Lineární funkce s absolutní hodnotou

Sestrojte graf funkce $f: y = 2|x-5| + |3x+9| - |1-x| - 15$.

Řešení:

Máme sestrojit graf funkce s absolutní hodnotou. Dříve než přistoupíme k sestrojování grafu, musíme si uvědomit, jakým způsobem „se zbavíme“ absolutních hodnot v zadání. Využijeme při tom definici absolutní hodnoty:

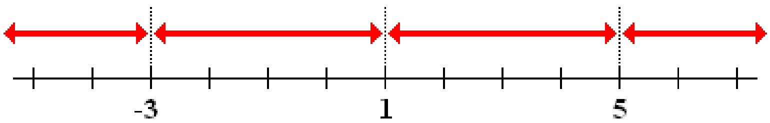
1. absolutní hodnota z nezáporného čísla je rovna danému číslu (např. $|7| = 7$),
2. absolutní hodnota ze záporného čísla je rovna číslu opačnému k číslu zadanému, neboť absolutní hodnota každého čísla je vždy nezáporná (např. $|-7| = 7$, což ale pomocí „**-7**“ zapíšeme $|-7| = -(-7) = 7$).

Po připomenutí definice absolutní hodnoty, můžeme začít řešit zadanou úlohu.

Nejprve zjistíme, ve kterých bodech se výrazy v absolutní hodnotě vynulují - tj. najdeme tzv. **nulové body** absolutních hodnot:

1. pro absolutní hodnotu $|x-5|$ je nulovým bodem 5 (zdůvodnění: $x - 5 = 0 \;\Rightarrow\; x = 5$)
2. pro absolutní hodnotu $|3x+9|$ je nulovým bodem -3 (zdůvodnění: $3x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3$)
3. pro absolutní hodnotu $|1-x|$ je nulovým bodem 1 (zdůvodnění: $1 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$)

Tím se množina reálných čísel, v níž zadanou úlohu řešíme, „rozpadla“ na 4 části - intervaly: $(-\infty; -3)$, $\langle -3; 1)$, $\langle 1; 5)$ a $\langle 5; \infty)$ (viz *obr.* 1).



obr. 1

Skutečnost, že se u krajních bodů intervalů (tj. u nulových bodů absolutních hodnot) střídají „kulaté“ a „špičaté“ závorky je dána zčásti domluvou matematiků, z části nutností, aby získané výsledky byly korektní. Podstatné je, že když uděláme sjednocení všech intervalů, na které se množina, v níž danou úlohu řešíme, rozpadne, **NESMÍ** v ní chybět žádný bod! Sjednocením těchto intervalů tedy musíme dostat opět původní množinu, v níž úlohu řešíme!

Na těchto intervalech nyní budeme úlohu řešit a funkci vyšetříme na každém intervalu zvlášť. Pro snadnější a rychlejší další postup je vhodné si připravit tabulku, do níž si rozepíšeme absolutní hodnoty ze zadané úlohy na jednotlivých intervalech:

	$(-\infty; -3)$	$\langle -3; 1)$	$\langle 1; 5)$	$\langle 5; \infty)$
$\lvert x-5 \rvert$	$-x + 5$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$\lvert 3x+9 \rvert$	$-3x - 9$	$3x + 9$	$3x + 9$	$3x + 9$
$\lvert 1-x \rvert$	$1 - x$	$1 - x$	$-1 + x$	$-1 + x$

Rozpis v tabulce provádíme podle úvodního připomenutí definice absolutní hodnoty. Do výrazu dané absolutní hodnoty dosadíme libovolné číslo z **INTERVALU, NA KTERÉM PRÁVĚ ABSOLUTNÍ HODNOTU VYŠETŘUJEME**. Vyjde-li výraz **UVNITŘ** absolutní hodnoty (tj. vnitřek „svislých závorek“) kladný, necháme výraz beze změny, vyjde-li výraz záporný, změníme u všech členů výrazu znaménka na opačná.

