Množiny a intervaly

Množinou se rozumí soubor nějakých objektů (předmětů, …). Předměty, jejichž souhrn vytváří danou množinu, se nazývají **prvky** (elementy) dané množiny. Skutečnost, že prvek *x* je (resp. není) prvkem množiny *A*, se zapisuje symbolicky takto: $x \in A$ (resp. $x \notin A$).

Množinu lze určit:

1. výčtem prvků, přičemž nezáleží na jejich uspořádání - např. $A = \{1;\, 2;\, 3;\, 4\}$, ale ne $A = \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 1\}$

Ve druhém zápisu množiny *A* se prvek 1 vyskytuje dvakrát. Proto to není korektní definici množiny.

2. charakteristickou vlastností - např. $A = \{x \in \mathbb{N};\, x < 4\}$

Množina, která nemá žádný prvek se nazývá **prázdná množina**; značí se $\{\ \} = \emptyset$.

Ve středoškolské praxi se dává přednost symbolu „přeškrtnutá nula“.

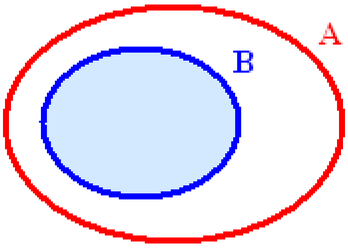
Podle počtů prvků dané množiny rozlišujeme:

1. konečné množiny - mají konečný počet prvků; $A = \{x \in \mathbb{N};\, x < 4\}$; …
2. nekonečné množiny - nemá konečný počet prvků; $A = \{x \in \mathbb{N};\, x > 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\, 2 \le x < 4\}$, …

Počet prvků množiny *A* se nazývá **mohutnost množiny** *A* a značí se $|A|$.

D: Množina *B* je **podmnožinou množiny** *A* (viz obr. 1) právě tehdy, když každý prvek množiny *B* je zároveň prvkem množiny *A* (tj. neexistuje prvek množiny *B*, který není prvkem množiny *A*). Zápis: $B \subset A$; $B = \{x \in A;\, x \in B \Rightarrow x \in A\}$.

Platí: $A \subset A$, $\emptyset \subset A$



obr. 1

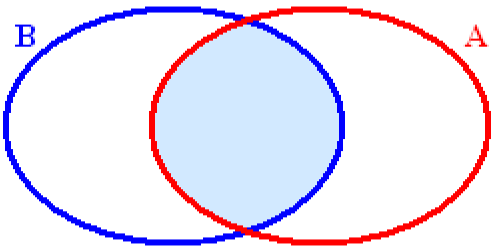
Na množinách lze zavést následující operace: rovnost, průnik, sjednocení, doplněk a rozdíl množin.

D: **Množiny** *A* a *B* se **rovnají** ($A = B$) právě tehdy, když každý prvek množiny *A* je prvkem množiny *B* a zároveň každý prvek množiny *B* je prvkem množiny *A*, tj. $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$.

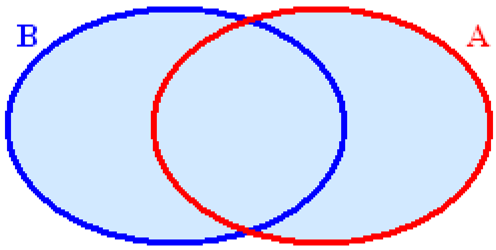
D: **Průnik množin** *A* a *B* (viz obr. 2) je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin, tj. $A \cap B = \{x;\, x \in A \wedge x \in B\}$.

Poznámka: Platí-li pro dvě množiny *A* a *B*, že $A \cap B = \emptyset$, nazývají se tyto množiny **disjunktní**.

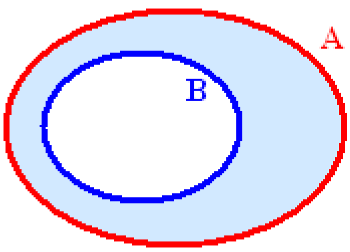
D: **Sjednocení množin** *A* a *B* (viz obr. 3) je množina všech prvků, které patří aspoň do jedné z množin *A* a *B*, tj. $A \cup B = \{x;\, x \in A \vee x \in B\}$.



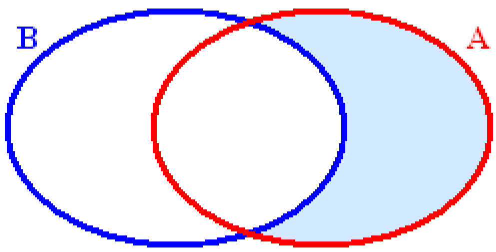
obr. 2



obr. 3



obr. 4



obr. 5

D: **Doplněk množiny** *B* v množině *A* (viz obr. 4) je množina všech prvků, které patří do množiny *A*, ale nepatří do množiny *B*. Značí se B'_A a platí: $B'_A = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.

<u>Poznámka:</u> Platí: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.

