1. MATICE A DETERMINANTY

Tento text pojednává o základním popisu a využití matic a determinantů. Některé pojmy jsou zavedeny intuitivně, bez složitých definic. Cílem textu je problematiku matic a determinantů a jejich využití přiblížit pokud možno srozumitelně bez důrazu na striktní přesnost definic.

1.1 Definice matice a základní operace

V této kapitole uvedeme základní informace o maticích a operacích, které je možné s maticemi provádět. Vzhledem k tomu, že tento text je zaměřen na ukázání základní práce s maticemi, nebudou uváděny přesné definice - to není ani bez hlubšího studia (vysokoškolské) algebry možné.

Maticí se rozumí jakási tabulka sestavená obecně z reálných čísel. Tato čísla přitom (viz kapitola 1.6) mohou být např. koeficienty vystupující v soustavě lineárních rovnic.

Matice typu ($\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$) je matice, která má m řádků a n sloupců. Pokud platí $m = n$, hovoříme o čtvercové matici stupně n; jinak se běžně mluví o obdélníkové matici. Na obr. 1 je ukázka matic typu (3, 2), (2, 4) a (4, 4).

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & a \\ -2 & 5 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 9 \\ \pi & 7 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & u \\ 3 & -3 & 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

obr. 1

Obecně lze matici M psát ve tvaru zobrazeném na obr. 2.

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & & & \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & & a_{\mathrm{mn}} \end{pmatrix},$$

obr. 2

kde $a_{\mathrm{ij}} \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Symbol a_{ij} se čte „a í jé“ nebo lépe „a s indexy í jé“.

S maticemi lze provádět základní operace:

1. součet dvou matic **téhož typu** (viz ukázka na obr. 3) - výsledkem je matice **téhož typu** jako sčítané matice, přičemž se sčítají čísla (výrazy) na odpovídajících si pozicích matic;
2. násobek nenulového reálného čísla λ a matice (viz ukázka na obr. 4) - každý prvek matice se vynásobí nenulovým číslem (skalárem) λ;
3. součin matice typu (m, $\boldsymbol{n}$) a ($\boldsymbol{n}$, k), tedy takových matic, z nichž druhá má stejný počet řádků jako má první matice sloupců - násobí se stylem „řádek krát sloupec“ (viz barevně vyznačená ukázka na obr. 5); násobení matic NENÍ KOMUTATIVNÍ.

Nebyl zmíněn rozdíl matic, ale vzhledem k tomu, že umíme násobit matici nenulovým číslem (tj. i číslem -1) a umíme matice sčítat, umíme matice i odčítat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u & 1 \\ \pi & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+u & 4 \\ 5+\pi & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

obr. 3

$$\pi \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\pi & 7\pi & 6\pi & 5\pi \\ 0 & -\pi & 2\pi & -3\pi \end{pmatrix}$$

obr. 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-4)+2\cdot(-1)+3\cdot 6 & 1\cdot(-3)+2\cdot 5+3\cdot(-5) \\ 0\cdot(-4)+(-2)\cdot(-1)+4\cdot 6 & 0\cdot(-3)+(-2)\cdot 5+4\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 26 & -30 \end{pmatrix}$$

obr. 5

Důležitým pojmem a tvarem matice je matice trojúhelníkového.tvaru, která se využívá při řešení soustav rovnic. Nejdříve je nutné znát dva pojmy týkající se matic:

1. **hlavní diagonála** - jsou čísla umístěná v matici na pomyslné úhlopříčce spojující levý horní a pravý dolní roh matice (viz ukázka dvou typů matic na obr. 6);
2. **vedlejší diagonála** - jsou čísla umístěná v matici na pomyslné úhlopříčce spojující levý dolní a pravý horní roh matice (viz ukázka dvou typů matic na obr. 7).

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & a_{34} \end{pmatrix}$$

obr. 6

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

obr. 7

Matice trojúhelníkového tvaru je matice, která má pod hlavní diagonálou nuly, přitom $a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (viz ukázka dvou typů matic na obr. 8).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

obr. 8

Převod obecné matice na matici trojúhelníkového tvaru lze provést pomocí elementárních úprav matic (viz kapitola 1.2).

Matice trojúhelníkové tvaru je důležitá zejména pro:

1. výpočet hodnosti matice (viz kapitola 1.3);
2. řešení soustav rovnic s využitím matic (viz kapitola 1.6).

1.2 Elementární úpravy matic

Tak jako můžeme rovnice, nerovnice a jejich soustavy upravovat pomocí ekvivalentních úprav, jsou podobné úpravy definovány i pro matice. Říká se jim **elementární úpravy** a většinou se pomocí těchto úprav snažíme matici upravit na matici trojúhelníkového tvaru (viz kapitola 1.1).

Elementární úpravy lze provádět jak s řádky tak se sloupci matic, ale při využití matic při hledání řešení soustav rovnic (viz kapitola 1.6) je výrazně doporučeno provádět úpravy **pouze s řádky**!

