Goniometrické rovnice

GONIOMETRICKOU ROVNICÍ SE ROZUMÍ ROVNICE, V NÍŽ JE NEZNÁMÁ V ARGUMENTU GONIOMETRICKÉ FUNKCE.

Pro další vyšetřování goniometrických rovnic se omezíme na rovnice, v nichž vystupují funkce sinus, kosinus, tangens nebo kotangens.

Existují i další funkce (sekans, kosekans, …), které se ale na střední škole většinou neprobírají.

Všechny goniometrické rovnice, ať už jsou zadány v jakémkoliv počátečním tvaru a řeší se libovolnou metodou, nakonec vedou na rovnici typu

$$f\left(neznámá\right) = a\,, \qquad (1)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a f je jedna z goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens nebo kotangens.

V dalším textu bude detailně vyřešeno několik rovnic, přičemž postup řešení zde uvedený je možné aplikovat na libovolnou goniometrickou rovnici ve tvaru (1). Nezbytnou součástí řešení goniometrických rovnic je perfektní znalost „tabulkových hodnot“ goniometrických funkcí (viz tab. 1).

α	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**N**
$\operatorname{cotg} x$	**N**	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

tab. 1

1. *úloha:*

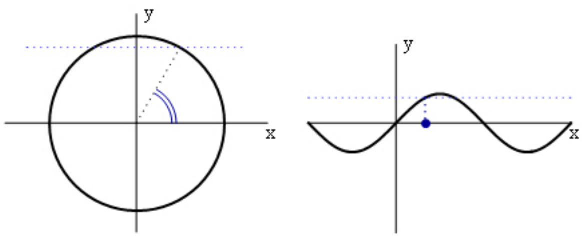
Řešte v množině reálných čísel rovnici $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení:

Rovnice je zadaná už ve tvaru, kdy je možné určit z tabulky hodnotu neznámé x: sinus nabývá funkční hodnoty $\frac{\sqrt{3}}{2}$ pro úhel x_0 z prvního kvadrantu, pro který platí $x_0 = \frac{\pi}{3}$ (viz obr. 1).

Pro další řešení je nutné si uvědomit, jak se zobrazuje zadaná funkce v jednotkové kružnici (pomocí níž byla funkce definována) a nebo jak vypadá graf dané funkce.

Funkce sinus se zobrazuje na osu y - proto vedeme k ose y kolmici v bodě o souřadnicích $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ a hledáme průsečíky této pomocné přímky s jednotkovou kružnicí (resp. grafem dané funkce) - viz obr. 2 a obr. 3.



obr. 1

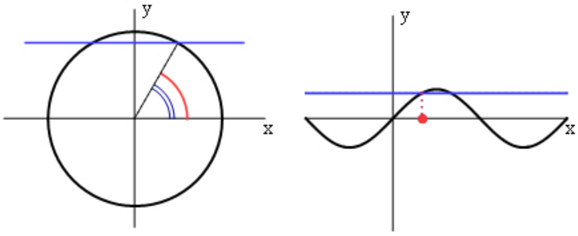
Není nutné hledat bod, ve kterém vedeme pomocnou přímku, zcela přesně. Stačí určit pouze odhadem jeho y-ovou souřadnici vzhledem k jedničce. Jednotková kružnice totiž protíná osy x a y v bodech $[\pm 1; 0]$ a $[0; \pm 1]$. Pokud bychom měli vést přímku v bodě, jehož y-ová souřadnice je větší než jedna, nemá zadaná rovnice řešení.

Z obr. 2 je vidět, že pomocná přímka protne graf (resp. jednotkovou kružnici) ve dvou bodech. To znamená, že daná goniometrická rovnice bude mít na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ dvě různá řešení.

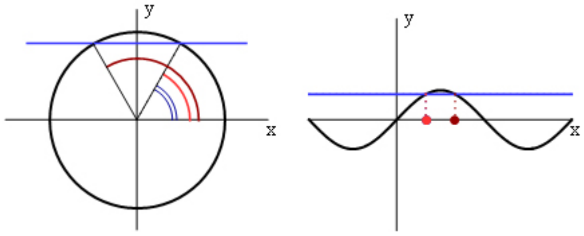
První řešení je v tomto případě totožné s kořenem x_0, takže $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Pokud máme řešit rovnici v oboru reálných čísel, je nutné už v této fázi řešení psát za úhel z intervalu $\langle 0; 2\pi)$ i jeho periodičnost. Jinak řešení složitějších úloh (v nichž je nutno využít substituci) nebudou správná (viz úlohu 3).