D: **<u>Rozdíl množin</u>** *A* a *B* (viz obr. 5) je množina všech prvků množiny *A*, které nejsou prvky množiny *B*, tj. $A \setminus B = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.

Rozdíl mezi doplňkem množiny v dané množině a rozdílem množin je ten, že doplněk množiny *B* v množině *A* je definován pouze tehdy, pokud $B \subset A$ (*B* je podmnožinou *A*).

D: **<u>Interval</u>** je množina (podmnožina) reálných čísel, které lze zobrazit na číselné ose přímkou, polopřímkou nebo úsečkou, přičemž krajní body úsečky či počáteční bod polopřímky k ní může a nemusí patřit.

V JINÝCH ČÍSELNÝCH OBORECH NEŽ V REÁLNÝCH ČÍSLECH INTERVALY NEEXISTUJÍ!!!

Dělení intervalů:

1. omezené - lze je znázornit úsečkou
2. neomezené - lze je znázornit přímkou nebo polopřímkou

Jiné dělení:

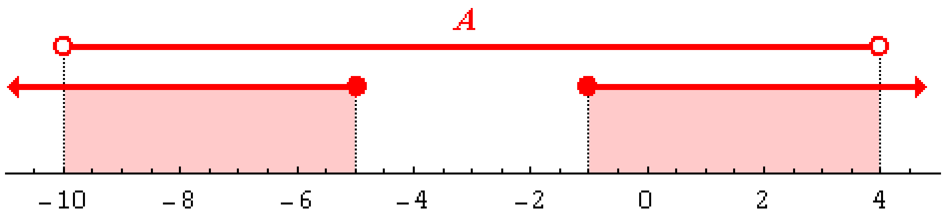
1. uzavřené - k úsečce patří oba krajní body
2. polouzavřené - k úsečce či polopřímce patří jen jeden krajní bod
3. otevřené - k úsečce, polopřímce či přímce nepatří žádný krajní bod

Přehled intervalů:

Omezené intervaly			**Neomezené intervaly**		
$\langle a; b\rangle$	$a \le x \le b$	a b	$\langle a; \infty)$	$a \le x$	a
$(a; b\rangle$	$a < x \le b$	a b	$(a; \infty)$	$a < x$	a
$\langle a; b)$	$a \le x < b$	a b	$(-\infty; a\rangle$	$a \ge x$	a
$(a; b)$	$a < x < b$	a b	$(-\infty; a)$	$a > x$	a
			$(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$		

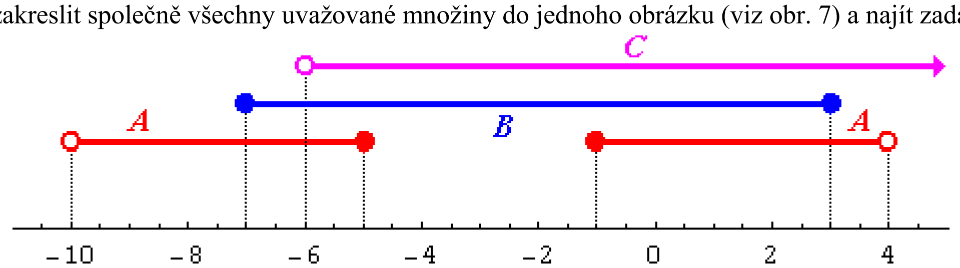
<u>Příklad:</u> Jsou dány množiny $A = \{x \in \mathbb{R};\, 2 \le |x+3| < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{R};\, |x+2| \le 5\}$ a $C = \{x \in \mathbb{R};\, x > -6\}$. Zakreslete množiny na číselné ose a zapište je pomocí intervalů. Pomocí intervalů pak zapište i následující množiny: $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A'_{\mathbb{R}}$, $C \setminus B$, $B \setminus C$, $B \setminus A$.

<u>Řešení:</u> Z uvedených množin bude asi největším problémem nakreslit množinu *A*. Pokud si ale uvědomíme, že tuto množinu lze ekvivalentně vyjádřit zápisem $A = \{x \in \mathbb{R};\, 2 \le |x+3| \wedge |x+3| < 7\}$, neměl by být s jejím zobrazením problém (viz obr. 6).



obr. 6

Nyní už můžeme zakreslit společně všechny uvažované množiny do jednoho obrázku (viz obr. 7) a najít zadané intervaly.



obr. 7

Nejdříve zapíšeme pomocí intervalů zadané množiny: $A = (-10; -5\rangle \cup \langle -1; 4)$, $B = \langle -7; 3\rangle$ a $C = (-6; \infty)$. A nyní zapíšeme pomocí intervalů zadané množiny:

$A \cap B$ je množina těch prvků, které patří do množiny *A* i *B* současně, tj. $A \cap B = \langle -7; -5\rangle \cup \langle -1; 3\rangle$

$B \cap C$ je množina těch prvků, které patří zároveň do množiny *B* i *C*, tj. $B \cap C = (-6; 3\rangle$

Bod -6 do množiny *B* patří, do *C* ale ne - proto do průniku množin *B* a *C* nepatří.