Elementární úpravy matic jsou tyto:

1. napíšeme řádky (resp. sloupce) matice v jiném pořadí;
2. násobíme některý řádek (resp. sloupec) matice nenulovým číslem;
3. přidáme k matici řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců);
4. vynecháme v matici řádek (resp. sloupec), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců);
5. přičteme k některému řádku (resp. sloupci) matice lineární kombinaci ostatních řádků (resp. sloupců).

Lineární kombinace řádků je možné pro účely tohoto textu chápat jako násobek nějakého řádku matice nenulovým reálným číslem.

Matice, které tímto postupem postupně vznikají, se nazývají **ekvivalentní matice**. Mezi ekvivalentními maticemi je zvykem psát symbol $\sim$, nicméně standardní rovnítko je většinou tolerováno také.

Detailní ukázka elementárních úprav matic: Převeďte matici $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ na matici trojúhelníkového tvaru.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$ vyměníme první a třetí řádek, aby na pozici a_{11} matice bylo číslo 1;

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim$ první řádek necháme na místě, ale vynásobíme ho číslem -2 a přičteme do druhého (takto se standardně u úprav matic postupuje: mezikrok jen po vynásobení daného řádku daným číslem se nepíše);

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \sim$ první řádek necháme na místě, ale vynásobíme ho číslem -5 a přičteme do třetího řádku (tuto a minulou operaci lze po získání větší zkušenosti v elementárních úpravách provést najednou);

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim$ druhý řádek násobíme číslem -1 a přičteme ho k poslednímu řádku;

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Tím jsme získali matici trojúhelníkového tvaru, která je ekvivalentní s původní zadanou maticí.

Tento postup je důležitý jak pro řešení soustav rovnic (viz kapitola 1.6), tak pro určování hodnosti matice (viz kapitola 1.3).

1.3 Hodnost matice

Pomocí hodnosti matice lze např. rozhodnout o počtu kořenů soustavy rovnic; postup řešení soustavy rovnic je popsaný v kapitole 1.6.

HODNOST MATICE M TYPU (m,n) UDÁVÁ MAXIMÁLNÍ POČET LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH ŘÁDKŮ, KTERÝ JE ROVEN MAXIMÁLNÍMU POČTU LINEÁRNĚ NEZÁVISLÝCH SLOUPCŮ DANÉ MATICE. ZNAČÍ SE $h(\mathrm{M})$.

Jinými slovy v matici počítáme ty řádky, které nejsou násobkem jiného řádku a které nejsou nulové.

Hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ je rovna 1, protože druhý řádek je násobkem prvního řádku.

V případě, kdy není možné na první pohled hodnost matice určit, je výhodné vyšetřovanou matici převést na matici trojúhelníkového tvaru.

Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Abychom mohli spočítat nenulové řádky a řádky, které se neliší jen násobkem nenulového reálného čísla, je výhodné matici upravit na trojúhelníkový tvar.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot 5 \\ /\cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ Elementárními úpravami jsme původní matici převedli na matici, u které lze její hodnost snadno určit. Hodnost zadané i ekvivalentní matice je tedy 3.

Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Řešení: Zadanou matici převedeme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} / \cdot (-4) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} / \cdot (-7) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} / \cdot (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Z poslední matice, která je ekvivalentní s původní maticí, vidíme, že její hodnost je dva (matice obsahuje jeden nulový řádek, který se do hodnosti matice nepočítá).

Stejný závěr lze vyvodit i z předposlední matice, jejíž poslední řádek je dvojnásobkem druhého řádku. I tato matice má tedy hodnost 2. Proto má hodnost 2 i původně zadaná matice.

1.4 Jednotková matice

Z hlediska teorie matic má velký význam jednotková matice.

MATICE $\mathrm{E}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ **SE NAZÝVÁ JEDNOTKOVÁ MATICE STUPNĚ** m**.**

Jak vyplývá z definice, jednotkovou matici lze definovat pouze jako čtvercovou. Jedná se o matici, která má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech nuly.

Vynásobíme-li libovolnou jinou matici jednotkovou maticí (pokud je násobení takových matic definováno - viz kapitola 1.1), získáme jako výsledek původní matici.

S využitím jednotkové matice lze definovat inverzní matici (viz 1.5).

1.5 Inverzní matice

Začneme definicí, co to inverzní matice je.

ČTVERCOVÁ MATICE M^{-1}**, PRO KTEROU PLATÍ** $\mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{M} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^{-1} = \mathrm{E}_n$**, SE NAZÝVÁ INVERZNÍ MATICE KE ČTVERCOVÉ MATICI M.**

Označení M^{-1} je pouze symbol, nemá to nic společného se zlomky!

Jak vyplývá z definice, inverzní matici lze definovat pouze pro čtvercové matice. Ačkoliv bylo dříve uvedeno, že násobení matic není obecně komutativní, tak v případě matice a její inverzní matice násobení komutativní je.

