze použít jen pro konečné posloupnosti;
3. graf uspořádaných hodnot posloupnosti (viz např. obr. 1) - opět je možné tento způsob zadání posloupnosti použít jen pro konečné posloupnosti;
4. rekurentní určení posloupnosti - viz odstavec 1.2.

Mezi jednotlivými způsoby zadání posloupnosti lze přecházet a je tedy možné jednu a tutéž posloupnost vyjádřit několikerým způsobem.

S rekurentním vyjádřením bývá občas problém a není možné jej v některých případech na středoškolské úrovni nahradit vyjádřením pro *n*-tý člen. Přesto je tento způsob zadání posloupnosti pro řadu (většinou speciálních) posloupností důležitý.

1.2 Rekurentní určení posloupnosti

Rekurentně určit posloupnost, znamená uvést prvních několik jejích členů a potom *n*-tý (resp. (*n* + 1)-ní, (*n* + 2)-hý, …) člen vyjádřit pomocí vzorce, v němž vystupují členy předcházející. Např.:

1. $a_1 = 2$, $a_{\mathrm{n}+1} = -3a_{\mathrm{n}} + 1$;

To tedy znamená, že a_2 určíme takto: $a_2 = a_{1+1} = -3a_1 + 1 = -3.2 + 1 = -5$. Pro a_3 bude platit $a_3 = a_{2+1} = -3a_2 + 1 = -3.(-5) + 1 = 16$, … Není možné tedy určit rovnou např. 150tý člen posloupnosti. Abychom tento člen určili, musíme znát všech 149 předcházejících členů.

2. $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_{n+2} = b_n - 2b_{n+1}$;
3. $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -1$, $c_{n+3} = 2(c_{n+2})^{n+2} + c_{n+1}$;
4. …

Některé rekurentní posloupnosti je možné vyjádřit vztahem pro *n*-tý člen, ale ne všechny. Opačně, tj. posloupnost danou vztahem pro *n*-tý člen vyjádřit rekurentně, to je možné vždy.

Italský kupec a matematik Leonardo Pisánský (asi 1170 - asi 1250) zvaný Fibonacci (tj. „syn Bonacciův“) uvádí ve své knize *Liber abaci* (z roku 1202) tuto úlohu: Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků zde bude za rok, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První pár králíků umístěný do ohrady je starý právě jeden měsíc.

Pokusme se tuto úlohu vyřešit.

Po vypočítání počtu králíků v ohradě na konci prvního měsíce (1 pár), druhého měsíce (2 páry), třetího měsíce (3 páry) a čtvrtého měsíce (5 párů), se začíná situace komplikovat a začali bychom se ztrácet v počtu párů králíků. Proto si označíme počet párů králíků na konci (*n* + 1)-ního měsíce a_{n+1}. Na konci (*n* + 2)-ho měsíce bude v ohradě a_{n+1} „starých“ párů králíků (tj. párů králíků z konce (*n* + 1)-ního měsíce), ale kromě toho se ještě narodí tolik párů králíků, kolik jich bylo na konci *n*-tého měsíce. Narodí se tedy a_n párů králíků. Jinak řečeno, pro počet párů na konci (*n* + 2)-ho měsíce dostaneme vztah

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n . \qquad (1)$$

Hledaný počet párů králíků na konci roku proto není možné vypočítat přímo: musíme určit všechny mezikroky, tj. počty párů na konci každého měsíce. Tak postupně dostáváme: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$ a $a_{12} = 233$. Na konci roku tedy bude v ohradě 233 párů králíků.

Uvedená posloupnost, kterou je možné vyjádřit rekurentním vztahem (1), se nazývá **Fibonacciho posloupnost**. Fibonacciho rekurentní posloupnost je možné vyjádřit také vztahem pro *n*-tý člen. Po výpočtu, který zde nebudeme uvádět, neboť vyžaduje hlubší znalosti posloupností, získáme vztah

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \qquad (2)$$

Ačkoliv ve vztahu (2) vystupují iracionální čísla, každý člen posloupnosti popsané tímto vztahem, je celočíselný a odpovídá příslušnému členu Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho posloupnost je důležitá pro teoretickou matematiku, kombinatoriku a další odvětví matematiky.

1.3 Vlastnosti posloupností

Vzhledem k tomu, že posloupnost (jak konečná, tak nekonečná) je speciálním případem funkce (o čemž bylo pojednáno v odstavcích 1.1.1 a 1.1.2), budou i vlastnosti posloupností velmi podobné vlastnostem funkcí.

1.3.1 Monotónnost posloupnosti

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ ROSTOUCÍ, PRÁVĚ TEHDY KDYŽ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$ PLATÍ: JE-LI $r < s$, PAK $a_r < a_s$.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ KLESAJÍCÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$ PLATÍ: JE-LI $r < s$, PAK $a_r > a_s$.

Z právě uvedených definicí vyplývají i věty, které jsou užitečné pro praktické počítání s posloupnostmi.

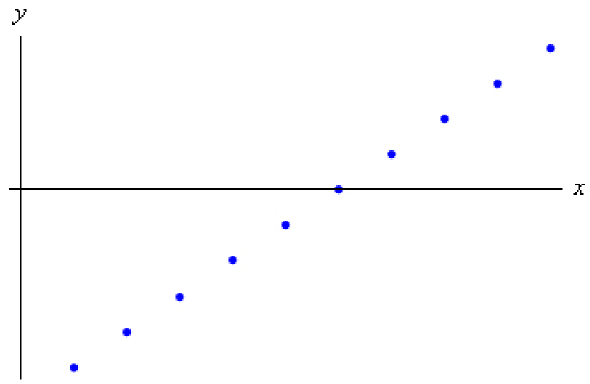
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ JE ROSTOUCÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE

$$a_n < a_{n+1} . \qquad (3)$$

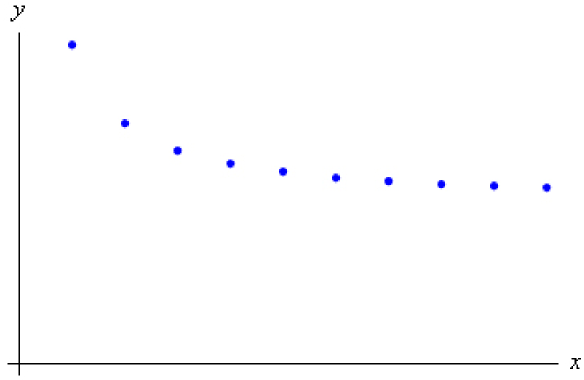
VĚTA: POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ JE KLESAJÍCÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE

$$a_n > a_{n+1} . \qquad (4)$$

Příkladem rostoucí posloupnosti je např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{2} - 3\right)_{n=1}^{\infty}$, jejíž graf je zobrazen na obr. 3. Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, jejíž graf je zobrazen na obr. 4, je příkladem klesající posloupnosti.



obr. 3



obr. 4

Posloupnosti, analogicky jako funkce, mohou obsahovat konstantní úseky. Proto je nutné definici monotonie posloupností rozšířit.

<u>POSLOUPNOST</u> $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ <u>NEKLESAJÍCÍ</u>, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$ PLATÍ: JE-LI $r < s$, PAK $a_r \le a_s$.

<u>POSLOUPNOST</u> $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ <u>NEROSTOUCÍ</u>, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$ PLATÍ: JE-LI $r < s$, PAK $a_r \ge a_s$.

Pro praktické počítání jsou opět užitečnější následující věty.

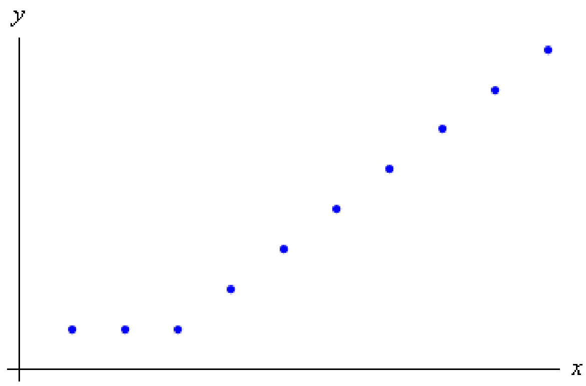
<u>VĚTA:</u> POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ JE NEKLESAJÍCÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE

$$a_n \le a_{n+1}. \tag{5}$$

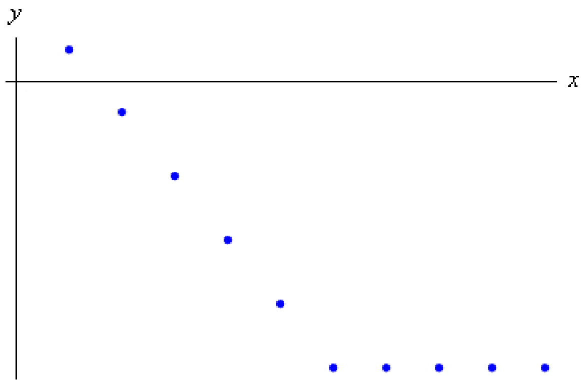
<u>VĚTA:</u> POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ JE NEROSTOUCÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE

$$a_n \ge a_{n+1}. \tag{6}$$

Příkladem neklesající posloupnosti může být např. posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pro $n \in \{1, 2, 3\}$ předpisem $c_n = 1$ a pro $n \ge 4$ předpisem $c_n = n - 2$, jejíž graf je zobrazen na obr. 5. Posloupnost $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná pro $n \le 6$ předpisem $d_n = -2n + 3$ a pro $n \ge 7$ předpisem $c_n = 1$ je příkladem nerostoucí posloupnosti. Její graf je zobrazen na obr. 6.



obr. 5



obr. 6

Neklesající posloupnost tedy může být konstantní nebo rostoucí - nesmí v žádném případě klesat! Analogicky nerostoucí posloupnost nesmí nikdy růst - může být tedy konstantní nebo klesající.

