# Lineárně lomená funkce

FUNKCE $f$ DANÁ PŘEDPISEM

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{1}$$

PRO $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, KDE $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ( $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ ) SE NAZÝVÁ LINEÁRNĚ LOMENÁ FUNKCE. JEJÍM GRAFEM JE HYPERBOLA.

Pro snadnější sestrojení grafu dané funkce upravíme předpis funkce (1) do tvaru:

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} . \tag{2}$$

Důležité tedy je mít předpis lineárně lomené funkce ve tvaru $\text{číslo} + \dfrac{\text{číslo}}{\mathbf{+1}.x + \text{číslo}}$, kde uvedená tři čísla mohou být navzájem různá. Ve jmenovateli **MUSÍ BÝT +1.*x*.**

Na základě vztahu (2) je možné určit asymptoty grafu dané funkce. Ty budou rovnoběžné s osami kartézského systému souřadnic a budou procházet bodem

$$P = \left[ -\frac{d}{c}; \frac{a}{c} \right]. \tag{3}$$

Graf pak sestrojíme snadno: nakreslíme jej do pomocného kartézského systému souřadnic, který je tvořen oběma zakreslenými asymptotami. Graf bude ležet buď v prvním a třetím kvadrantu tohoto pomocného systému souřadnic nebo v jeho druhém a čtvrtém kvadrantu. Kvadranty, v nichž budou ležet obě části grafu, určíme podle znaménka čísla $\frac{bc-ad}{c^2}$ ve vztahu (2):

1. je-li toto číslo kladné, leží graf v prvním a třetím kvadrantu pomocného systému souřadnic;
2. je-li toto číslo záporné, leží graf ve druhém a čtvrtém kvadrantu tohoto pomocného systému souřadnic.

Vztah (2) není nutné znát zpaměti - je důležité ho umět odvodit. To ukážeme na konkrétních úlohách.

## *1. úloha:*

Načrtněte graf funkce *f* dané předpisem $y = \frac{-3x+7}{-x+2}$.

Řešení:

Zadaný předpis budeme postupně upravovat na tvar (2). Můžeme postupovat buď tak, že provedeme naznačené dělení a částečně vydělíme výraz $-3x+7$ výrazem $-x+2$, nebo jednoduchým trikem. Ten spočívá v tom, že nejdříve vytkneme v čitateli i jmenovateli koeficient u $x$: $y = \frac{-3x+7}{-x+2} = \frac{-3\left(x - \frac{7}{3}\right)}{-(x-2)}$. Nyní si v čitateli doplníme do závorky takové číslo, abychom získali stejný výraz jako ve jmenovateli. Vzhledem k tomu, že ve jmenovateli je výraz $x-2$, odečteme v čitateli dvojku. Abychom celý zlomek nezměnili, je nutné jí ihned zase přičíst. Dostaneme tedy: $y = \frac{-3\left(x - \frac{7}{3}\right)}{-(x-2)} = \frac{-3\left(x - 2 + 2 - \frac{7}{3}\right)}{-(x-2)}$. Zlomek dále upravujeme tak, aby bylo možné dospět k výrazu ve tvaru (2). $y = \frac{-3\left(x-2+2-\frac{7}{3}\right)}{-(x-2)} = \frac{-3\left(x-2-\frac{1}{3}\right)}{-(x-2)} = \frac{-3(x-2)-3\left(-\frac{1}{3}\right)}{-(x-2)} = \frac{-3(x-2)}{-(x-2)} + \frac{1}{-(x-2)} = 3 - \frac{1}{x-2}$.

Na základě tohoto tvaru předpisu funkce *f* lze její graf již jednoduše sestrojit. Asymptoty funkce *f* budou procházet bodem $P = [2; 3]$. Při určování asymptot je možné postupovat podle obecného návodu (viz (3)) a nebo souřadnici bodu, kterým budou procházet asymptoty, odvodit logicky. Z předpisu funkce *f* je zřejmé, že jejím definičním oborem je množina $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, proto na ose $x$

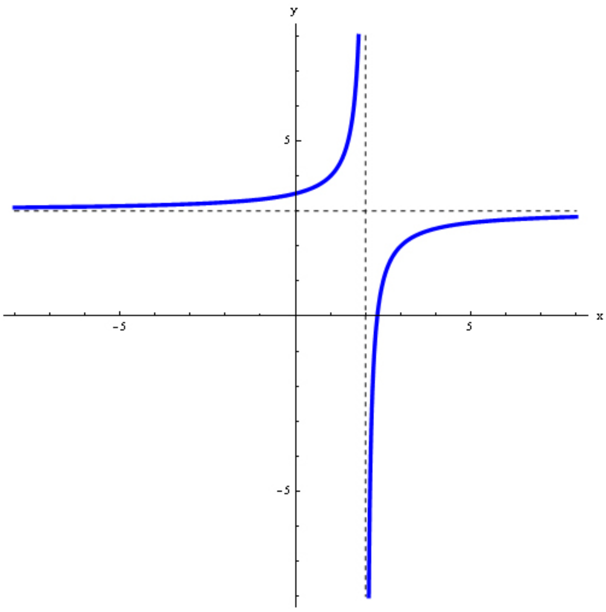
„vynecháme“ bod 2. Zlomek $\frac{1}{x-2}$ pro žádné číslo $x$ z definičního oboru funkce nebude roven nule. Proto ani funkční hodnota funkce $f$ nemůže být nikdy rovna 3 (tj. 3 + 0) - na ose $y$ tedy „vynecháme“ bod 3.