Výpočet inverzní matice lze povést dvěma způsoby:

1. přesně podle právě uvedené definice;
2. pomocí „finty" využívající elementární úpravy matic (viz kapitola 1.2) a vlastnosti jednotkové matice.

Oba postupy budou ukázány na konkrétních úlohách.

Najděte inverzní matici k matici $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení: Nejdříve ukážeme výpočet na základě uvedené definice, která využívá násobení dvou matic. Tedy budeme předpokládat, že existuje inverzní matice k matici A ve tvaru $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ taková, která splňují definiční vztah inverzní matice. To znamená, že platí: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Součin matic provedeme dle pravidel uvedených v kapitole 1.1. Dostaneme tedy matici: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3b & a+7b \\ c-3d & c+7d \end{pmatrix}$. Vypočtená matice ale podle definice má být jednotková matice. Můžeme tedy psát $\begin{pmatrix} a-3b & a+7b \\ c-3d & c+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jednotlivé prvky matice, které se nacházejí na odpovídajících si pozicích v matici, se navzájem musejí rovnat. Proto můžeme napsat čtyři rovnice o čtyřech neznámých: $a-3b=1$, $a+7b=0$, $c-3d=0$ a $c+7d=1$. Tuto soustavu postupně vyřešíme.

$a-3b=1$

$a+7b=0$; z této rovnice lze vyjádřit neznámou *a*: $a=-7b$

$c-3d=0$; z této rovnice lze vyjádřit neznámou *c*: $c=3d$

$c+7d=1$

Dosazením do zbývajících rovnic dostaneme rovnice:

$-7b-3b=1$, tedy $b=-\frac{1}{10}$

$3d+7d=1$, tedy $d=\frac{1}{10}$

Dosazením do vyjádřených neznámých *a* a *c* dostaneme: $a=-7\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{10}$ a $c=3\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

Můžeme tedy psát inverzní matici k matici A ve tvaru: $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Tím je inverzní matice vypočtena.

Je zřejmé, že pokud budeme mít matici stupně 3, bude nutné řešit soustavu devíti rovnic a devíti neznámých, v případě matice stupně 4 soustavu 16 rovnic o 16 neznámých, … Proto je právě uvedená metoda ne příliš výhodná. Jako výhodnější a přehlednější se ukazuje metoda využívající jednotkovou matici jinak.

Najděte inverzní matici k matici $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 7\end{pmatrix}$.

<u>Řešení:</u> Nyní budeme postupovat pomocí „finty“ využívající elementární úpravy matic.

Nejdříve si napíšeme jakousi „dvoujmatici“ sestavenou ze zadané matice a z jednotkové matice: $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & 7 & 0 & 1\end{array}\right)$. Pomocí elementárních úprav se nyní budeme snažit v první části „dvojmatice“ získat jednotkovou matici stupně 2. Při prováděných úpravách ale musíme nahlížet na upravovanou „dvojmatici“ jako na jednu matici (např. při násobení řádku, při výměně pořadí řádků, …).

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & 7 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot 3\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 10 & 3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 10 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ /\cdot(-10)\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 10 & 3 & 1\\ -10 & 0 & -7 & 1\end{array}\right)\sim$$

$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 0 & -7 & 1\\ 0 & 10 & 3 & 1\end{array}\right)$. Dvojí výměna řádků, kterou jsme provedli ve třetím kroku a pátém kroku úprav matice, není nutná. Je ale názornější, zejména v případě, že s upravováním matic začínáme. Jinak je možné „sčítat řádky i nahoru“ (a tedy se obejít bez výměny řádků).

Vypadá to, že se už blížíme k cíli. Nyní vynásobíme oba řádky matice tak, abychom v levé části „dvojmatice“ získali jednotkovou matici. Řádky pouze vynásobíme (což můžeme udělat) a nebudeme je už nikam přičítat. Dostaneme tedy:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-10 & 0 & -7 & 1\\ 0 & 10 & 3 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\\ /\cdot\frac{1}{10}\end{array}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10}\\ 0 & 10 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{array}\right)$$

. Dostáváme tedy inverzní matici k zadané matici ve tvaru $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}7 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Tento postup je téměř totožný s úpravou matice při hledání hodnosti matice (viz kapitola 1.3) nebo při hledání řešení rovnic s využitím matic (viz kapitola 1.6). Jediné, čím se v tomto případě liší, je snaha vytvořit v levé části „dvojmatice“ jednotkovou matici.

1.6 Použití matic při řešení soustav rovnic

Významnou roli hrají matice při řešení soustavy rovnic, protože maticový zápis výrazně zpřehlední i zrychlí postup řešení této soustavy a eliminuje možnost vzniku chyby. Zpřehlednění a zjednodušení se projeví zejména u tří a více lineárních rovnic.

1.6.1 Definice dvou matic

Využití matic při hledání řešení soustavy lineárních rovnic musíme začít definicí základních pojmů.

Uvažujme tedy soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$, kterou lze psát ve tvaru:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m , \end{gathered}$$

obr. 9

kde $a_{ij}, b_1, b_2, ..., b_m \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$.