Nyní můžeme na jednotlivých intervalech napsat předpisy dílčích funkcí, z nichž bude graf funkce *f* složen. To znamená, že rozepíšeme absolutní hodnoty v předpisu funkce *f* podle právě vyplněné tabulky:

a) $x \in (-\infty; -3)$: $f_1 : y = 2(-x+5)+(-3x-9)-(1-x)-15 = -2x+10-3x-9-1+x-15 = -4x-15$

b) $x \in \langle -3; 1)$: $f_2 : y = 2(-x+5)+(3x+9)-(1-x)-15 = -2x+10+3x+9-1+x-15 = 2x+3$

c) $x \in \langle 1; 5)$: $f_3 : y = 2(-x+5)+(3x+9)-(-1+x)-15 = -2x+10+3x+9+1-x-15 = 5$

d) $x \in \langle 5; \infty)$: $f_4 : y = 2(x-5)+(3x+9)-(-1+x)-15 = 2x-10+3x+9+1-x-15 = 4x-15$

Na základě předpisů funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4 můžeme nakreslit jejich grafy do kartézské soustavy souřadnic (viz *obr.* 2). Vzhledem k tomu, že se jedná o funkce lineární nebo konstantní, je jejich vykreslení snadné: stačí na každém intervalu, na které se řešení úlohy rozpadlo, zvolit dva body na ose *x* a dopočítat podle příslušného předpisu funkce (tj. předpis na daném intervalu) funkční hodnoty.

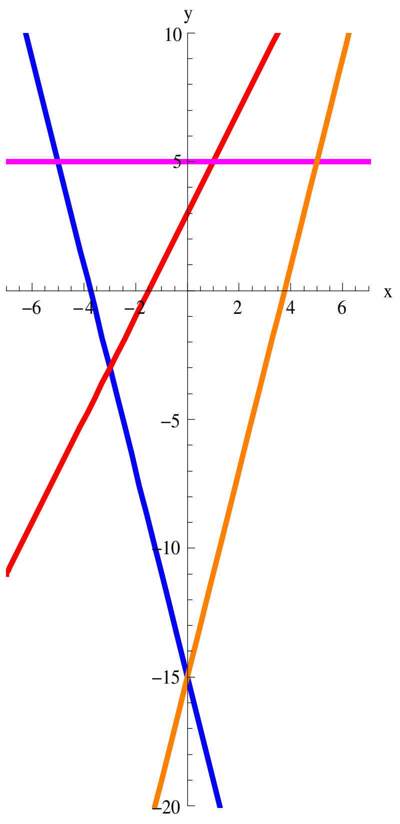
Funkce *f*, která byla zadaná v zadání, je definovaná na množině reálných čísel a v této množině je spojitá.

To znamená, že jí lze nakreslit jedním tahem.

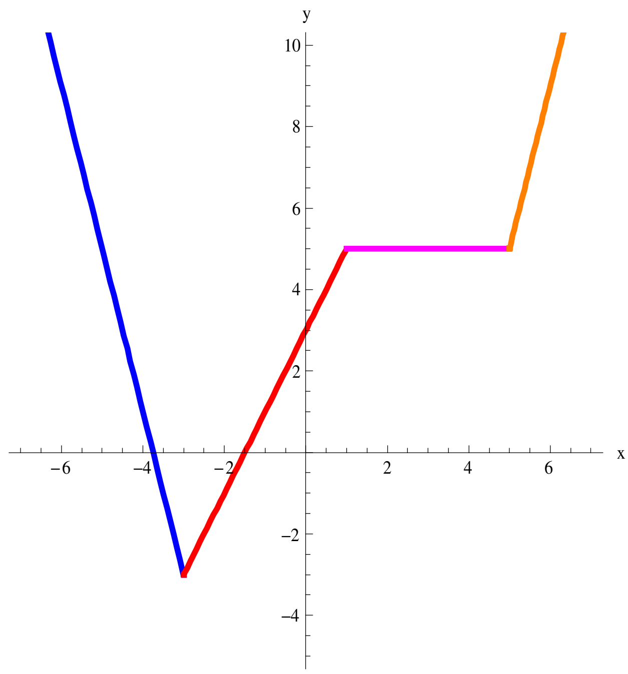
Graf funkce *f* nyní musíme „slepit“ z grafů dílčích funkcí f_1, f_2, f_3 a f_4. Každá z dílčích funkcí je definovaná na „svém“ intervalu. Tyto intervaly přitom pokrývají množinu reálných čísel. Pokud nyní grafy dílčích funkcí omezíme jen na ty intervaly, na kterých je daná dílčí funkce definovaná, a pokud jsme správně určili předpisy dílčích funkcí, získáme graf funkce *f*. Ten musí mít tvar spojité lomené čáry (viz *obr.* 3).

Lomená čára přitom bude „zlomená“ tolikrát, kolik absolutních hodnot (s různými nulovými body) obsahuje zadání funkce *f*.

<u>Závěr:</u> Graf zadané funkce *f* je zobrazen na *obr.* 3; $D(f) = \mathbb{R}$ a $H(f) = \langle -3; \infty)$.



obr. 2



obr. 3