Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

Ze stereometrie víme, že přímky v prostoru mohou:

1. ležet v jedné rovině - pak tyto přímky mohou být:
   a) rovnoběžné různé - nemají společný žádný bod
   b) rovnoběžné splývající - mají společné všechny body
   c) různoběžné - mají společný jeden bod, který se nazývá průsečík
2. ležet v různých rovinách (přímkami pak není možné proložit rovinu) - přímky mimoběžné

Máme-li zadané dvě přímky pomocí jejich rovnic, k určení jejich vzájemné polohy je třeba vyřešit soustavu rovnic, která je tvořena dvěma zadanými rovnicemi přímek. Na základě počtu řešení této soustavy, je možné určit vzájemnou polohu zadaných přímek. Počet řešení dané soustavy, odpovídá počtu bodů, které mají dané přímky společné.

Dvě přímky vyjádřené v parametrickém tvaru

Nechť jsou dány přímky

$$p:\ x = x_A + tu_x \qquad\qquad q:\ x = x_B + sv_x$$
$$y = y_A + tu_y \qquad\qquad y = y_B + sv_y\ .$$
$$z = z_A + tu_z;\ t \in \mathbb{R} \qquad\qquad z = z_B + sv_z;\ s \in \mathbb{R}$$

Určit jejich vzájemnou polohu nyní znamená určit vlastně parametr t. Toto je možné provést pomocí metody porovnávací, tedy:

$$x_A + tu_x = x_B + sv_x$$
$$y_A + tu_y = y_B + sv_y$$
$$z_A + tu_z = z_B + sv_z$$

Jedná se o soustavu tří rovnic o dvou neznámých, kterou řešíme tímto způsobem: vezmeme libovolné dvě rovnice z uvedených tří a vyřešíme. Získané kořeny dosadíme do rovnice třetí. Pokud nalezená řešení vyhovují i třetí rovnici, má soustava řešení (to co jsme už nalezli), pokud řešení nevyhovují, soustava řešení nemá.

Počet řešení této soustavy rovnic určuje pak počet společných bodů, které přímky mají a tím i jejich polohu. Souřadnice průsečíku v případě různoběžných přímek lze určit dosazením parametru t do parametrického vyjádření přímky p resp. dosazením parametru s do parametrického vyjádření přímky q.

Geometrická interpretace:

1. přímky jsou rovnoběžné různé - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(v_x; v_y; v_z)$ jsou rovnoběžné
2. přímky splývají - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(v_x; v_y; v_z)$ jsou rovnoběžné a navíc bod $[x_A; y_A; z_A]$ leží na přímce q, resp. bod $[x_B; y_B; z_B]$ leží na přímce p
3. přímky jsou různoběžné - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(v_x; v_y; v_z)$ jsou různoběžné a přímky mají společný bod (průsečík)
4. přímky jsou mimoběžné - vektory $(u_x; u_y; u_z)$ a $(v_x; v_y; v_z)$ jsou různoběžné a přímky nemají společný bod

Příklady:

Rozhodněte o vzájemné poloze přímek p a q:

1. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a q: $x = 1 - 2s$, $y = -1 + 6s$, $z = 3 - 4s$; $s \in \mathbb{R}$,
2. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a q: $x = -1 + \frac{3}{2}s$, $y = 13 - \frac{9}{2}s$, $z = -3 + 3s$; $s \in \mathbb{R}$,
3. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a q: $x = -3s$, $y = 5 - 2s$, $z = 9 + 5s$; $s \in \mathbb{R}$,
4. p: $x = 2 + t$, $y = 4 - 3t$, $z = 3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$ a q: $x = -3s$, $y = 5 - 2s$, $z = 2 + s$; $s \in \mathbb{R}$.