Obecně tedy budeme uvažovat případ, kdy počet rovnic nemusí být roven počtu neznámých. V aplikačních předmětech, kde se tato metoda velmi často využívá, ale většinou nastává situace, kdy počet neznámých je stejný jako počet lineárních rovnic.

SOUSTAVA ROVNIC (VIZ OBR. 9) SE NAZÝVÁ HOMOGENNÍ, JESTLIŽE $b_i = 0$ PRO $i = 1, 2, ..., m$. SOUSTAVA ROVNIC SE NAZÝVÁ NEHOMOGENNÍ, JESTLIŽE $b_i \neq 0$ ALESPOŇ PRO JEDEN INDEX $i = 1, 2, ..., m$.

Jedná se pouze o terminologii. Homogenní soustava je taková, jejíž všechny rovnice mají na pravé straně nulu. Pokud alespoň v jedné rovnici je pravá strana nenulová, jedná se o nehomogenní soustavu rovnic.

Abychom mohli tuto soustavu rovnic řešit pomocí matic, je nutné definovat dvě matice vycházející ze soustavy rovnic zobrazené na obr. 9.

MATICE $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ **SE NAZÝVÁ MATICE SOUSTAVY ROVNIC.**

MATICE $\mathrm{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ **SE NAZÝVÁ ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY ROVNIC.**

Matice A tedy obsahuje pouze koeficienty stojící před jednotlivými neznámými. Matice A^* ještě navíc obsahuje i čísla stojící na pravé straně příslušné rovnice.

Pravé strany bývá zvykem v matici A^* oddělovat svislou přerušovanou čarou, aby se snáze oddělily obě matice.

1.6.2 Frobeniova věta

Na základě hodnosti matice A soustavy rovnic a hodnosti rozšířené matice A^* soustavy rovnic je možné určit počet řešení dané **nehomogenní soustavy rovnic** pomocí tzv. **Frobeniovy věty** pojmenované po německém matematikovi Ferdinandu Georgovi Frobeniovi (1849 - 1917).

FROBENIOVA VĚTA: NEHOMOGENNÍ SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC MÁ ALESPOŇ JEDNO ŘEŠENÍ, JESTLIŽE $h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A}^*)$. DÁLE PLATÍ:

$h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A}^*) = n$ - SOUSTAVA ROVNIC MÁ PRÁVĚ JEDNO ŘEŠENÍ;

$h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A}^*) < n$ - SOUSTAVA ROVNIC MÁ NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ;

$h(\mathrm{A}) \neq h(\mathrm{A}^*)$ - SOUSTAVA ROVNIC NEMÁ ŽÁDNÉ ŘEŠENÍ.

Homogenní soustava rovnic má vždy tzv. netriviální řešení, (tj. alespoň jedna z neznámých je nenulová), právě tehdy když $h(\mathrm{A}) < n$.

To tedy znamená, že při výpočtu budeme muset určit hodnosti obou uvažovaných matic. Jak bylo ukázáno (viz kapitola 1.3), stačí zadanou matici upravit na trojúhelníkový tvar. Ten stejně budeme potřebovat k vyřešení soustavy rovnic pomocí tzv. Gaussovy eliminační metody (viz kapitola 1.6.3).

1.6.3 Gaussova eliminační metoda

Postup, kterým je možné pomocí maticového zápisu vyřešit soustavu *m* rovnic o *n* neznámých, formuloval německý matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Na jeho počest se tato metoda nazývá **Gaussova eliminační metoda**. Tuto metodu aplikujeme v několika krocích:

1. Pomocí elementárních úprav převedeme matici A soustavy rovnic a rozšířenou matici A^* soustavy rovnic na matice trojúhelníkového tvaru.
2. Pomocí Frobeniovy věty určíme počet řešení zadané soustavy.
3. Má-li soustava řešení, pak $m - n$ neznámých (je-li $m - n > 0$) zvolíme jako parametr. Pokud je $m = n$ tento krok odpadá.
4. Pomocí tzv. **zpětného chodu** metody dopočítáme jednotlivé neznámé. Přitom postupujeme „odspodu“ matice trojúhelníkového tvaru: vypočítáme neznámou a dosadíme do rovnice o řádek výše.

Metodu ukážeme na konkrétních úlohách, které vyřešíme.

Řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic: $2x - y + 2z = 5$, $x + y - z = 2$ a $x + 2y - z = -1$.

<u>Řešení:</u> Nejdříve vytvoříme obě příslušné matice, pomocí kterých lze soustavu rovnic vyřešit (viz kapitola 1.6.1). Výhodou je, že můžeme upravovat pouze rozšířenou matici soustavy, protože tím současně upravujeme i matici bez pravých stran rovnic. Po získání trojúhelníkového tvaru pak ale určíme hodnosti obou matic.

