<u>Vzájemná poloha přímky a roviny</u>

Přímka a rovina mohou být:

1. rovnoběžné různé - nemají společný žádný bod
2. rovnoběžné splývající - všechny body přímky jsou zároveň i body roviny
3. různoběžné - mají společný jeden bod, který se nazývá průsečík

Máme-li zadanou přímku a rovinu pomocí jejich rovnic, k určení jejich vzájemné polohy je třeba vyřešit soustavu rovnic, která je tvořena zadanými rovnicemi. Na základě počtu řešení této soustavy, je možné určit vzájemnou polohu zadané přímky a roviny. Počet řešení dané soustavy, odpovídá počtu bodů, které mají daná přímka a rovina společné.

<u>a) přímka i rovina dané parametricky</u>

Nechť je dána přímka p a rovina ρ:

$$p:\ x = x_A + tu_x \qquad\qquad \rho:\ x = x_B + rv_x + sw_x$$
$$y = y_A + tu_y \qquad\qquad y = y_B + rv_y + sw_y$$
$$z = z_A + tu_z;\ t \in \mathbb{R} \qquad\qquad z = z_B + rv_z + sw_z;\ r, s \in \mathbb{R}$$

Určit jejich vzájemnou polohu nyní znamená určit vlastně parametr t (resp. r a s). Toto je možné provést pomocí metody porovnávací, tedy:

$$x_A + tu_x = x_B + rv_x + sw_x$$
$$y_A + tu_y = y_B + rv_y + sw_y$$
$$z_A + tu_z = z_B + rv_z + sw_z$$

Počet řešení této soustavy rovnic určuje pak počet společných bodů, které přímky mají a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě, že rovina a přímka jsou různoběžné, lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p resp. dosazením parametrů r a s do parametrického vyjádření roviny ρ.

<u>Geometrická interpretace:</u>

1. přímka a rovina jsou rovnoběžné - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ je lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$; ekvivalentní podmínka: vektor $\vec{u}$ je kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$
2. přímka leží v rovině - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ je lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$ (resp. vektor $\vec{u}$ je kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$) a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží v rovině ρ
3. přímka a rovina jsou různoběžné - vektor $(u_x; u_y; u_z)$ není lineární kombinací vektorů $(v_x; v_y; v_z)$ a $(w_x; w_y; w_z)$ (resp. vektor $\vec{u}$ není kolmý k vektoru $\vec{v} \times \vec{w}$)

<u>Příklady:</u>

Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ:

1. p: $x = 2 - t$, $y = 4 + 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ: $x = 1 - 2r + s$, $y = -1 + 6r - 2s$, $z = 3 + 4r + s$; $r, s \in \mathbb{R}$,
2. p: $x = 2 - t$, $y = 4 + 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ: $x = 1 - 2r + s$, $y = 7 + 6r - 2s$, $z = 5 + 4r + s$; $r, s \in \mathbb{R}$,
3. p: $x = 2 - t$, $y = 4 + 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ: $x = 1 - 2r - s$, $y = 7 + 6r - 2s$, $z = 5 + 4r + s$; $r, s \in \mathbb{R}$.

<u>b) přímka daná parametricky, rovina daná obecně</u>

Nechť je dána přímka p a rovina ρ:

$$p:\ x = x_A + tu_x \qquad\qquad \rho:\ ax + by + cz + d = 0$$
$$y = y_A + tu_y$$
$$z = z_A + tu_z;\ t \in \mathbb{R}$$

Určit vzájemnou polohu zadané přímky a roviny je možné pomocí dosazovací metody: parametrické vyjádření přímky x, y a z dosadíme do obecné rovnice roviny:

$a(x_A + tu_x) + b(y_A + tu_y) + c(z_A + tu_z) + d = 0$, čímž dostáváme jednu rovnici pro jednu neznámou - pro t. Počet kořenů této rovnice určí i počet společných bodů zadané přímky a roviny a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě, že přímka a rovina jsou různoběžné, lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p.

Geometrická interpretace:

1. přímka a rovina jsou rovnoběžné - vektory $\left(u_x; u_y; u_z\right)$ a $\left(a; b; c\right)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový
2. přímka leží v rovině splývají - vektory $\left(u_x; u_y; u_z\right)$ a $\left(a; b; c\right)$ jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový, a bod $\left[x_A; y_A; z_A\right]$ leží v rovině ρ
3. přímka a rovina jsou různoběžné - vektory $\left(u_x; u_y; u_z\right)$ a $\left(a; b; c\right)$ nejsou kolmé, tj. jejich skalární součin není nulový

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ :

1. p: $x = -1 - 3t$, $y = 2 + t$, $z = 3 - 4t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ : $2x + 2y - z + 5 = 0$,
2. p: $x = -1 - 3t$, $y = 2 + t$, $z = 3 - 4t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ : $2x + 2y - z + 1 = 0$,
3. p: $x = -1 - 3t$, $y = 2 + t$, $z = 3 - 4t$; $t \in \mathbb{R}$ a ρ : $2x + 3y - z + 5 = 0$.