S využitím vztahů (3) až (6) v právě uvedených větách, které vyplývají z uvedených definic, lze rozhodovat o monotonii posloupnosti. Základní úvahu ukážeme na vztahu (3), nicméně tato úvaha platí pro ostatní tři uvedené vztahy. Vztah (3) můžeme přepsat buď do tvaru

$$a_n - a_{n+1} < 0 \tag{7}$$

nebo (pokud budeme mít jistotu, že všechny členy posloupnosti jsou pro libovolné přirozené n nenulové) do tvaru

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1. \tag{8}$$

Budeme tedy porovnávat rozdíl dvou libovolných po sobě jdoucích členů posloupnosti vzhledem k nule nebo podíl dvou libovolných po sobě jdoucích nenulových členů posloupnosti vzhledem k jedničce. Vztahy analogické vztahům (7) a (8) lze odvodit i ze vztahů (4) až (6).

Důležité je, aby členy následovaly po sobě, tj. jejich pořadí se lišilo o jedničku.

Příklad: Zjistěte monotonii posloupnosti $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n^2}{2} - 6\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řešení: Při určování monotonie dané posloupnosti vyjdeme ze vztahu (7), který platí pro rostoucí posloupnost. Do tohoto vztahu dosadíme tedy n-tý a (n + 1)-ní člen zadané posloupnosti. Platí: $a_{\mathrm{n}} = \frac{n^2}{2} - 6$ a $a_{\mathrm{n}+1} = \frac{(n+1)^2}{2} - 6$ (tj. všude, kde se vyskytne v zadání posloupnosti n dosadíme v případě (n + 1)-ního členu n + 1. Můžeme tedy dosadit do vztahu (7): $a_{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{n}+1} = \frac{n^2}{2} - 6 - \left(\frac{(n+1)^2}{2} - 6\right)$. Upravíme tak, abychom mohli rozhodnout o tom, zda uvedený vztah je větší nebo menší než nula. Dostaneme tedy: $a_{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{n}+1} = \frac{n^2}{2} - 6 - \frac{n^2 + 2n + 1}{2} + 6 = \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{2} - n - \frac{1}{2} = -n - \frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že za n dosazujeme přirozená čísla (tj. čísla větší než 0), je zřejmé, že platí $a_{\mathrm{n}} - a_{\mathrm{n}+1} = -n - \frac{1}{2} < 0$. To znamená, že zadaná posloupnost je rostoucí, neboť její dva libovolné po sobě jdoucí členy splňují podmínku (7).

Analogicky můžeme použít vztah (8).

Příklad: Zjistěte monotonii posloupnosti $\left(b_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$.

Řešení: Nyní vyjdeme ze vztahu (8), který platí pro rostoucí posloupnost. Stejně jako v minulém příkladu budeme potřebovat vyjádření n-tého členu a (n + 1)-ního členu zadané posloupnosti. Platí: $b_{\mathrm{n}} = \frac{n+1}{n}$ a $b_{\mathrm{n}+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}$. Po dosazení do vztahu (8) dostaneme $\frac{b_{\mathrm{n}}}{b_{\mathrm{n}+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1+1}{n+1}}$. Tento vztah upravíme tak, abychom mohli rozhodnout o monotonii zadané posloupnosti. Postupnými úpravami tedy získáme $\frac{b_{\mathrm{n}}}{b_{\mathrm{n}+1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n} = 1 + \frac{1}{n^2+2n}$. Vzhledem k tomu, že n vybíráme z množiny přirozených čísel, je zlomek $\frac{1}{n^2+2n}$ vždy kladný, a proto platí $1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$. Dospěli jsme tedy k závěru $\frac{b_{\mathrm{n}}}{b_{\mathrm{n}+1}} = 1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$, tedy $b_{\mathrm{n}} > b_{\mathrm{n}+1}$. To znamená, že zadaná posloupnost je klesající.

Skutečnost, zda použijeme ke zjišťování monotonie posloupnosti vztah (7) nebo vztah (8) závisí na tom, v jakém tvaru je daná posloupnost zadaná. Některé tvary zadání jsou snadnější na úpravu pomocí rozdílu dvou po sobě jdoucích členů, jiné pomocí podílů těchto dvou členů.

Dále také platí následující věty.

VĚTA: KAŽDÁ ROSTOUCÍ POSLOUPNOST JE NEKLESAJÍCÍ A KAŽDÁ KLESAJÍCÍ POSLOUPNOST JE NEROSTOUCÍ.

POSLOUPNOSTI, KTERÉ JSOU NEROSTOUCÍ NEBO NEKLESAJÍCÍ, SE NAZÝVAJÍ MONOTÓNNÍ POSLOUPNOSTI.

1.3.2 Omezenost posloupnosti

Stejně jako u funkcí, i u posloupností můžeme mluvit o jejich omezenosti:

POSLOUPNOST $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ SHORA OMEZENÁ, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO h TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE $a_{\mathrm{n}} \leq h$.

POSLOUPNOST $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ ZDOLA OMEZENÁ, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE REÁLNÉ ČÍSLO d TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$ JE $a_{\mathrm{n}} \geq d$.

POSLOUPNOST $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ OMEZENÁ, PRÁVĚ KDYŽ JE OMEZENÁ SHORA A ZÁROVEŇ JE OMEZENÁ ZDOLA.

Příkladem posloupnosti omezené zdola jsou posloupnosti, jejichž grafy jsou zobrazené na obr. 4, obr. 5 a obr. 6 v odstavci 1.3.1. Příkladem omezené posloupnosti je posloupnost, jejíž graf je zobrazen na obr. 2 v odstavci 1.1.1.

1.4 Matematická indukce

Matematická indukce je jeden z typů důkazů, který se v matematice velmi často používá. Začneme ilustračním příkladem a poté vysvětlíme základní postup při dokazování matematických tvrzení matematickou indukcí.

Ilustrační příklad: Uvažujme posloupnost $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, která je určena rekurentně takto: $a_1 = 1$, $a_{\mathrm{n}+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 .a_{\mathrm{n}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Určete tuto posloupnost vztahem pro *n*-tý člen.

Řešení: Při výpočtu členů této posloupnosti vytvoříme posloupnost: $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$ Na základě toho lze vyslovit domněnku (hypotézu), že pro *n*-tý člen zadané posloupnosti platí $a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{n^2}$. S určitostí to ale tvrdit nemůžeme, protože nejsme schopnosti dosazením do rekurentního vztahu ověřit platnost této domněnky (hypotézy) pro všechna přirozená čísla.

Přirozených čísel je totiž nekonečně mnoho, a proto není ověření pro všechna přirozená čísla možné.

Ze znalosti, že uvedená domněnka je správná např. pro $n = 100$, lze přesto už snadno (podle zadaného rekurentního vztahu) dokázat, že tento vztah platí i pro $n = 101$.

Zkusíme nyní dokázat obecnější tvrzení: platí-li uvedený rekurentní vztah pro libovolné přirozené číslo *k*, pak platí také pro číslo $k+1$. Předpokládáme tedy, že platí $a_{\mathrm{k}} = \frac{1}{k^2}$. Pro člen $a_{\mathrm{k}+1}$ pak podle rekurentního vztahu platí: $a_{\mathrm{k}+1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 .a_{\mathrm{k}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} . \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2}$.

Na základě dosazování jsme zjistili, že vztah $a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{n^2}$ platí pro několik prvních přirozených čísel. Pomocí právě dokázaného tvrzení pro libovolné přirozené číslo *k* už víme, že uvedený vztah platí pro každé další přirozené číslo.

Na právě uvedeném příkladu jsme se seznámili s novým typem důkazu, který se nazývá **matematická indukce** (resp. **důkaz matematickou indukcí**). Matematickou indukcí se dokazují věty typu: „*Pro všechna přirozená čísla n platí vztah (resp. tvrzení)* $V(n)$.“ Přitom $V(n)$ vyjadřuje vlastnost přirozených čísel, která je vyjádřena nějakou rovnicí nebo nerovnicí.