Do matice tedy zapíšeme koeficienty vystupující v zadaných rovnicích u jednotlivých neznámých a koeficienty pravých stran. Získáme tak matici $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$. V ní před dalšími úpravami vyměníme první a druhý řádek; budou se jednodušeji provádět elementární úpravy. **NEBUDEME VYMĚŇOVAT SLOUPCE, PROTOŽE BYCHOM ZAVEDLI ZMATEK DO NEZNÁMÝCH!** Takto je jasné, že v prvním sloupci matice jsou koeficienty vystupující ve všech rovnicích u *x*, ve druhém sloupci koeficienty u *y* a ve třetím sloupci koeficienty u *z*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-2); /\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /\cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

Získali jsme matici v trojúhelníkovém tvaru. Nyní se podíváme na hodnost matice A soustavy a na hodnost rozšířené matice A^* soustavy rovnic. Vzhledem k tomu, že platí

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ a } \mathrm{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right),$$

je $h(\mathrm{A}) = h(\mathrm{A}^*) = 3$ a zadaná soustava rovnic má jediné řešení.

Nyní použijeme tzv. zpětný chod.

Z posledního řádku upravené rozšířené matice soustavy lze vyčíst rovnici $4z=-8$, tedy z = -2. Z druhého řádku rozšířené matice soustavy lze sestavit rovnici $-3y+4z=1$. Z ní vyjádříme neznámou y a dosadíme do ní již vypočtenou hodnotu neznámé z. Dostaneme tedy: $y=\frac{4z-1}{3}=\frac{4\cdot(-2)-1}{3}=-3$. Na prvním řádku rozšířené matice soustavy máme rovnici $x+y-z=2$. Z ní vyjádříme neznámou x a ostatní již vypočtené neznámé dosadíme. Získáme tedy: $x=2-y+z=2-(-3)+(-2)=3$.

Můžeme napsat závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}^3$, $\mathrm{P}=\{[3;-3;-2]\}$.

Řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic: $k+3l-m=1$, $2k-l-2m=4$ a $k+2l-m=-1$.

Řešení: Rozšířená matice soustavy je: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$. Tu upravíme na trojúhelníkový tvar pomocí elementárních úprav:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)/\cdot(-2);/\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)/\cdot(-7) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{A}^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$ a $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, je $h(\mathrm{A}^*)=3$ a $h(\mathrm{A})=2$.

Zadaná soustava rovnic tedy nemá řešení.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}^3$, $\mathrm{P}=\emptyset$.

Řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic: $-p-q+r=1$, $p-3q-5r=-9$ a $p-2r=-3$.

Řešení: Rozšířená matice soustavy je: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right)$. Tu následně upravíme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)/\cdot(-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\mathrm{A}^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ a $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, je $h(\mathrm{A}^*)=h(\mathrm{A})=2$.

Hodnosti obou matic jsou stejné, soustava má tedy řešení. Hodnosti matic jsou ale menší, než je počet neznámých, proto má soustava nekonečně mnoho řešení. Ale **řešením není libovolná trojice reálných čísel**, ale pouze ty trojice, které vyhovují určitým podmínkám.

Budeme postupovat podle návodu uvedeného v úvodu této kapitoly.

Poslední řádek upravené matice můžeme vynechat - obsahuje samé nuly. Jednu z neznámých (většinou ta, jíž odpovídající koeficienty jsou v posledním sloupci upravované matice) zvolíme jako parametr. V našem případě to bude neznámá r a pomocí ní vyjádříme zbývající dvě neznámé.

Druhý řádek upravené matice přepíšeme do rovnice ve tvaru $-4q-4r=-8$. Odtud vyjádříme neznámou q ve tvaru: $q=2-r$. První řádek matice odpovídá rovnici $-p-q+r=1$, z níž vyjádříme neznámou p ve tvaru: $p=-1-q+r$. Po dosazení vyjádřené neznámé q dostaneme: $p=-1-(2-r)+r=-3+2r$.

Tak máme dvě neznámé vyjádřené pomocí zvolené neznámé r.

Můžeme napsat závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{P} = \{[-3+2r; 2-r; r]; r \in \mathbb{R}\}$.

Množina P tak obsahuje nekonečně mnoho uspořádaných trojic (díky tomu, že vybíráme libovolné reálné r), ale tyto trojice čísel mají určitou strukturu a nejsou to tři náhodně volená reálná čísla.

1.7 Determinant matice

Determinant matice je číslo, které je každé **čtvercové** matici přiřazeno na základě určitého výpočtu. Slovo *determinant* v současném významu poprvé použil v roce 1812 francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857).

Determinant matice M se značí $\det \mathrm{M}$ nebo též $|\mathrm{M}|$ (stejný symbol, jaký se používá k označení absolutní hodnoty).

Nejdříve se seznámíme s výpočtem tohoto čísla (viz kapitoly 1.7.1 až 1.7.3), poté si ukážeme jeho využití v praxi (viz kapitola 1.7.4).

1.7.1 Výpočet determinantu matice prvního a druhé stupně

Výpočet determinantů ukážeme postupně na maticích stupně 1, 2, 3 a vyššího než tři.

