© Jaroslav Reichl

Lineární rovnice s parametrem

Řešte v R rovnici s neznámou x a reálným parametrem a: $a(ax-5)+a=3(3x+4)$.

Řešení: Při řešení lineární rovnice s parametrem postupujeme tak, jako při řešení jakékoliv jiné lineární rovnice, tj. snažíme se osamostatnit na jednu stranu rovnice členy, které obsahují x, a na druhou ty ostatní.
Postupně pomocí ekvivalentních úprav dostáváme z původní rovnice:

$$a^2x-5a+a=9x+12$$
$$a^2x-9x=4a+12$$
$$x\left(a^2-9\right)=4a+12$$
$$x(a-3)(a+3)=4(a+3)$$

Nyní zbývá „už jen“ vyjádřit x, tj. celou rovnice vydělit výrazem $(a-3)(a+3)$. **A to je právě chyba!!!** Dělit takto bezmyšlenkovitě nelze, neboť ***a* je reálný** parametr (viz zadání rovnice), který nám někdo (třeba až dodatečně) zadá. A co když zadá třeba 3? Nebo -3? Tak jsme v průšvihu, neboť uvažovanou úpravou bychom celou rovnici dělili nulou. **A to nemůžeme!!!** Takže musíme postupovat opatrněji a uvažovat všechny „katastrofické“ možnosti, které mohou připadat v úvahu.

Řešení rovnice $x(a-3)(a+3)=4(a+3)$ tedy rozdělíme na několik případů:

$$x(a-3)(a+3)=4(a+3)$$

<table>
<tr><td rowspan="2">$a=3$</td><td colspan="2">$a\neq 3$</td></tr>
<tr><td>$a=-3$</td><td>$a\neq -3$</td></tr>
<tr><td>$x(3-3)(3+3)=4(3+3)$
$0.x=24$
rovnice nemá žádné řešení, tedy $P_1=\emptyset$</td><td>$x(-3-3)(-3+3)=4(-3+3)$
$0.x=0$
rovnice má nekonečně mnoho řešení a tedy $P_2=R$</td><td>$x(a-3)(a+3)=4(a+3)$
$x=\frac{4}{a-3}$
rovnice má jediné řešení a tedy $P_3=\left\{\frac{4}{a-3}\right\}$</td></tr>
</table>

Na závěr už jen přehledně zapíšeme ODP:

Závěr:

$O=R$

$D=R$

$a=3 \quad \Rightarrow \quad P_1=\emptyset$

$a=-3 \quad \Rightarrow \quad P_2=R$

$a\neq 3 \wedge a\neq -3 \quad \Rightarrow \quad P_3=\left\{\frac{4}{a-3}\right\}$