Důkaz matematickou indukcí se skládá ze dvou na sebe navazujících částí (kroků):

1. Důkaz požadovaného tvrzení $V(n)$ pro $n = 1$.
2. Pro každé přirozené číslo *k* dokážeme: Jestliže platí $V(k)$, pak platí $V(k+1)$.

Důkaz matematickou indukcí je podobný dominovým kostkám, které postavíme ve správných vzdálenostech od sebe do řady a poté do první kostky v řadě cvrnkneme. Postupně tak spadnou všechny ostatní. Přesně stejným způsobem „funguje“ důkaz matematickou indukcí: důkaz pro *n* = 1 je ono počáteční cvrnknutí a druhý krok důkazu odpovídá tomu, že když spadne *k*-tá kostka, spadne i (*k* + 1)-ní kostka.

První krok důkazu je naprosto nezbytný, přestože se může zdát, že je pouze formální. Je totiž nutný k tomu, aby bylo možné vyvolat „dominový efekt“, tj. aby byl důkaz proveden pro první krok. O jeho nezbytnosti svědčí následující příklad:

Příklad: Dokažte, že pro všechna přirozená *n* platí: Výraz $V(n) = n^2 + n + 1$ je pro každé *n* sudý.

Řešení: Vynecháním prvního kroku důkazu lze tuto větu matematickou indukcí „dokázat“ snadno: Předpokládejme, že číslo $V(k) = k^2 + k + 1$ je sudé. Pak i číslo $V(k+1) = (k+1)^2 + (k+1) + 1$ je sudé.

Rozpisem čísla $V(k+1)$ dostaneme: $V(k+1) = (k+1)^2 + (k+1) + 1 = k^2 + 2k + 1 + k + 1 + 1$. Přeuspořádáme-li členy součtu dostaneme: $V(k+1) = k^2 + k + 1 + 2k + 1 + 1 = V(k) + 2k + 2 = V(k) + 2(k+1)$. Přičteme-li k sudému číslu ($V(k)$ je dle předpokladu číslo sudé) číslo sudé (číslo $2(k+1)$ je sudé), dostaneme opět číslo sudé.

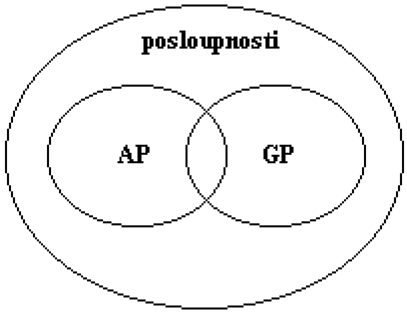
Bohužel, věta uvedená v zadání příkladu neplatí. Ověříme-li první krok matematické indukce, dostaneme: $V(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$. První krok je tedy velmi důležitý! Zde jsme zjistili, že pro *n* = 1 dostáváme číslo liché a tedy se celý následující důkaz provedený matematickou indukcí není platný, neboť jeho první krok ukázal, že tvrzení neplatí pro $n = 1$.

Skutečnost, že čísla ve tvaru $V(n) = n^2 + n + 1$, jsou pro každé přirozené n lichá, lze dokázat např. důkazem přímým.

2. ARITMETICKÉ A GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Aritmetické posloupnosti (viz odstavec 2.1) patří spolu s geometrickými posloupnostmi (viz odstavec 2.2) ke zvláštním případům posloupností, pro které platí jednoduchá početní pravidla. Aritmetické a geometrické posloupnosti umožňují též jednoduché řešení řady praktických úloh (např. z finanční matematiky, …).

Dříve, než začneme tyto posloupnosti vyšetřovat, je třeba si uvědomit, že množina všech posloupností se nedělí na aritmetické posloupnosti (označené ve schématu na obr. 7 jako AP) a geometrické posloupnosti (označené jako GP). Některé posloupnosti nejsou ani aritmetické ani geometrické. Dokonce se mohou vyskytovat posloupnosti, které jsou zároveň jak aritmetické, tak geometrické. Přehledné schéma je na obr. 7.



obr. 7

2.1 Aritmetická posloupnost

2.1.1 Základní vlastnosti aritmetické posloupnosti

S reálnými příklady, které se dají matematicky popsat pomocí aritmetické posloupnosti, se setkáváme i v praxi:

1. velikost rychlosti šíření zvuku ve vzduchu je popsána rovnicí $v = (331 + 0,6t)\ \mathrm{m.s^{-1}}$, kde t je teplota vzduchu udávaná ve stupních Celsia. S rostoucí teplotou se tedy velikost rychlosti zvuku ve vzduchu rovnoměrně zvyšuje.
2. rovnání konzerv v obchodě do „pyramidy“;
3. …

Aritmetická posloupnost je tedy zvláštním případem posloupnosti, v níž se každé dva její po sobě jdoucí členy liší o konstantu.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ <u>ARITMETICKÁ POSLOUPNOST</u>, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE TAKOVÉ REÁLNÉ ČÍSLO d, ŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO n PLATÍ:

$$a_{n+1} = a_n + d. \tag{9}$$

ČÍSLO d SE NAZÝVÁ DIFERENCE ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI.

V aritmetické posloupnosti se tedy každé dva po sobě jdoucí členy liší o stejnou konstantu - o diferenci *d*.

<u>VĚTA:</u> V ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S DIFERENCÍ d PLATÍ PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{10}$$

<u>Důkaz:</u> matematickou indukcí

Tato věta tedy svazuje *n*-tý člen aritmetické posloupnosti s jejím prvním členem.

<u>VĚTA:</u> V ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S DIFERENCÍ d PLATÍ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$:

$$a_r = a_s + (r-s)d. \tag{11}$$

<u>Důkaz:</u> vyplývá z předchozí věty

Vztah (11) je zobecněním vztahu (10). Vztah (10) platí pouze pro první a *n*-tý člen aritmetické posloupnosti, zatímco vztah (11) platí pro libovolné dva členy (dokonce i pro případ *r* = *s*).

V řadě případů je důležité znát součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti. Proto si nyní ukážeme, jak takový součet relativně snadno určit.

<u>VĚTA:</u> PRO SOUČET s_n PRVNÍCH n ČLENŮ ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, TJ. PRO $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ PLATÍ:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{12}$$

Vztah (12) lze dokázat metodou, kterou předvedl (údajně) v první třídě geniální německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), nebo matematickou indukcí. Gaussova metoda vychází ze skutečnosti, že součet $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ prvních n členů aritmetické posloupnosti lze rozepsat s využitím vztahu (10) dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + (a_1 + d) + ... + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \tag{13}$$

a

$$s_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + ... + (a_1 + d) + a_1. \tag{14}$$

Jednu a tu samou posloupnost tedy rozepíšeme jednou „popředu“ a podruhé „odzadu“. Oba součty jsou pochopitelně totožné.

Sečtením těchto vztahů (13) a (14) dostaneme: $2s_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + ... + (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) = n(2a_1 + (n-1)d)$. Dále můžeme tedy psát $2s_n = n(a_1 + a_1 + (n-1)d) = n(a_1 + a_n)$, odkud vyplývá $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, což je hledaný vztah (12).

2.1.2 Užití aritmetické posloupnosti

Jak už bylo uvedeno na začátku odstavce 2.1.1, s aritmetickou posloupností (resp. úlohami, které na aritmetickou posloupnost vedou) je možné se setkat i v praxi. K úspěšnému vyřešení zadané úlohy je třeba převést zadání úlohy do pojmů, které byly vysvětleny v souvislosti s aritmetickou posloupností v odstavci 2.1.1.

2.2 Geometrická posloupnost

2.2.1 Základní vlastnosti geometrické posloupnosti

Příkladem geometrické posloupnosti, s níž je možné se setkat v praxi, je jaderný rozpad radioaktivního nuklidu. To je proces, během kterého se za určitý čas (tzv. poločas přeměny) rozpadne (přemění) přesně polovina jader, která ještě v dané látce zbývají.

Nyní se podíváme na geometrické posloupnosti ovšem obecně.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST, PRÁVĚ KDYŽ EXISTUJE TAKOVÉ REÁLNÉ ČÍSLO q, ŽE PRO KAŽDÉ PŘIROZENÉ ČÍSLO n PLATÍ:

$$a_{n+1} = a_n . q. \tag{15}$$

ČÍSLO q SE NAZÝVÁ KVOCIENT GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI.

Existují speciální případy geometrické posloupnosti:

1. je-li $a_1 = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = 0$;
2. je-li $q = 0$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geq 2$, je $a_n = 0$.

V geometrické posloupnosti (v níž je $a_1 \neq 0$ a $q \neq 0$) je tedy podíl každých dvou po sobě jdoucích členů konstantní a je roven kvocientu *q*.