Determinant matice prvního stupně $\mathrm{A} = (a_{11})$ **je roven** $|\mathrm{A}| = a_{11}$.

Determinant matice druhého stupně $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ **je roven** $|\mathrm{B}| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Pro výpočet tedy použijeme „křížové pravidlo“: $|\mathrm{B}| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$..

Vypočítejte determinant matice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Řešení: $|\mathrm{M}| = \left|\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\right| = 3 \cdot (-5) - 1 \cdot (-2) = -15 + 2 = -13$.

1.7.2 Výpočet determinantu matice třetího stupně

Determinant matice třetího stupně $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ **je roven**

$$|\mathrm{C}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}. \qquad (1)$$

Tento způsob výpočtu zavedl v roce 1833 francouzský matematik Pierre Frédéric Sarrus (1798 - 1861), a proto se mu říká **Sarrusovo pravidlo** pro výpočet determinantů třetího stupně.

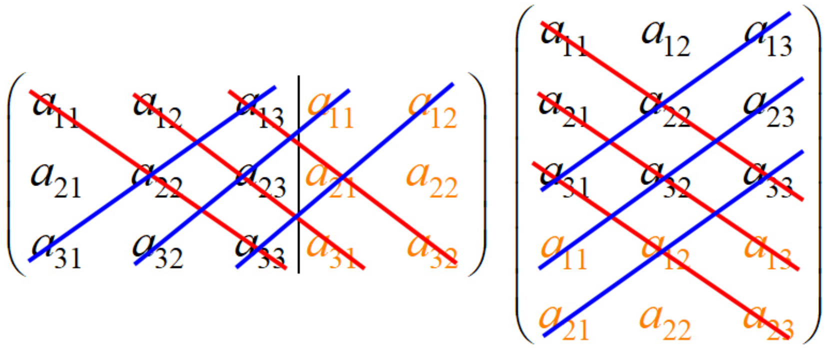
Pamatovat si tento postup výpočtu ve formě vztahu (1) je zbytečné, existuje totiž několik mnemotechnických pomůcek, jak si tento vztah zapamatovat a jak s ním počítat. Uvedeme dvě z těchto pomůcek.

První mnemotechnická pomůcka vychází z umístnění jednotlivých činitelů vystupujících v Sarrusově pravidle v matici. Matici C zobrazíme ve dvou provedeních a barevně odlišíme její jednotlivé prvky (viz obr. 10). Pak můžeme Sarrusovo pravidlo (1) psát barevně odlišené ve tvaru: $|\mathrm{C}| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

obr. 10

Druhá mnemotechnická pomůcka vyžaduje přidání buď dvou sloupců, nebo dvou řádků k původní matici (viz obr. 11). Pak můžeme Sarrusovo pravidlo (1) psát s využitím „křížového pravidla“: $|\mathrm{C}| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$.



obr. 11

Vypočtěte determinant matice $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení: Použitou vizualizaci matice necháváme na výběr čtenáři. Pro determinant matice N pak lze postupně psát: $|\mathrm{N}| = 0\cdot 4\cdot 5 + 1\cdot(-3)\cdot(-1) + 2\cdot(-5)\cdot(-2) - (-1)\cdot 4\cdot 2 - (-2)\cdot(-3)\cdot 0 - 5\cdot(-5)\cdot 1 =$ $= 0 + 3 + 20 + 8 - 0 + 25 = 56$.

1.7.3 Výpočet determinantu matice stupně vyššího než tři

Metodami, které budou popsané v této kapitole, lze počítat i determinanty matic nižších stupňů, ale je to zbytečné a velmi pracné. Pro matice nižších stupňů než čtyři je velmi výhodné používat metody popsané v kapitolách 1.7.1 a 1.7.2.

Na úvod je nutné znát vlastnosti determinantu:

1. determinant jednotkové matice je roven 1;
2. výměnou libovolných dvou řádků matice se změní znaménko jejího determinantu;
3. má-li matice libovolné dva řádky stejné, pak její determinant je nulový;
4. vynásobením libovolného řádku matice nenulovým reálným číslem λ se determinant příslušné matice zvýší λ-krát;
5. determinant singulární matice je nulový, determinant regulární matice je nenulový.

Poslední bod lze chápat i jako definici toho, co to je singulární matice a co je regulární matice.

Determinant matice vyšších stupňů lze počítat dvěma způsoby:

1. součin prvků na hlavní diagonále trojúhelníkové matice;
2. rozvoj determinantu podle zvoleného sloupce (resp. řádku).

Oba postupy nyní ukážeme.

1.7.3.1 Součin prvků na hlavní diagonále trojúhelníkové matice

Abychom mohli použít tuto metodu, je nutné matici, jejíž determinant počítáme, pomocí elementárních úprav upravit na matici trojúhelníkového tvaru. Při úpravách ale musíme dávat pozor na to, abychom neměnili hodnotu determinantu!

