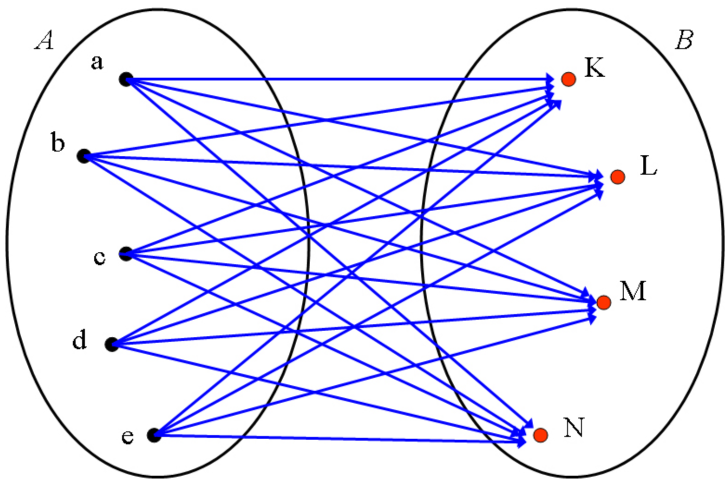
KARTÉZSKÝ SOUČIN A ZOBRAZENÍ

1.1 Definice

Definice kartézského součinu je tato:

KARTÉZSKÝ SOUČIN MNOŽIN $\underline{A}$ A $\underline{B}$ JE MNOŽINA VŠECH USPOŘÁDANÝCH DVOJIC $[x; y]$ TAKOVÝCH, ŽE $x \in A$ A ZÁROVEŇ $y \in B$. ZNAČÍ SE $A \times B$.

Má-li množina *A* *n* prvků (tj. $|A| = n$) a množina *B* *m* prvků (tj. $|B| = m$), pak kartézský součin $A \times B$ je množina, která má $n \cdot m$ uspořádaných dvojic (tj. $|A \times B| = n \cdot m$). Schématicky je kartézský součin dvou množin zobrazen na obr. 1.



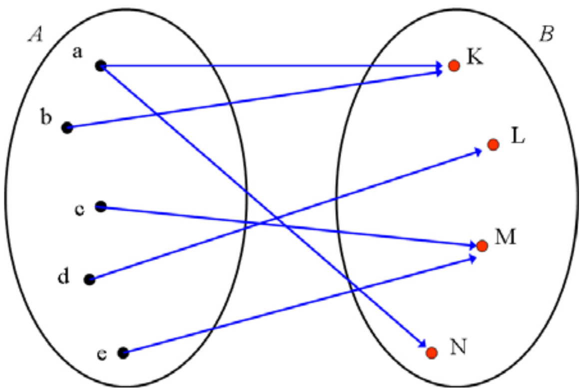
obr. 1

Speciálním případem kartézského součinu je zobrazení.

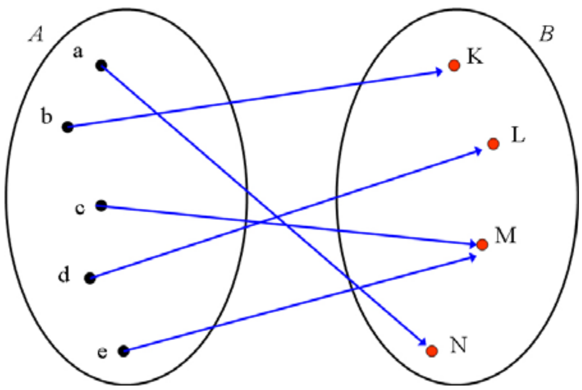
ZOBRAZENÍ MNOŽINY $\underline{A}$ DO MNOŽINY $\underline{B}$ JE PODMNOŽINA KARTÉZSKÉHO SOUČINU $A \times B$, PRO JEJÍŽ USPOŘÁDANÉ DVOJICE $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ PLATÍ: $y_1 \neq y_2 \;\Rightarrow\; x_1 \neq x_2$.

Prvky množiny, ze které zobrazujeme (v tomto případě množina *A*), se nazývají **vzory**; prvky množiny, do které zobrazujeme (v tomto případě množina *B*), se nazývají **obrazy**. Množina prvků z množiny *A*, kterým je přiřazen nějaký obraz, se nazývá **definiční obor zobrazení**; znační se *D*. Množina prvků z množiny *B*, které mají nějaký vzor, se nazývá **obor hodnot zobrazení**; značí se *H*.

Podle předchozí definice má tedy každý vzor nejvýše jeden obraz (viz obr. 3). Skutečnost, že obraz *M* má podle obr. 3 dva různé vzory, neporušuje definici zobrazení! Schéma na obr. 2 nepopisuje zobrazení, protože prvek *a* z množiny *A* má dva obrazy: prvky *K* a *N* z množiny *B*.



obr. 2



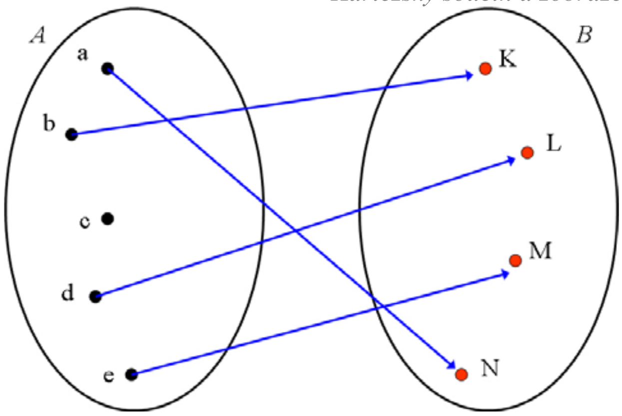
obr. 3

Speciálním případem zobrazení je zobrazení prosté, ve kterém každému obrazu odpovídá maximálně jeden vzor.