VĚTA: **V GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q PLATÍ PRO KAŽDÉ $n \in \mathbb{N}$:**

$$a_n = a_1 . q^{n-1}. \tag{16}$$

Důkaz: matematickou indukcí

Tato věta dává tedy návod na výpočet *n*-tého členu geometrické posloupnosti pomocí jejího prvního členu.

VĚTA: **V GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q PLATÍ PRO VŠECHNA $r, s \in \mathbb{N}$:**

$$a_r = a_s . q^{r-s}. \tag{17}$$

Důkaz: vyplývá z předchozí věty

Vztah (17) je zobecněním vztahu (16). Vztah (16) platí pouze pro první a *n*-tý člen, zatímco vztah (17) platí pro libovolné dva členy geometrické posloupnosti.

Stejně jako u aritmetických posloupností (viz odstavec 2.1), tak i u geometrických posloupností je důležitý vztah pro součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti.

<u>VĚTA:</u> PRO SOUČET s_n PRVNÍCH n ČLENŮ GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, TJ. PRO $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ PLATÍ:

1. JE-LI $q = 1$, PAK

$$s_n = na_1 ; \tag{18}$$

2. JE-LI $q \neq 1$, PAK

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} . \tag{19}$$

Důkaz platnosti vztahů (18) a (19) můžeme provést buď matematickou indukcí nebo úpravou výrazu $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Platnost vztahu (18) pro případ $q = 1$ je zřejmý. Vzhledem k tomu, že v tomto případě je $a_1 = a_2 = ... = a_n$, pak skutečně $s_n = na_1$.

Vztah (19) (tj. součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti, pro jejíž kvocient platí $q \neq 1$) můžeme dokázat analogicky, jako jsme dokázali platnost vztahu (12) pro aritmetickou posloupnost (viz odstavec 2.1.1). Součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti můžeme psát ve tvaru

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} . \tag{20}$$

Vztah (20) můžeme nyní vynásobit kvocientem *q* a dostaneme

$$qs_n = qa_1 + qa_2 + ... + qa_{n-1} + qa_n = qa_1 + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n . \tag{21}$$

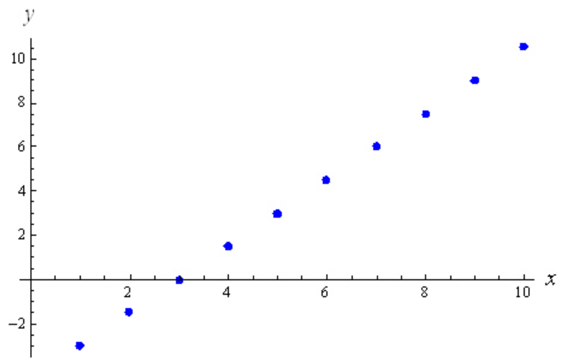
Odečtením vztahů (20) a (21) dostaneme $s_n - qs_n = a_1 + a_1 q + ... + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} - qa_1 - a_1 q^2 - ... - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n = a_1 - a_1 q^n$. Máme tedy vztah $s_n (1-q) = a_1 (1-q^n)$, z něhož po vydělení nenulovým výrazem $1-q$ dostaneme $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$. A to je vztah (19), jehož platnost jsme měli dokázat.

> Výraz $1-q$ je opravdu nenulový. Uvažujeme totiž pouze takové geometrické posloupnosti, pro jejichž kvocient *q* platí $q \neq 1$.

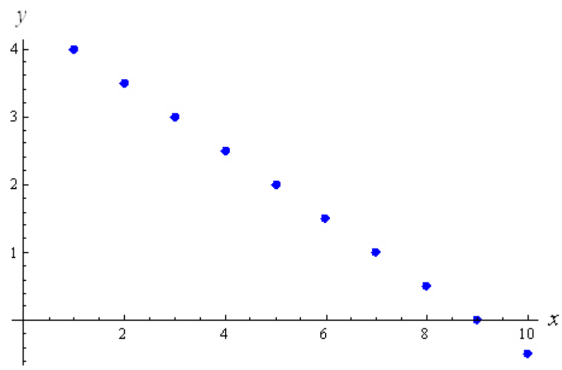
2.3 Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností

Vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností rozebereme postupně. Začneme s aritmetickou posloupností.

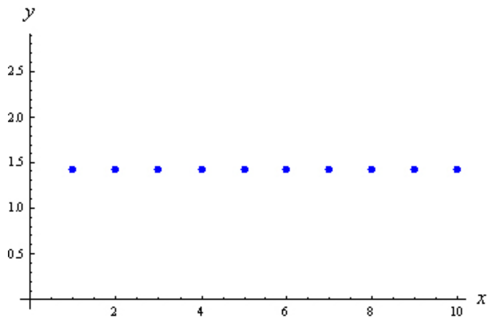
> <u>Ilustrační příklad:</u> Zobrazte grafy aritmetických posloupností, které jsou dány prvním členem a diferencí: a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = -3$, $d = 1{,}5$; b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_1 = 4$, $d = -0{,}5$; c) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_1 = -\sqrt{2}$, $d = 0$.
>
> <u>Řešení:</u> Grafy zadaných posloupností jsou zobrazeny na obr. 8 až obr. 10.



obr. 8



obr. 9



obr. 10

Jak už bylo řečeno, je možné posloupnosti vnímat jako zvláštní případ funkce (viz odstavec 1.1.1). Proto je možné na základě právě sestrojených grafů určit omezenost a monotonii uvedených posloupností a vyslovit následující věty:

VĚTA: ARITMETICKÁ POSLOUPNOST S DIFERENCÍ d JE:

1. ROSTOUCÍ PRO $d > 0$,

2. KLESAJÍCÍ PRO $d < 0$,

3. KONSTANTNÍ PRO $d = 0$.

VĚTA: PRO ARITMETICKOU POSLOUPNOST S DIFERENCÍ d PLATÍ:

1. JE-LI $d > 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ ZDOLA, ALE NENÍ OMEZENÁ SHORA;

2. JE-LI $d < 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ SHORA, ALE NENÍ OMEZENÁ ZDOLA;

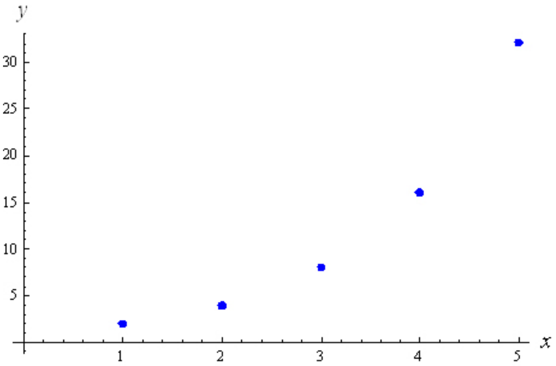
3. JE-LI $d = 0$, PAK JE DANÁ POSLOUPNOST OMEZENÁ (TJ. JE OMEZENÁ SHORA I ZDOLA).

V případě, že platí $d = 0$, jedná se o konstantní aritmetickou posloupnost, jejíž jednotlivé členy se nemění. Proto je omezená shora i zdola a tedy je omezená.

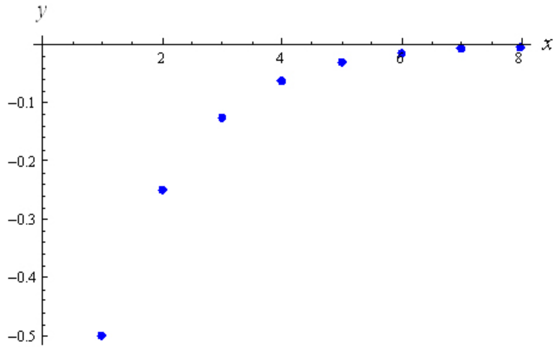
Nyní se pokusíme podobné věty vypozorovat z grafů geometrických posloupností.

Ilustrační příklad: Zobrazte grafy geometrických posloupností, které jsou dány prvním členem a kvocientem: a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_1 = 2$, $q = 2$; b) $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_1 = -0{,}5$, $q = 0{,}5$; c) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, $c_1 = 0{,}5$, $q = 0{,}5$; d) $(d_n)_{n=1}^{\infty}$, $d_1 = -2$, $q = 1{,}5$.

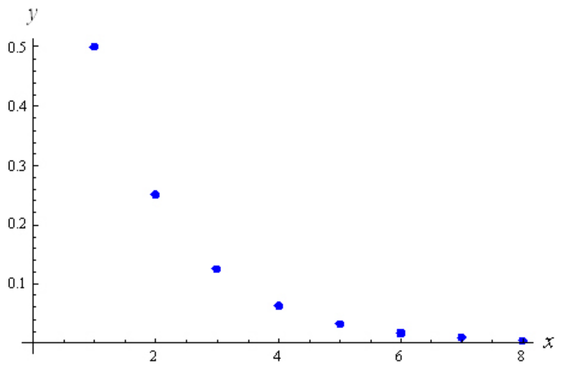
Řešení: Grafy zadaných posloupností jsou zobrazeny na obr. 11 až obr. 14.