Při některých elementárních úpravách matice, jejíž determinant počítáme, je nutné provádět dodatečné korekce:

1. **vyměníme-li** v matici, jejíž determinant počítáme, libovolné **dva řádky**, **je nutné** determinant **násobit číslem mínus jedna**;
2. násobíme-li řádek matice, který **nepřičítáváme** do jiného řádku, nenulovým reálným číslem λ, **je nutné** determinant číslem λ **dělit**;
3. násobíme-li řádek matice, který **přičítáme** do jiného řádku, nenulovým reálným číslem λ, **žádné korekce** determinantu **neprovádíme**.

Je-li matice upravena do trojúhelníkového tvaru, vynásobíme prvky na hlavní diagonále, započteme případné korekce a máme hodnotu determinantu dané matice vypočtenou.

Na první pohled složitě vypadající postup ukážeme na konkrétních úlohách.

Vypočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení: Budeme postupovat v souladu s uvedenými pravidly. Pomocí elementárních úprav, při kterých je nutné zohlednit násobení řádku, do něhož přičítáme jiný řádek, převedeme matici na tvar, ve kterém jsou pod hlavní diagonálou nuly.

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} /\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} =$ první řádek vynásobíme a postupně ho přičteme do všech ostatních řádků; žádné korekce nejsou nutné, protože jsme násobili řádek, který přičítáme k jinému řádku;

$= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right| = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ provedenou úpravou jsme rovnou získali matici v požadovaném tvaru, proto můžeme hodnotu determinantu získat tak, že vynásobíme prvky na hlavní diagonále.

Vypočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Budeme postupovat podobně jako v minulé úloze.

$\frac{1}{-2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \\ /\cdot(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} =$ násobíme řádek, do kterého budeme přičítat první řádek, proto musíme číslem, kterým násobíme, determinant dělit (jinak bychom hodnotu determinantu navýšili);

$= \frac{1}{-2\cdot(-2)}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ /\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} =$ stejný postup uděláme se třetím řádkem;

$= \frac{1}{4\cdot(-2)}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ \\ /\cdot(-2) \end{matrix} =$ a totéž i se čtvrtým řádkem;

$= \frac{1}{-8\cdot(-3)\cdot(-3)}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ /\cdot(-3) \\ /\cdot(-3) \end{matrix} =$ poslední dva řádky násobíme tak, abychom mohli získat nuly ve druhém sloupci; vzhledem k tomu, že násobíme řádky, do kterých přičítáme druhý řádek, je nutné provést korekci na hodnotu determinantu vydělením příslušných čísel;

$$=\frac{1}{-8\cdot 9\cdot(-4)}\cdot\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&-3&-1&-1\\0&0&8&2\\0&0&2&8\end{pmatrix}\end{vmatrix}/\cdot(-4)$$ = násobíme poslední řádek, do kterého budeme přičítat třetí řádek, proto je nutná korekce;

$$=\frac{1}{32\cdot 9}\cdot\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&-3&-1&-1\\0&0&8&2\\0&0&0&-30\end{pmatrix}\end{vmatrix}=\frac{2\cdot(-3)\cdot 8\cdot(-30)}{32\cdot 9}=5$$ pod hlavní diagonálou jsme získali nuly a můžeme tedy spočítat hodnotu determinantu; nesmíme ale zapomenout na provedené korekce.

1.7.3.2 ***Rozvoj podle daného řádku resp. sloupce matice***

Rozvoj podle daného řádku matice resp. rozvoj podle daného sloupce matice jsou principiálně stejné. Tento postup je vhodný pro výpočet determinantů matic, v nichž v některém řádku nebo sloupci převažují nuly. Při výpočtu determinantu matice stupně n touto metodou je totiž nutné vypočítat n determinantů stupně n - 1.

Nechť je dána matice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n-1}&a_{1n}\\\vdots&&&&\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in-1}&a_{in}\\\vdots&&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn-1}&a_{nn}\end{pmatrix}$. **Pro determinant matice M lze psát rozvoj podle** i**-tého řádku:**

$$|\mathrm{M}|=a_{i1}\cdot(-1)^{i+1}\cdot|\mathrm{M}_{i1}|+a_{i2}\cdot(-1)^{i+2}\cdot|\mathrm{M}_{i2}|+\ldots+a_{in-1}\cdot(-1)^{i+n-1}\cdot|\mathrm{M}_{in-1}|+a_{in}\cdot(-1)^{i+n}\cdot|\mathrm{M}_{in}|;\qquad(2)$$

Symbol $|\mathrm{M}_{ij}|$ **označuje determinant submatice matice M, která vznikne z matice M vynecháním** i**-tého řádku a** j**-tého sloupce (pro** $j=1,2,\ldots,n$**).**

Konkrétně:

$|\mathrm{M}_{i1}|$ - determinant matice, z níž oproti matici M vynecháme i-tý řádek a první sloupec;

$|\mathrm{M}_{i2}|$ - determinant matice, z níž oproti matici M vynecháme i-tý řádek a druhý sloupec;

…

$|\mathrm{M}_{in}|$ - determinant matice, z níž oproti matici M vynecháme i-tý řádek a n-tý sloupec.