> Člen $2k\pi$ představuje „oběhy" po jednotkové kružnici. To znamená, že kořenem je číslo $\frac{\pi}{3}$, dále číslo o 2π větší, tj. číslo $\frac{7\pi}{3}$. Dalšími kořeny jsou čísla $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{3}$, $\frac{25\pi}{3}$, …



obr. 2



obr. 3

Druhým řešením je úhel, který je o x_0 menší než úhel přímý, tj. úhel π (viz obr. 3). Tedy $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

> I zde jsou zároveň připsány „oběhy" po jednotkové kružnici.

Tím je daná úloha vyřešena. Zbývá napsat závěr: $O = D = \mathbb{R}$, $P = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

> Definiční obor rovnice je stejný jako obor řešitelnosti, protože funkce sinus je definovaná pro všechna reálná čísla.

2. <u>úloha</u>

Řešte v množině reálných čísel rovnici $2\cos d = -1$.

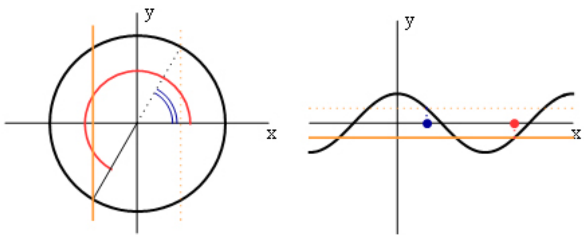
<u>Řešení:</u>

Před vlastním hledáním kořenů si rovnici upravíme do tvaru (1):

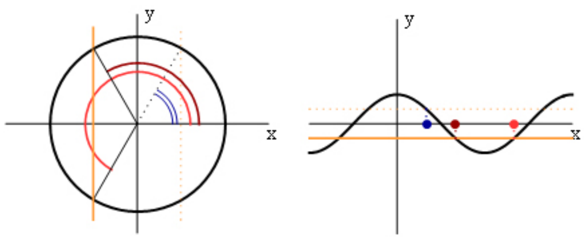
$$\cos d = -\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Nyní už můžeme začít rovnici řešit a to tak, že vyřešíme pomocnou rovnici $\cos d_0 = \frac{1}{2}$; tedy vyřešíme rovnici (2) v prvním kvadrantu. Z tab. 1 plyne, že $d_0 = \frac{\pi}{3}$.

Na intervalu $\langle 0; 2\pi)$ vyřešíme rovnici opět s využitím jednotkové kružnice resp. grafu (viz obr. 4 a obr. 5). Funkce kosinus se zobrazuje na osu x - vedeme tedy bodem $\left[-\frac{1}{2}; 0 \right]$ k ose x pomocnou kolmici, která protne jednotkovou kružnici ve dvou bodech. Prvnímu z nich odpovídá úhel, který je o d_0 větší než přímý úhel (tj. než π) - viz obr. 4. Můžeme tedy psát: $d_1 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$.



obr. 4



obr. 5

Druhé řešení (druhý průsečík jednotkové kružnice s pomocnou přímkou) odpovídá úhlu, který je o d_0 menší než π, tj. můžeme psát: $d_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Tím je úloha vyřešena a můžeme psát závěr: $O = D = \mathbb{R}$, $P = \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. *úloha*

Řešte v množině reálných čísel rovnici $-3\,\mathrm{tg}\left(4q+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$.

Řešení:

Opět začneme tím, že zadanou rovnici převedeme do tvaru (1). Nejdříve jí upravíme na tvar

$$\mathrm{tg}\left(4q+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (3)$$

Nyní zavedeme substituci

$$u := 4q+\frac{\pi}{4} \qquad (4)$$

a rovnici (3) přepíšeme do tvaru

$$\mathrm{tg}\,u=-\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (5)$$

Substitucí jsme vlastně jen nahradili složitě zapsaný argument jedním symbolem - symbolem *u*. S tím se bude lépe pracovat, ale **NESMÍME ZAPOMENOUT se po vyřešení rovnice VRÁTIT K PŮVODNÍ NEZNÁMÉ!**

Začneme opět tím, že vyřešíme rovnici (5) nejdříve v prvním kvadrantu, tj. budeme řešit rovnici $\mathrm{tg}\,u_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Podle tab. 1 můžeme psát: $u_0=\frac{\pi}{6}$.

Na intervalu $\langle 0;2\pi)$ vyřešíme rovnici (5) s využitím jednotkové kružnice resp. grafu funkce tangens (viz obr. 6). Funkce tangens se zobrazuje na tečnu vedenou k jednotkové kružnici v jejím bodě $[1;0]$.