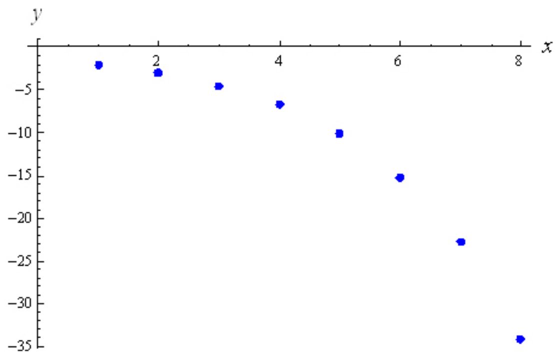
obr. 11



obr. 12



obr. 13



obr. 14

Na základě uvedených příkladů je opět možno vyslovit následující věty:

VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q JE:

1. ROSTOUCÍ, PRÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge q > 1$ NEBO $a_1 < 0 \wedge 0 < q < 1$,

2. KLESAJÍCÍ, PRÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge 0 < q < 1$ NEBO $a_1 < 0 \wedge q > 1$.

VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ S KVOCIENTEM q:

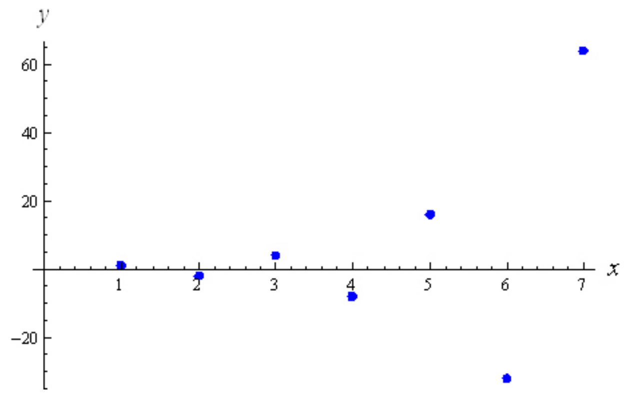
1. JE OMEZENÁ, PRÁVĚ KDYŽ $|q| \le 1$ NEBO $a_1 = 0$;

2. JE OMEZENÁ ZDOLA, ALE NENÍ OMEZENÁ SHORA, PRÁVĚ KDYŽ $a_1 > 0 \wedge q > 1$;

3. JE OMEZENÁ SHORA, ALE NENÍ OMEZENÁ ZDOLA, PRÁVĚ KDYŽ $a_1 < 0 \wedge q > 1$**;**

4. NENÍ ANI SHORA OMEZENÁ ANI ZDOLA OMEZENÁ, PRÁVĚ KDYŽ $a_1 \neq 0 \wedge q < -1$**.**

Příkladem posloupnosti, která není omezená ani shora ani zdola je např. posloupnost $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, $a_1 = 1$, $q = -2$, jejíž graf je na obr. 15.



obr. 15

3. LIMITY POSLOUPNOSTÍ A NEKONEČNÉ ŘADY

Stejně tak jako je možné vyšetřovat limitu u funkcí, je možné hovořit o limitě i u posloupností. Pomocí limity posloupnosti je totiž možné rozšířit a zobecnit jistým způsobem pojem součtu posloupnosti na nekonečný počet sčítanců. Tak je možné dospět k definici nekonečné řady a k definici jejího součtu (viz odstavec 3.3).

3.1 Limita posloupnosti

3.1.1 Zavedení pojmu

Dříve, než vyslovíme definici limity posloupnosti, pokusíme se na základě grafu, ve kterém jsou zobrazeny členy určité konkrétní posloupnosti, intuitivně pojem limity posloupnosti pochopit.

Ilustrační příklad: Vypište prvních šest členů posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{(-1)^n + n}{2n}$ a vyznačte jejich obrazy do grafu.

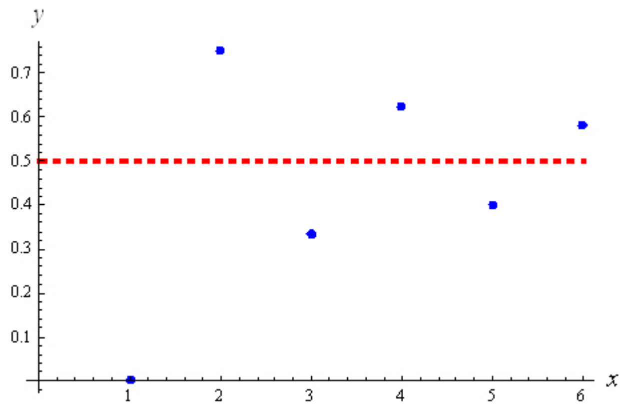
Řešení: Postupným dosazováním lze určit: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{5}{8}$, $a_5 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $a_6 = \frac{7}{12}$. Příslušný graf je na obr. 16.

Z grafu (a výpočtu) je zřejmé, že se jednotlivé členy zadané posloupnosti stále více blíží k číslu $\frac{1}{2}$. Jinými slovy vzdálenost obrazů jednotlivých členů posloupnosti od obrazu čísla $\frac{1}{2}$ se postupně zmenšuje, členy posloupnosti se od tohoto čísla stále méně liší.

Uvedené vzdálenosti daného členu posloupnosti od čísla $\frac{1}{2}$ není složité spočítat: $\left|a_1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\left|a_2 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$, $\left|a_3 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{6}$, $\left|a_4 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{8}$, $\left|a_5 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{10}$, $\left|a_6 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{12}$. Z právě provedených výpočtů lze ukázat, že např. pro všechna přirozená čísla $n \geq 7$ je $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{12}$. Pro n-tý člen zadané posloupnosti totiž platí: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(-1)^n + n}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$.

Výraz $(-1)^n$ nabývá hodnot +1 nebo -1, proto platí $\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$. Číslo n vybíráme stále z množiny přirozených čísel.

Má-li být právě určená vzdálenost $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n}$ menší než $\frac{1}{12}$, musí platit: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$, odkud dostáváme $\frac{1}{2n} < \frac{1}{12}$ a tedy $n > 6$, tj. $n \geq 7$.



obr. 16

Obdobným způsobem bychom mohli najít ten člen, od kterého dále počítaje se další členy liší od čísla $\frac{1}{2}$ o méně než $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, …

Na základě právě uvedeného příkladu je možné vyslovit definici pojmu limita.

ČÍSLO a SE NAZÝVÁ <u>LIMITA POSLOUPNOSTI</u> $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, PRÁVĚ KDYŽ KE KAŽDÉMU KLADNÉMU ČÍSLU ε EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAK, ŽE PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA $n \geq n_0$ PLATÍ: $|a_n - a| < \varepsilon$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{22}$$

Definici limity je možné formulovat také tak, že místo podmínky $|a_n - a| < \varepsilon$ uvedeme podmínku s ní ekvivalentní: $a \in (a_n - \varepsilon; a_n + \varepsilon)$.

U posloupností se nedefinuje jiná limita, než limita pro $n \to \infty$. Při výpočtu limit nebo při „intuitivním uhádnutí limity z grafu posloupnosti“ nás zajímá, jak se chovají členy posloupnosti pro velká *n*, tj. v pravé části grafu. Levá část grafu je pro výpočet limit nepodstatná!

Právě definovaná limita se nazývá **vlastní limita** (tj. touto limitou jsou čísla z množiny reálných čísel).

Výsledkem vlastní limity tedy není $\pm\infty$.

Podle toho, jakou limitu daná posloupnost má, můžeme posloupnosti dělit na dvě skupiny.

POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ SE NAZÝVÁ <u>KONVERGENTNÍ POSLOUPNOST</u>, PRÁVĚ KDYŽ POSLOUPNOST $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ MÁ VLASTNÍ LIMITU, TJ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

POSLOUPNOSTI, KTERÉ NEJSOU KONVERGENTNÍ, SE NAZÝVAJÍ <u>DIVERGENTNÍ</u>.

Divergentní posloupnosti mají nevlastní limitu (viz odstavec 3.2) nebo jejich limita neexistuje.

Vlastnosti limit posloupností dále upřesňují další věty.

<u>VĚTA:</u> KAŽDÁ POSLOUPNOST MÁ NEJVÝŠE JEDNU LIMITU.

<u>VĚTA:</u> KAŽDÁ KONVERGENTNÍ POSLOUPNOST JE OMEZENÁ.

Pozor! Právě uvedenou větu není možné obrátit. To znamená, že omezená posloupnost nemusí být nutně konvergentní - např. posloupnost $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Tato posloupnost je omezená (její členy nabývají střídavě hodnot mínus jedna a plus jedna, proto je zadaná posloupnost omezená), ale není konvergentní, protože neexistuje limita definovaná vztahem (22).

