Lineární rovnice s absolutní hodnotou

Řešte v množině reálných čísel rovnici $|x+2|-|x+5|+2x=9-|6-2x|$.

Řešení:

Při řešení rovnice s absolutní hodnotou je nutné převést zadanou rovnici na rovnici bez absolutních hodnot. Proto je vhodné si pro začátek připomenout, jak „se zbavíme" absolutních hodnot v zadané rovnici. Využijeme definici absolutní hodnoty:

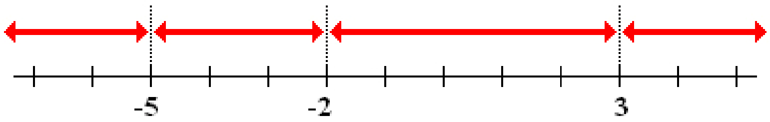
1. absolutní hodnota z nezáporného čísla je rovna danému číslu (např. $|7|=7$),
2. absolutní hodnota ze záporného čísla je rovna číslu opačnému k číslu zadanému, neboť absolutní hodnota každého čísla je vždy nezáporná (např. $|-7|=7$, což ale pomocí „**-7**" zapíšeme $|-7|=-(-7)=7$).

Po připomenutí definice absolutní hodnoty, můžeme začít řešit zadanou úlohu.

Nejprve najdeme tzv. **nulové body** absolutních hodnot, tj. body, pro které jsou výrazy v jednotlivých absolutních hodnotách rovny nule:

1. pro absolutní hodnotu $|x+2|$ je nulovým bodem -2 (zdůvodnění: $x+2=0 \;\Rightarrow\; x=-2$)
2. pro absolutní hodnotu $|x+5|$ je nulovým bodem -5 (zdůvodnění: $x+5=0 \;\Rightarrow\; x=-5$)
3. pro absolutní hodnotu $|6-2x|$ je nulovým bodem 3 (zdůvodnění: $6-2x=0 \;\Rightarrow\; x=3$)

Tím se množina reálných čísel, v níž zadanou úlohu řešíme, „rozpadla" na čtyři intervaly: $(-\infty;-5)$, $\langle -5;-2)$, $\langle -2;3)$ a $\langle 3;\infty)$ (viz ***obr. 1***).



obr. 1

Skutečnost, že se u krajních bodů intervalů (tj. u nulových bodů absolutních hodnot) střídají „kulaté" a „špičaté" závorky je dána zčásti domluvou matematiků, z části nutností, aby získané výsledky byly korektní. Podstatné je, že když uděláme sjednocení všech intervalů, na které se množina, v níž danou úlohu řešíme, rozpadne, **NESMÍ** v ní chybět žádný bod! Sjednocením těchto intervalů tedy musíme dostat opět původní množinu, v níž úlohu řešíme!

Na těchto intervalech nyní budeme úlohu řešit a rovnici vyřešíme na každém intervalu zvlášť. Pro snadnější a rychlejší další postup je vhodné si připravit tabulku, do níž si rozepíšeme absolutní hodnoty ze zadané úlohy na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty;-5)$	$\langle -5;-2)$	$\langle -2;3)$	$\langle 3;\infty)$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$\|x+5\|$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$	$x+5$
$\|6-2x\|$	$6-2x$	$6-2x$	$6-2x$	$-6+2x$

Rozpis v tabulce provádíme podle úvodního připomenutí definice absolutní hodnoty. Do výrazu dané absolutní hodnoty dosadíme libovolné číslo z **INTERVALU, NA KTERÉM PRÁVĚ ABSOLUTNÍ HODNOTU VYŠETŘUJEME**. Vyjde-li výraz **UVNITŘ** absolutní hodnoty (tj. vnitřek „svislých závorek") kladný, necháme výraz beze změny, vyjde-li výraz záporný, změníme u všech členů výrazu znaménka na opačná.

Nyní můžeme na jednotlivých intervalech vyřešit zadanou rovnici Absolutní hodnoty přepíšeme podle právě vyplněné tabulky:

a) $x \in (-\infty; -5)$

$$-x-2-(-x-5)+2x=9-(6-2x)$$
$$-x-2+x+5+2x=9-6+2x$$
$$0x=0$$

Ačkoliv by se na první pohled mohlo zdát, že řešením rovnice jsou všechna reálná čísla, je nutné postupovat opatrně! Uvědomme si, že rovnici neřešíme v množině reálných čísel, ale jen na intervalu $(-\infty; -5)$. Proto jsou řešením pouze čísla z tohoto intervalu, tj. $P_1 = (-\infty; -5)$.

b) $x \in \langle -5; -2)$

$$-x-2-(x+5)+2x=9-(6-2x)$$
$$-x-2-x-5+2x=9-6+2x$$
$$-2x=10$$
$$x=-5$$

Tento kořen patří do intervalu, v němž rovnici řešíme, a proto $P_2 = \{-5\}$.

Právě zde je vidět nutnost dbát velké opatrnosti při dělení množiny reálných čísel na intervaly, v nichž potom rovnici řešíme. Pokud bychom špatně zvolili to, zda krajní body do daného intervalu patří nebo nepatří, mohl by kořen -5 z množiny všech řešení zadané rovnice „vypadnout“! A to by bylo špatně!

c) $x \in \langle -2; 3)$

$$x+2-(x+5)+2x=9-(6-2x)$$
$$x+2-x-5+2x=9-6+2x$$
$$0x=6$$

Tato rovnice nemá řešení ani v množině reálných čísel a tedy ani v tomto intervalu. Proto $P_3 = \emptyset$.

d) $x \in \langle 3; \infty)$

$$x+2-(x+5)+2x=9-(-6+2x)$$
$$x+2-x-5+2x=9+6-2x$$
$$4x=18$$
$$x=4{,}5$$

Tento kořen do intervalu $\langle 3; \infty)$ patří, proto $P_4 = \{4{,}5\}$.

Nyní uděláme sjednocení všech oborů pravdivosti dané rovnice, které jsme získali na jednotlivých intervalech. Máme tedy: $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 = (-\infty; -5) \cup \{-5\} \cup \emptyset \cup \{4{,}5\} = (-\infty; -5\rangle \cup \{4{,}5\}$.

<u>Závěr:</u> $O = D = \mathbb{R}$, $P = (-\infty; -5\rangle \cup \{4{,}5\}$