ZOBRAZENÍ U SE NAZÝVÁ PROSTÉ, PRÁVĚ TEHDY KDYŽ PRO LIBOVOLNÉ DVA PRVKY $y_1 = U(x_1)$ A $y_2 = U(x_2)$ ZOBRAZENÍ U PLATÍ: $x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; y_1 \neq y_2$.

Prosté zobrazení se také nazývá **injektivní zobrazení** nebo krátce **injekce**.

Prosté zobrazení je schématicky zobrazeno na obr. 4; na obr. 3 je zobrazeno zobrazení, které není prosté. Problematické jsou uspořádané dvojice $[c; M]$ a $[e; M]$: dva různé vzory mají stejný obraz! Vypustíme-li jednu uspořádanou dvojici (např. $[c; M]$) získáme zobrazení prosté.



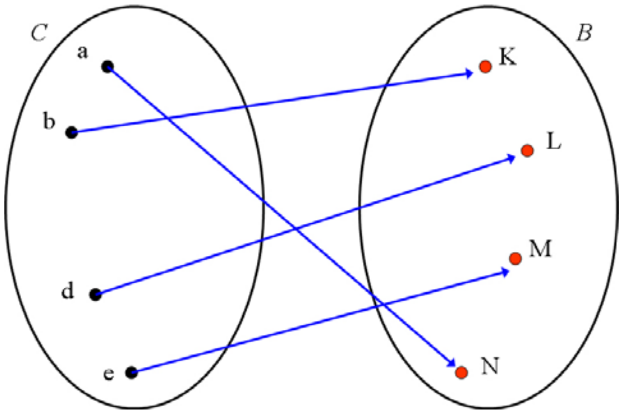
obr. 4

JESTLIŽE SE JEDNÁ O PROSTÉ ZOBRAZENÍ MNOŽINY *A* NA MNOŽINU *B*, MLUVÍME O VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÉM ZOBRAZENÍ *A* NA *B*.

Z definice vyplývá, že $D = A$ a $H = B$.

Toto zobrazení se též nazývá **bijektivní zobrazení** nebo krátce **bijekce**.

Vzájemně jednoznačné zobrazení je schématicky zobrazeno na obr. 5. S množinami *A* a *B*, které byly zobrazovány na obr. 1 až obr. 4, nelze vzájemně jednoznačné zobrazení realizovat, protože množiny mají navzájem různý počet prvků. Je tedy nutné např. z množiny *A* vytvořit množinu *C* tak, že odebereme z množiny *A* jeden prvek (prvek *c*). Zobrazení mezi množinami *C* a *B* dle schématu na obr. 5 již vzájemně jednoznačné je.



obr. 5

1.2 Konkrétní příklad

Jsou dány dvě množiny: množina *F* všech fyzikálních fotografií uložených na jistém serveru a množina *U* všech učitelů fyziky z Prahy, kteří fotografie na daný server uložili. Rozhodněte, za jakých podmínek je kartézský součin $F \times U$: a) zobrazením, b) prostým zobrazením, c) bijekcí. Podmínky v jednotlivých částech úlohy vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl nalezených podmínek.

Řešení bude vycházet z výše uvedených definic.

a) O zobrazení jakožto podmnožině kartézského součinu mluvíme tehdy, pokud v této podmnožině jsou pouze takové uspořádané dvojice, v nichž každý vzor (v tomto případě vybíraný z množiny *F*) má nejvýše jeden obraz (v tomto případě z množiny *U*). Pro zadanou úlohu to znamená, že:

Každá fotografie má nejvýše jednoho autora z množiny *U*. To znamená, že na serveru mohou být fotografie, jejichž autoři nejsou učitelé fyziky z Prahy, ale také to, že některý z učitelů mohl pořídit více fotografií.

b) O prostém zobrazení mluvíme tehdy, pokud každý obraz má nejvýše jeden vzor. V uvedeném případě to znamená, že navíc musí platit:

Každý učitel pořídil nejvýše jednu fotografii. (Aby se jednalo o zobrazení, musí platit současně i závěr z části a) této úlohy, tedy: Každá fotografie má nejvýše jednoho autora z množiny *U*.)

c) O bijekci můžeme mluvit pouze v případě, že obě množiny mají stejný počet prvků a navíc musí každý vzor z množiny *F* mít obraz v množině *U* a každý obraz z množiny *U* musí mít svůj vzor v množině *F*. V tomto případě tedy musí platit:

Každý učitel fyziky z Prahy pořídil právě jednu fotografii, která je uložená na serveru. Přitom na serveru nejsou uložené jiné fotografie a počet fotografií je shodný s počtem učitelů fyziky z Prahy.