Limita vlastně dává představu o tom, k jakému číslu se přibližují členy dané posloupnosti v nekonečnu (tj. pro velká *n*). V případě posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ tuto představu nedostaneme - víme jen, že pro velká *n* budou nabývat členy posloupnosti hodnoty +1 nebo -1. A to je málo k tomu, abychom řekli, že tato posloupnost má limitu (danou vztahem (22)).

Podrobněji je o některých typech omezených posloupností pojednáno v úvodu odstavce 3.1.2.

3.1.2 <u>Vlastnosti limit posloupností</u>

Následující věty umožňují určovat limity „složitějších“ posloupností na základě limit posloupností „jednodušších“.

<u>VĚTA:</u> JESTLIŽE POSLOUPNOSTI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ A $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ JSOU KONVERGENTNÍ A PŘITOM $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ A $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, PAK JE KONVERGENTNÍ I POSLOUPNOST:

1. $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$ **A PLATÍ:**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b; \tag{23}$$

2. $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$ **A PLATÍ:**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a.b; \tag{24}$$

3. $(ca_n)_{n=1}^{\infty}$ **A PLATÍ:**

$$\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n = c.a\,, \qquad (25)$$

KDE $c \in \mathbb{R}$;

4. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ A PLATÍ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \qquad (26)$$

ZA PŘEDPOKLADU, ŽE $b \neq 0$ A $b_n \neq 0$ PRO VŠECHNA $n \in \mathbb{N}$.

Jak již bylo řečeno, zvláštním případem posloupností jsou aritmetické posloupnosti (viz odstavec 2.1) a geometrické posloupnosti (viz odstavec 2.2). Proto se podíváme z hlediska limit na tyto dva druhy posloupností (viz odstavce 3.1.2.1 a 3.1.2.2).

3.1.2.1 Aritmetické posloupnosti

Aritmetické posloupnosti s diferencí $d = 0$ jsou konvergentní (protože jsou konstantní), aritmetické posloupnosti s diferencí $d \neq 0$ nejsou omezené, a proto jsou divergentní. Vyšetřování limit aritmetických posloupností je tedy většinou nezajímavé.

3.1.2.2 Geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}$, ve které je:

1. $|q| > 1$, není omezená, a proto není konvergentní;
2. $q = 1$, je konvergentní (je to posloupnost konstantní) a její limita je 1;
3. $q = -1$, je divergentní (členy posloupnosti oscilují mezi -1 a 1);
4. $|q| < 1$, je konvergentní.

VĚTA: GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $\left(q^n\right)_{n=1}^{\infty}$, PRO KTEROU JE $|q| < 1$, JE KONVERGENTNÍ A JEJÍ LIMITA JE ROVNA **0**.

Tato věta je velmi důležitá pro vyšetřování vlastností nekonečných řad (viz odstavec 3.3).

VĚTA: KAŽDÁ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, PRO JEJÍŽ KVOCIENT q PLATÍ $|q| < 1$, JE KONVERGENTNÍ A PLATÍ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \qquad (27)$$

3.1.3 ***Užití limit posloupností

Nejprve uvedeme tři věty, které se ukáží jako velmi užitečné u dalších uváděných příkladů (viz odstavce 3.1.3.1 až 0).

VĚTA: JE-LI OMEZENÁ POSLOUPNOST MONOTÓNNÍ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

Pro neklesající resp. nerostoucí posloupnost odtud plyne:

VĚTA: JE-LI POSLOUPNOST NEKLESAJÍCÍ A PŘITOM SHORA OMEZENÁ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

VĚTA: JE-LI POSLOUPNOST NEROSTOUCÍ A PŘITOM ZDOLA OMEZENÁ, PAK JE KONVERGENTNÍ.

V odstavcích 3.1.3.1 až 0 se budeme zabývat výpočtem některých iracionálních čísel. Jejich výpočet je založen na následující větě:

VĚTA: PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO r EXISTUJE NEKLESAJÍCÍ POSLOUPNOST RACIONÁLNÍCH ČÍSEL $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ A NEROSTOUCÍ POSLOUPNOST RACIONÁLNÍCH ČÍSEL $\left(b_n\right)_{n=1}^{\infty}$ TAK, ŽE PLATÍ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = r\,. \qquad (28)$$

3.1.3.1 Výpočet čísla π

Řecký matematik Archimedes (287 př. n. l. - 212 př. n. l.) ukázal, že pro číslo π platí nerovnost $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. K tomuto závěru dospěl tak, že délku kružnice porovnával s obvody pravidelných n-úhelníků, které jsou vepsány resp. opsány dané kružnici. Později byl jeho původní odhad čísla π zpřesňován tím, že matematici volili stále větší počet stran těchto mnohoúhelníků. Pokusme se tento postup zopakovat.

Uvažujme kružnici o jednotkovém poloměru, jejíž obvod tedy je 2π. Označme $\left(o_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ posloupnost obvodů pravidelných *n*-úhelníků vepsaných do kružnice a $\left(o'_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ posloupnost pravidelných *n*-úhelníků opsaných kružnici. Z geometrického pohledu na situaci je zřejmé, že posloupnost $\left(o_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená (je omezená obvodem kružnice) a posloupnost $\left(o'_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je klesající a omezená (omezená je opět obvodem kružnice). Obě jsou monotónní a omezené, tedy konvergentní. Je možné ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

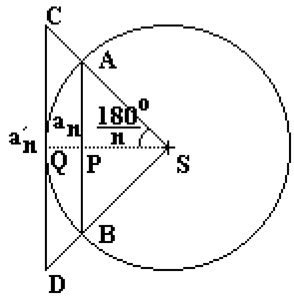
$$o_{\mathrm{n}} < 2\pi < o'_{\mathrm{n}} \qquad (29)$$

a navíc

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} o_{\mathrm{n}} = 2\pi = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} o'_{\mathrm{n}}\,. \qquad (30)$$

Nyní vyjádříme *n*-tý člen obou posloupností $\left(o_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ a $\left(o'_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ na základě obr. 17, na kterém je znázorněna jedna strana pravidelného *n*-úhelníka vepsaného do kružnice i jedna strana pravidelného *n*-úhelníka opsaného kružnici. Pravidelný *n*-úhelník je možné rozdělit na *n* rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhel proti základně (tj. proti straně uvažovaného *n*-úhelníka) má velikost $\frac{360°}{n}$. Pro další odvození budou důležité pravoúhlé trojúhelníky *APS* a *CQS*, které jsou vytvořeny spuštěním výšky z bodu *S* na stranu *AB* resp. *CD*. Úhel při vrcholu S má v obou trojúhelnících velikost $\frac{1}{2}.\frac{360°}{n} = \frac{180°}{n}$.

Vzhledem k tomu, že chceme tímto výpočtem získat hodnotu konstanty π, není možné vyjadřovat úhly v míře obloukové, tj. v násobcích π. Tuto konstantu totiž máme určit a bylo by matematicky nesmyslné chtít ji určit pomocí sama sebe. Proto je nutné hodnoty úhlů vyjadřovat ve stupních.



obr. 17

V pravoúhlém trojúhelníku *APS* platí: $\sin\frac{180°}{n} = \frac{\frac{a_{\mathrm{n}}}{2}}{1} = \frac{a_{\mathrm{n}}}{2}$. Odtud pro délku strany *n*-úhelníka vepsaného do kružnice dostáváme $a_{\mathrm{n}} = 2\sin\frac{180°}{n}$ a pro obvod uvažovaného vepsaného *n*-úhelníka pak platí

$$o_{\mathrm{n}} = 2n\sin\frac{180°}{n}\,. \qquad (31)$$

V pravoúhlém trojúhelníku *CQS* platí: $\mathrm{tg}\frac{180°}{n} = \frac{\frac{a'_{\mathrm{n}}}{2}}{1} = \frac{a'_{\mathrm{n}}}{2}$. Odtud pro délku strany n-úhelníka opsaného kružnici dostáváme $a'_{\mathrm{n}} = 2\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ a pro obvod uvažovaného opsaného *n*-úhelníka pak platí

$$o'_{\mathrm{n}} = 2n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}\,. \qquad (32)$$

Dosadíme-li nyní vztahy (31) a (32) do vztahu (29), dostaneme: $2n\sin\frac{180°}{n} < 2\pi < 2n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, odkud po vydělením soustavy nerovnic číslem 2 dostaneme

$$n\sin\frac{180°}{n} < \pi < n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}\,. \qquad (33)$$

Analogicky můžeme dosadit také vztahy (31) a (32) do vztahu (30) a dostaneme $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(2n\sin\frac{180°}{n}\right) = 2\pi = \lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(2n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}\right)$. Tyto vztahy můžeme dále postupně upravit. Nejdříve podle vztahu

(25) vytkneme z limit konstantu 2 a dostaneme $2\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{180°}{n}\right)=2\pi=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}\right)$. Po vydělení touto konstantou získáme vztah

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{180°}{n}\right)=\pi=\lim_{n\to\infty}\left(n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}\right). \tag{34}$$

Postupným dosazováním za n je možné určit π na libovolný počet desetinných míst. Např. pro $n = 10000$ dostáváme $\pi = 3{,}14159$, tj. s přesností na pět desetinných míst.