$A \cap C$ je množina těch prvků, které patří do množin *A* a *C* zároveň, tj. $A \cap C = \left(-6; -5\right\rangle \cup \left\langle -1; 4\right)$

Bod -6 patří jenom do množiny *C*, bod 4 zase jenom do množiny *A* - proto ani jeden z těchto bodů do průniku množin *A* a *C* nepatří.

$A \cap B \cap C$ je množina těch prvků, které patří současně do všech tří množin *A*, *B* a *C*, tj. $A \cap B \cap C = \left(-6; -5\right\rangle \cup \left\langle -1; 3\right\rangle$

Bod -6 nepatří do množiny *C*, proto nepatří do společného průniku množin *A*, *B* a *C*.

Jednoduše (ale nepřesně) řešeno: do průniku daných množin zobrazených na číselné ose patří ty body číselné osy, které jsou „zakryty **V Š E M I** stříškami“, jimiž jsou znázorněny dané množiny na číselné ose.

$A \cup B$ je množina těch prvků, které patří alespoň do jedné z množin *A* nebo *B*, tj. $A \cup B = \left(-10; 4\right)$

$A \cup B \cup C$ je množina těch prvků, které patří alespoň do jedné z množin *A*, *B* nebo *C*, tj. $A \cup B \cup C = \left(-10; \infty\right)$

Jednoduše (ale nepřesně) řešeno: do sjednocení daných množin zobrazených na číselné ose patří ty body číselné osy, které jsou „zakryty **A L E S P O Ň J E D N O U** stříškou“, jimiž jsou znázorněny na číselné ose dané množiny.

$A'_{\mathbb{R}}$ je množina těch prvků, které patří do množiny všech reálných čísel, ale nepatří do množiny *A*, tj. $A'_{\mathbb{R}} = \left(-\infty; -10\right\rangle \cup \left(-5; -1\right) \cup \left\langle 4; \infty\right)$

Vzhledem k tomu, že body -10 a 4 nepatří do množiny *A*, patří do jejího doplňku. Naopak body -5 a -1 do množiny *A* patří, proto nepatří do jejího doplňku.

$C \setminus B$ je množina těch prvků, které patří do množiny *C*, ale nepatří do množiny *B*, tj. $C \setminus B = \left(3; \infty\right)$

Bod 3 patří do množiny *B*, a tedy nepatří do rozdílu množin $C \setminus B$.

$B \setminus C$ je množina těch prvků, které patří do množiny *B*, ale nepatří do množiny *C*, tj. $B \setminus C = \left\langle -7; -6\right\rangle$

Bod -6 do množiny *C* nepatří, proto patří do množiny $B \setminus C$.

$B \setminus A$ je množina těch prvků, které patří do množiny *B*, ale nepatří do množiny *A*, tj. $B \setminus A = \left(-5; -1\right)$

Body -5 a -1 patří do množin *A* i *B*, ale do rozdílu množin *B* a *A* nepatří.

Nematematický příklad na téma operace s množinami

Uvažujme následující množiny lidí:
E - množina všech lidí žijících v Evropě
C - množina všech lidí žijících v České republice
P - množina všech obyvatel Prahy
A - množina obyvatel Evropy, kteří vlastní automobil (bez ohledu na to, jaké mají další vybavení)
N - množina obyvatel Evropy, kteří vlastní notebook (bez ohledu na to, jaké mají další vybavení)

Operace s uvedenými množinami mají následující význam:
$P \cap A$ je množina obyvatel Prahy, kteří vlastní automobil
$A \cap N$ je množina lidí z Evropy, kteří vlastní automobil a zároveň notebook
$E \cap P$ je množina obyvatel Evropy, kteří jsou zároveň obyvateli Prahy, tj. jde přímo o množinu *P*
$P \cap A \cap N$ je množina obyvatel Prahy, kteří vlastní automobil i notebook
$A \cup N$ je množina lidí z Evropy, kteří vlastní automobil nebo notebook

$\left(A \cup N\right)'_{\mathrm{E}}$ je množina obyvatel Evropy, kteří nevlastní automobil nebo notebook; do této množiny tedy patří Evropané, kteří nemají ani automobil ani notebook

Rozmyslete si to na základě předchozí operace s množinami *A* a *N*.

P'_{E} je množina všech lidí z Evropy, kteří nežijí v Praze

C'_{E} je množina obyvatel Evropy, kteří nežijí v České republice

$N \setminus A$ je množina lidí, kteří vlastní notebook, ale nemají automobil

$C \setminus P$ je množina obyvatel České republiky, kteří nežijí v Praze

$A \setminus N$ je množina lidí, kteří vlastní automobil, ale nemají notebook

$E \setminus \left(A \cap N\right)$ je množina obyvatel Evropy, kteří nemají ani automobil ani notebook

Zkuste si sami další možnosti: obyvatelé Prahy, kteří mají právě jeden z předmětů automobil - notebook, Evropané, kteří nemají notebook, majitelé automobilu z České republiky, …