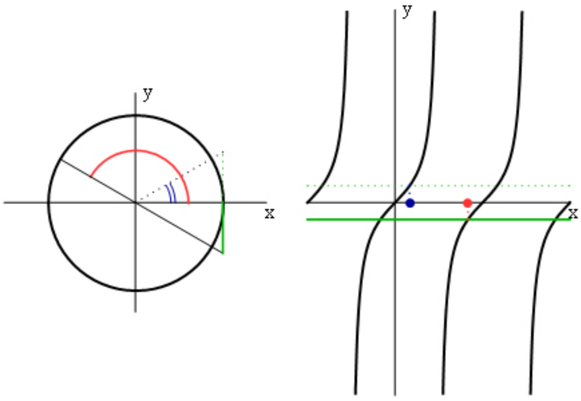
Na tuto přímku se zobrazují i záporné funkční hodnoty!

V případě funkce sinus a kosinus kreslíme pomocné přímky v bodech, které odpovídají pravým stranám rovnice ve tvaru (1), na který lze převést zadanou rovnici!

V případě funkce tangens (resp. kotangens) se kreslí přímka <u>**VŽDY**</u> jako tečna jednotkové kružnice v jejím bodě $[1;0]$ (resp. $[0;1]$). Na tuto přímku se pak nanese funkční hodnota zadané funkce (tj. pravá strana rovnice ve tvaru (1)) a tento bod se spojí s počátkem soustavy souřadnic (tedy se středem jednotkové kružnice).

Z obr. 6 je vidět, že řešení rovnice (5) je o u_0 menší než π, proto můžeme psát: $u_1=\frac{5\pi}{6}+k\pi$.

Vzhledem k tomu, že perioda funkce tangens je π, je v řešení u_1 uveden člen $k\pi$, který představuje jednotlivé „oběhy“ jednotkové kružnice. U funkcí sinus a kosinus (viz úlohy 1 a 2) byl uveden člen $2k\pi$, protože perioda funkcí sinus a kosinus je 2π



obr. 6

Další řešení psát není nutné. Podle obr. 6 by další řešení bylo o u_0 menší než 2π - jednalo by se tedy o úhel $\frac{11\pi}{6}$. Stejný úhel ale dostaneme dosazením hodnoty $k=1$ do řešení u_1.

Navíc na obr. 6 je vidět, že rameno jak úhlu $\frac{5\pi}{6}$ tak úhlu $\frac{11\pi}{6}$ leží na téže přímce - tyto úhly se tedy liší přesně o π. A perioda funkce tangens je také π. Proto zápis $u_1=\frac{5\pi}{6}+k\pi$ popisuje oba zmiňované úhly.

Původní rovnice ale byla zadána v proměnné *q*, proto je nutné vyjádřit proměnnou *q*. Ze substitučního vztahu (4) lze vyjádřit

$$q = \frac{1}{4}\left(u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{u}{4} - \frac{\pi}{16}. \qquad (6)$$

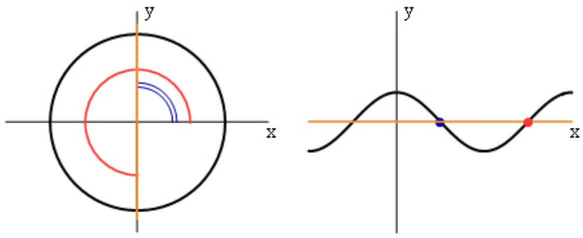
Do tohoto výrazu dosadíme řešení u_1 a dostaneme $q_1 = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{10\pi - 3\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} = \frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$. A to je řešení zadané rovnice.

Jak je vidět, tak se po „odsubstituování“ změnila i perioda řešení. Místo „klasické“ periody π funkce tangens na $\frac{k\pi}{4}$. Proto je nutné periodu řešení psát hned při řešení rovnice a ne až v závěrečném ODP. V podobných typech rovnic by bylo takové řešení špatně!!!

Vzhledem k tomu, že byla zadaná rovnice s goniometrickou funkcí tangens, která není spojitá, je ještě nutné nalézt podmínky, za kterých je funkce tangens v tomto případě definovaná.

Fakt, že je funkce tangens nespojitá, znamená, že její graf není možné nakreslit jedním tahem - graf je „rozkouskovaný“!

Definice funkce tangens je $\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$. Z tohoto definičního vztahu vyplývá, že tangens je definován pouze v těch bodech, ve kterých je $\cos u \neq 0$. Z jednotkové kružnice (resp. grafu funkce kosinus) vyplývá (viz obr. 7), že v tomto případě musí platit: $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.



obr. 7

Nyní je nutné opět podle vztahu (6) najít podmínky pro q, za kterých je definována funkce tangens v zadané rovnici. Takže dostaneme: $q \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} = \frac{2\pi - \pi}{16} + \frac{k\pi}{4} = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$.

Tím je rovnice vyřešena a můžeme sestavit závěr:

$O = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$, $P = \left\{\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.