V současné době se přesné výpočty čísla π provádějí na výkonných počítačích pomocí nekonečných řad (viz odstavec 3.3), které byly pro ten účel odvozeny.

3.1.3.2 Výpočet čísla e

S Eulerovým číslem e jsme se již setkali v učivu o exponenciálních funkcích a přirozených logaritmech. Toto iracionální číslo, které hraje důležitou roli při řešení řady aplikačních úloh v přírodních vědách a technice, lze definovat také pomocí limit posloupnosti.

Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$a_1 = 2$	$a_3 = 2{,}370370$	$a_{10} = 2{,}593742$	$a_{1000} = 2{,}716923$
$a_2 = 2{,}25$	$a_4 = 2{,}441406$	$a_{100} = 2{,}704813$	$a_{10000} = 2{,}718145$

Je možné ukázat, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a omezená, a je tedy i konvergentní. Platí:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{35}$$

Dále je možné uvažovat posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Určíme nyní prvních několik členů této posloupnosti:

$b_1 = 4$	$b_3 = 3{,}160494$	$b_{10} = 2{,}853117$	$b_{1000} = 2{,}719641$
$b_2 = 3{,}375$	$b_4 = 3{,}051758$	$b_{100} = 2{,}731862$	$b_{10000} = 2{,}718418$

Je možné ukázat, že posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a omezená, a je tedy i konvergentní. A dále platí

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{36}$$

Na základě limit (35) a (36) tedy pro všechna $n\in\mathbb{N}$ tedy platí $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, a proto

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{37}$$

Právě uvedený výpočet čísla e konverguje k přesné hodnotě e pomaleji, než výpočet čísla π uvedený v odstavci 3.1.3.1.

3.1.3.3 Výpočet druhé odmocniny reálných čísel

Chceme-li vypočítat druhou odmocninu z kladného reálného čísla a, zvolíme nejprve kladné číslo x_1, jehož druhá mocnina je větší než a. Pak je x_1 větší než $\sqrt{a}$ a číslo $\frac{a}{x_1}$ je menší než $\sqrt{a}$. Tj. platí

$$\frac{a}{x_1}<\sqrt{a}<x_1. \tag{38}$$

Pro číslo x_1 tedy platí $x_1^2>a$. Z toho plyne, že $x_1>\sqrt{a}$ (čísla a i x_1 jsou kladná, proto není nutné psát nikde absolutní hodnotu). Vydělíme-li číslo a číslem x_1, které je větší než $\sqrt{a}$, dostaneme číslo menší než $\sqrt{a}$. Platí totiž: $\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ - a když budeme dělit číslem větším, než je $\sqrt{a}$, získáme číslo menší než $\sqrt{a}$.

Uvažujme dále posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, která je dána rekurentně takto:

$$x_{\mathrm{n}+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_{\mathrm{n}}} + x_{\mathrm{n}}\right). \tag{39}$$

O posloupnosti definované vztahem (39) lze dokázat, že platí:

1. pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{a}{x_{\mathrm{n}}} < \sqrt{a} < x_{\mathrm{n}}$;
2. posloupnost $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je klesající;
3. posloupnost $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je omezená;
4. posloupnost $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Skutečnost, že je posloupnost $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ konvergentní vyplývá z předchozích dvou vlastností této posloupnosti.

Posloupnosti $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ a $(x_{\mathrm{n}+1})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu, kterou označíme *c* a pro kterou platí

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} x_{\mathrm{n}} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} x_{\mathrm{n}+1} = c\,. \tag{40}$$

Posloupnost $(x_{\mathrm{n}+1})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ se od posloupnosti $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ liší pouze „přečíslováním“ svých členů o jedničku. A vzhledem k tomu, že pro výpočet limity posloupnosti je důležité chování členů posloupnosti pro hodně velká *n*, je zřejmé, že posloupnosti $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ a $(x_{\mathrm{n}+1})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu.

Uvědomíme-li si, že pro hodně velká přirozená čísla můžeme místo x_{n} a $x_{\mathrm{n}+1}$ dosazovat *c* (jak vyplývá z limit (40)), můžeme definiční vztah (39) posloupnosti $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ psát ve tvaru $c = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + c\right)$. Tento vztah můžeme dále upravit. Vynásobením dvěma dostaneme $2c = \frac{a}{c} + c$. Převedením *c* na levou stranu získáme $c = \frac{a}{c}$ a po vynásobení nenulovým *c* dostaneme $c^2 = a$, a tedy

$$c = \sqrt{a}\,. \tag{41}$$

Porovnáním vztahů (40) a (41) zjistíme, že limitou posloupností $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ a $(x_{\mathrm{n}+1})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je číslo $\sqrt{a}$, které jsme chtěli určit.

Při přibližném výpočtu druhé odmocniny z čísla *a* tedy stačí zvolit za první člen posloupnosti $(x_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ dané rekurentně vztahem (39) libovolné kladné číslo x_1, jehož druhá mocnina je větší než *a*. Poté je možné již dopočítávat další členy pomocí vztahu (39), které budou velmi rychle konvergovat ke hledanému číslu $\sqrt{a}$.

„Velmi rychle konvergovat“ znamená, že se dané členy budou rychle blížit k hledané odmocnině. Tj. členy vypočítávané posloupnosti se rychle přestanou na prvních desetinných místech za desetinnou čárkou měnit. Měnit se budou číslice na místě tisícin, desetitisícin, stotisícin, … - podle toho, s jakou přesností danou odmocninu budeme chtít určit.

3.2 Nevlastní limita posloupnosti

Pojem nevlastní limity posloupnosti vysvětlíme na ilustračním příkladu.

Ilustrační příklad: Uvažujme posloupnost $(a_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, $a_{\mathrm{n}} = 2^{\mathrm{n}}$. Zjistěte, pro která přirozená čísla *n* je $a_{\mathrm{n}} > 100$.

Řešení: Podle zadání je třeba vyřešit nerovnici: $2^{\mathrm{n}} > 100$ pro $n \in \mathbb{N}$. Exaktní řešení této nerovnice získáme zlogaritmováním dekadickým logaritmem, čím dostaneme nerovnici ve tvaru $\log 2^{\mathrm{n}} > \log 100$. Levou stranu nerovnice upravíme podle pravidel pro počítání s logaritmy, na pravé straně vypočteme. Získáme tak nerovnici $n \log 2 > 2$, z níž již vyjádříme $n > \frac{2}{\log 2} \doteq 6{,}64$. Řešením této nerovnice je tedy každé přirozené číslo $n \geq 7$.

Nerovnici $2^{\mathrm{n}} > 100$ můžeme řešit rychleji „odhadem“. Uvědomíme-li si, že $2^6 = 64$ a $2^7 = 128$, je zřejmé, že nerovnice $2^{\mathrm{n}} > 100$ je splněna pro $n \geq 7$.

Uvedená posloupnost má tu vlastnost, že bychom podobným způsobem mohli hledat členy posloupnosti, které jsou větší než 1000, 10^6, … zkrátka větší než jakékoliv reálné číslo, a v každém případě bychom našli přirozené *n*, od kterého dále jsou členy posloupnosti vyšší než zadané číslo.

Analogickým postupem bychom mohli vyšetřovat např. i posloupnost $\left(b_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, $b_{\mathrm{n}}=4-0,5n$ a zkoumat, kdy jsou její členy menší než -100, -10^{9}, …

Na základě právě uvedených příkladů a na základě toho, že posloupnosti jsou zvláštními případy funkcí, je možné zavést pojem **nevlastní limita posloupnosti**:

ŘÍKÁME, ŽE POSLOUPNOST $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ MÁ <u>NEVLASTNÍ LIMITU PLUS NEKONEČNO</u>, PRÁVĚ KDYŽ PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO K EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA $n \geq n_0$ JE $a_{\mathrm{n}}>K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} a_{\mathrm{n}}=\infty . \tag{42}$$

Analogicky můžeme zavést nevlastní limitu, která je rovna $-\infty$.

ŘÍKÁME, ŽE POSLOUPNOST $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ MÁ <u>NEVLASTNÍ LIMITU MÍNUS NEKONEČNO</u>, PRÁVĚ KDYŽ PRO KAŽDÉ REÁLNÉ ČÍSLO L EXISTUJE $n_0 \in \mathbb{N}$ TAKOVÉ, ŽE PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA $n \geq n_0$ JE $a_{\mathrm{n}}<L$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} a_{\mathrm{n}}=-\infty . \tag{43}$$

Posloupnosti, které mají nevlastní limitu jsou **divergentní posloupnosti**.