Tím jsme vypočítali determinant matice M pomocí rozvoje podle i-tého řádku.

Analogicky lze vypočítat determinant matice M pomocí rozvoje podle j-tého sloupce vztahem:

$$|\mathrm{M}|=a_{1j}\cdot(-1)^{1+j}\cdot|\mathrm{M}_{1j}|+a_{2j}\cdot(-1)^{2+j}\cdot|\mathrm{M}_{2j}|+\ldots+a_{n-1j}\cdot(-1)^{n-1+j}\cdot|\mathrm{M}_{n-1j}|+a_{nj}\cdot(-1)^{n+j}\cdot|\mathrm{M}_{nj}|.\qquad(3)$$

Obě metody výpočtu ukážeme na řešených úlohách.

Vypočtěte determinant matice $\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&3&0&0\\-3&4&3&-4\\0&5&-1&3\end{pmatrix}$.

<u>Řešení:</u> Podíváme-li si na zadanou matici, zaujme jistě druhý řádek, který je tvořen jedním nenulovým číslem a třemi nulami. Matice je přitom čtvrtého stupně, takže pokud uděláme rozvoj právě podle druhého řádku, budou se v rozvoji vyskytovat determinanty třetího stupně, které umíme řešit pomocí Sarrusova pravidla (viz vztah (1) v kapitole 1.7.2). Sledujme výpočet podle vztahu (2).

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 3\cdot\left(1\cdot3\cdot3 + 0\cdot(-4)\cdot0 + (-1)\cdot(-3)\cdot(-1) - 0\cdot3\cdot(-1) - (-1)\cdot(-4)\cdot1 - 3\cdot(-3)\cdot0\right) + 0 + 0 =$$

$$= 3\cdot(9-3-4) = 6$$

Vypočtěte determinant matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Řešení:</u> Na první pohled je nápadný třetí sloupec, který má pouze jeden nenulový prvek. Proto uděláme rozvoj podle tohoto třetího sloupce (viz vztah (3)).

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right| = 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 0+0+0+2\cdot\left(1\cdot3\cdot(-4) + 4\cdot3\cdot(-1) + (-1)\cdot2\cdot2 - (-1)\cdot3\cdot(-1) - 3\cdot2\cdot1 - (-4)\cdot4\cdot2\right) =$$

$$= 2\cdot(-12-12-4-3-6+32) = 2\cdot(-5) = -10$$

1.7.4 <u>Cramerovo pravidlo pro řešení soustav lineárních rovnic</u>

Význam determinantů spočívá v jejich použití při řešení soustavy rovnic. Kromě Gaussovy eliminační metody (viz kapitola 1.6.3) je možné k řešení soustavy n rovnic o n neznámých použít **Cramerovo pravidlo** publikované švýcarským matematikem Gabrielem Cramerem (1704 - 1752) v roce 1750.

Abychom mohli použít Cramerovo pravidlo, které využívá determinantů, musíme řešit soustavu tolika rovnic, kolik je v nich neznámých. Determinanty lze totiž definovat pouze pro čtvercové matice!

Při označení definovaném v kapitole 1.6.1 lze psát:

PRO NEZNÁMOU x_i ($i = 1, 2, ..., n$) PLATÍ

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \tag{4}$$

KDE D JE DETERMINANT MATICE SOUSTAVY A D_i JE DETERMINANT MATICE, KTEROU ZÍSKÁME ZÁMĚNOU i-TÉHO SLOUPCE MATICE SOUSTAVY SLOUPCEM PRAVÝCH STRAN.

Nicméně tato metoda není v praxi příliš použitelná. K vyřešení soustavy n rovnic o n neznámých je totiž zapotřebí spočítat $n+1$ determinantů matic stupně n. A to s přihlédnutím k metodám výpočtu determinantů matic vyšších stupňů (viz kapitola 1.7.3) nemusí být rychlé.

Na základě Cramerova pravidla (případně jeho vylepšení) lze ale poměrně snadno napsat algoritmus využitelný v různých počítačových programech zaměřených na matematické operace.

Užití této metody ukážeme na soustavě dvou rovnic o dvou neznámých, pro kterou pochopitelně existují výrazně jednodušší metody řešení.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $2x-3y=5$ a $4x+5y=-1$.

Řešení: Dříve, než budeme řešit danou soustavu, připravíme si příslušné determinanty:

$$D=\left|\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}\right|=2\cdot 5-4\cdot(-3)=22$$

$$D_1=\left|\begin{pmatrix}5 & -3\\ -1 & 5\end{pmatrix}\right|=5\cdot 5-(-1)\cdot(-3)=22$$

$$D_2=\left|\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right|=2\cdot(-1)-4\cdot 5=-22$$

Nyní můžeme vypočítat jednotlivé neznámé: $x=x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{22}{22}=1$ a $y=x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-22}{22}=-1$.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}^2$, $\mathrm{P}=\{[1;-1]\}$