Pro každou posloupnost $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ nastává právě jeden z následujících případů:

1. posloupnost je konvergentní a její limitou je reálné číslo *a*, tj. platí $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} a_{\mathrm{n}}=a$;
2. posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu ∞, tj. platí $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} a_{\mathrm{n}}=\infty$;
3. posloupnost je divergentní a má nevlastní limitu $-\infty$, tj. platí $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} a_{\mathrm{n}}=-\infty$;
4. posloupnost je divergentní a přitom nemá ani nevlastní limitu ∞ ani nevlastní limitu $-\infty$.

Příkladem takové posloupnosti je např. $\left((-2)^{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, která stále mění znaménka a přitom její členy v absolutní hodnotě rostou. Limitu ale nemá, protože pro velká *n* nevíme, jestli bude hodnota daného členu kladná nebo záporná.

3.3 <u>*Nekonečná geometrická řada*</u>

Pojem nekonečná řada velmi úzce souvisí s geometrickou posloupností (viz odstavec 2.2).

<u>Ilustrační příklad:</u> Uvažujme geometrickou posloupnost $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, $a_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2^{\mathrm{n}-1}}$. Vytvoříme nyní další posloupnost tak, aby pro každé $n\in\mathbb{N}$ byl její *n*-tý člen roven součtu prvních *n* členů posloupnosti $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$. Půjde tedy o posloupnost $\left(s_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$, $s_{\mathrm{n}}=a_1+a_2+...+a_{\mathrm{n}}$. Určete limitu této posloupnosti.

<u>Řešení:</u> Vypočítejme nyní prvních několik členů této posloupnosti (s využitím toho, že posloupnost $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost, což lze snadno dokázat): $s_1=1$, $s_2=\frac{3}{2}$, $s_3=\frac{7}{4}$, $s_4=\frac{15}{8}$, $s_5=\frac{31}{16}$, $s_6=\frac{63}{32}$, $s_7=\frac{127}{64}$, … Zdá se, že limita posloupnosti $\left(s_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ je číslo 2. To se dá dokázat pomocí vět o počítání s limitami (viz odstavec 3.1.2). Pro součet prvních *n* členů uvažované geometrické posloupnosti $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ platí vztah (19) ve tvaru $s_{\mathrm{n}}=a_1\frac{q^{\mathrm{n}}-1}{q-1}$. Po dosazení parametrů posloupnosti $\left(a_{\mathrm{n}}\right)_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ dostaneme $s_{\mathrm{n}}=1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}}-1}{\frac{1}{2}-1}$ a postupnými úpravami získáme výsledný vztah: $s_{\mathrm{n}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}}-1}{-\frac{1}{2}}=-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}}-1\right)$.

Hledanou limitu uvažované posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tedy můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[-2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)\right] = -2.\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) = -2.(0-1) = 2.$$

Nyní můžeme vyslovit větu, která zobecňuje to, co jsme vypočítali v minulém konkrétním příkladě.

<u>VĚTA:</u> JE-LI $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST, PRO JEJÍŽ KVOCIENT q PLATÍ $|q|<1$, PAK POSLOUPNOST $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ JE KONVERGENTNÍ A PŘITOM PLATÍ

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (44)$$

<u>Důkaz:</u> Právě uvedenou větu je možné dokázat rozepsáním posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ a vypočtením limity $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1\frac{q^n - 1}{q-1}\right)$.

Důkaz bude probíhat stejně jako ilustrační příklad tohoto odstavci, jen budeme uvažovat obecné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

V úvodu tohoto odstavce jsme řešili úlohu, kdy jsme od zadané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ přešli k posloupnosti $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (jde tedy o součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$), a zkoumali jsme, zda je nově vytvořená posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní. V tomto případě hovoříme o určování součtu nekonečné řady.

<u>NEKONEČNOU ŘADOU</u> SE NAZÝVÁ SYMBOL

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (45)$$

Nekonečnou řadou se v matematice opravdu nazývá právě uvedený součet. Nekonečnou řadou není žádné číslo, funkce, … je to prostě součet nekonečně mnoha členů nějaké posloupnosti.

Nekonečná řada, která je zapsaná ve formě právě uvedeného součtu, nepředstavuje ve skutečnosti příklad na sčítání, ale příklad na hledání limity. Není totiž možné sečíst nekonečně mnoho sčítanců.

Mohou nastat dva případy:

1. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, pak říkáme, že **nekonečná řada** (45) **je konvergentní**. Limitu (44) označujeme symbolem s a nazýváme jí **součet nekonečné řady**, přičemž tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
2. Posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, pak říkáme, že **nekonečná řada** (45) **je divergentní**.

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je q, nazýváme příslušnou nekonečnou řadu (45) **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q.

Z výše uvedeného vyplývá tato věta:

<u>VĚTA:</u> NEKONEČNÁ GEOMETRICKÁ ŘADA, PRO KTEROU JE $a_1 \neq 0$, JE KONVERGENTNÍ, PRÁVĚ KDYŽ PRO JEJÍ KVOCIENT q PLATÍ $|q|<1$. V TOM PŘÍPADĚ PRO JEJÍ SOUČET PLATÍ

$$s = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (46)$$

Tento vztah je velmi podobný vztahu pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti, ale chybí v něm člen q^n. To je dáno tím, že uvažujeme NEKONEČNOU geometrickou řadu, pro jejíž kvocient q platí $|q|<1$. A číslo menší než jedna umocněné na velmi velké číslo je rovno skoro nule (je to maličké číslo ležící na číselné ose v blízkosti nuly).

Pomocí nekonečné geometrické řady můžeme řešit i určitý typ rovnic.

Příklad: Řešte v množině reálných čísel rovnici $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\frac{4x-3}{3x-4}$.

Řešení: Levou stranu rovnice ze zadání si přepíšeme tak, abychom měli představu o jednotlivých členech nekonečné řady: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{x}\right)^{0}+\left(\frac{2}{x}\right)^{1}+\left(\frac{2}{x}\right)^{2}+\ldots=1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\ldots$ Ačkoliv je z tohoto zápisu jasně vidět, čemu je roven kvocient dané geometrické posloupnosti, je matematicky korektnější ho vyjádřit pomocí *n*-tého a (*n* + 1)-ního členu geometrické posloupnosti. Ze zadání úlohy je zřejmé, že $a_n=\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}$. Z toho vyplývá, že $a_{n+1}=\left(\frac{2}{x}\right)^{n}$. Pro kvocient q geometrické posloupnosti platí $q=\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Po dosazení tedy dostaneme:

$$q=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)^{n}}{\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}}=\left(\frac{2}{x}\right)^{1}=\frac{2}{x}.$$

To je zřejmé i z rozpisu levé strany zadané rovnice: každý další člen je roven minulému členu vynásobenému zlomkem $\frac{2}{x}$. Ale právě provedené odvození je matematicky korektnější.

Nyní si uvědomíme, že nekonečná geometrická posloupnost je konvergentní (tj. má součet vyjádřený reálným číslem), pokud pro její kvocient q platí $|q|<1$. To znamená, že ne pro všechna reálná x bude mít nekonečná geometrická řada ze zadání úlohy definovaný součet. Ta reálná x, pro které existuje reálný součet (tj. zadaná posloupnost je konvergentní) musí splňovat podmínku $\left|\frac{2}{x}\right|<1$. Tuto nerovnici postupně vyřešíme: $\frac{2}{|x|}<1$ a tedy $|x|>2$. To znamená, že pouze pro $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ má nekonečná geometrická řada součet a tedy pouze na tomto intervalu můžeme řešit danou rovnici.

Pro součet nekonečné geometrické řady, jejíž první člen je 1 a $q=\frac{2}{x}$ tedy dostáváme:

$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{2}{x}}=\frac{1}{\frac{x-2}{x}}=\frac{x}{x-2}$. Nyní už můžeme řešit zadanou rovnici:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\frac{4x-3}{3x-4}$$

$$\frac{x}{x-2}=\frac{4x-3}{3x-4}$$

$$3x^2-4x=4x^2-3x-8x+6$$

$$x^2-7x+6=0$$

$$(x-1)(x-6)=0$$

Dostáváme tedy dva kořeny a to $x_1=1$ a $x_2=6$.

Nyní je nutné určit definiční obor dané rovnice. Ze zadání je zřejmé, že musí být $x\neq 0$ a zároveň $x\neq\frac{4}{3}$. Současně ale musíme vzít v úvahu podmínku, která zaručí, že zadaná nekonečná řada bude konvergentní, tj. podmínku $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

Nyní již můžeme vyslovit závěr: $O=\mathbb{R}$, $D=(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ a $P=\{6\}$.