Vzhledem k tomu, že upravený výraz lze přepsat ve tvaru $y = 3 - \frac{1}{x-2} = 3 + \frac{-1}{x-2}$, je zřejmé, že graf funkce $f$ bude ležet ve druhém a třetím kvadrantu pomocného kartézského systému daného asymptotami grafu funkce $f$ (viz obr. 1).

Obor hodnot funkce $f$ lze určit podle obr. 1: $H = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

V tomto případě lze tedy definiční obor a obor hodnot určit podle asymptot grafu funkce $f$. Ovšem obecně to tak být nemusí!

V případě, že graf funkce $f$ budeme načrtávat od ruky, pomohou správný tvar hyperboly určit i její průsečíky s osami kartézského systému souřadnic:



*obr. 1*

1. Průsečík s osou $x$ má nulovou $y$-ovou souřadnici (leží na ose $x$), to znamená, že platí: $\frac{-3x+7}{-x+2} = 0$. Tato rovnost je splněna tehdy, je-li čitatel zlomku roven nule, tj. $-3x+7=0$, tedy $x = \frac{7}{3}$. Průsečík grafu funkce s osou $x$ je tedy bod $P_x = \left[\frac{7}{3}; 0\right]$.
2. Průsečík s osou $y$ má nulovou $x$-ovou souřadnici (leží na ose $y$). Stačí tedy dosadit do předpisu funkce $f$ za $x$ nulu: $y_P = \frac{-3x+7}{-x+2} = \frac{-3.0+7}{-0+2} = \frac{7}{2}$. Průsečík grafu funkce s osou $y$ je tedy bod $P_y = \left[0; \frac{7}{2}\right]$.

***2. <u>úloha:</u>***

Načrtněte graf funkce $g$ dané předpisem $y = \left|\frac{-2x-5}{x+4}\right|$.

<u>Řešení:</u>

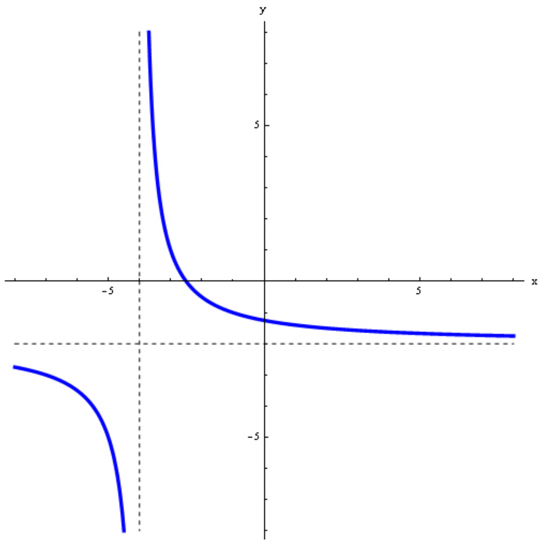
Budeme postupovat analogicky jako v minulé úloze. Pro jednoduchost nejdříve načrtneme graf funkce $g' : y = \frac{-2x-5}{x+4}$ (tedy funkce $g$ bez absolutní hodnoty). Předpis funkce $g'$ nejdříve upravíme do tvaru (2): $y = \frac{-2x-5}{x+4} = \frac{-2(x+2{,}5)}{x+4} = \frac{-2(x+4-4+2{,}5)}{x+4} = \frac{-2(x+4-1{,}5)}{x+4} = \frac{-2(x+4)+3}{x+4} = \frac{-2(x+4)}{x+4} + \frac{3}{x+4} = -2 + \frac{3}{x+4}$. Asymptoty grafu funkce $g'$ tedy budou procházet bodem o souřadnicích $[-4; -2]$ a její graf je zobrazen na obr. 2.

Graf funkce $g$ lze na základě grafu funkce $g'$ sestrojit snadno: absolutní hodnota aplikovaná na funkci $g'$ znamená, že všechny funkční hodnoty funkce $g$ budou nezáporné.

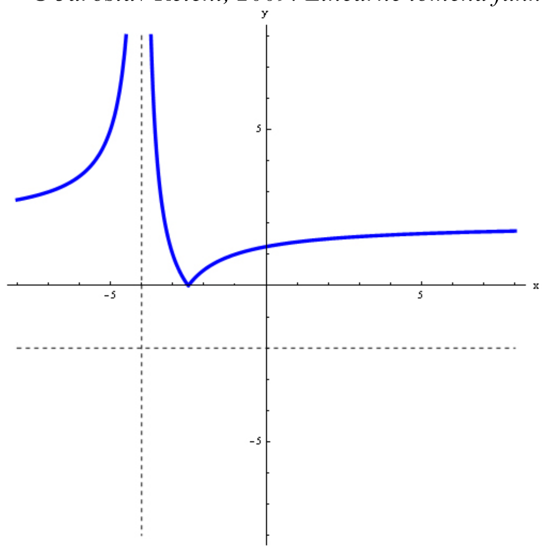
To znamená, že všechno, co je v grafu na obr. 2 pod osou $x$, překlopíme nad osu $x$.

Graf funkce $g$ je zobrazen na obr. 3. Na základě něj lze určit definiční obor a obor hodnot funkce $g$: $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $H = \langle 0; \infty)$.

Průsečíky grafu funkce s osami kartézského systému budou mít v tomto případě souřadnice: $P_x = \left[-\frac{5}{2}; 0\right]$ (čitatel předpisu funkce $g$ je nulový) a $P_y = \left[0; \frac{5}{4}\right]$ (dosazení nuly za $x$ do předpisu funkce).




*obr. 2*




*obr. 3*

### 3. ***úloha:***

Načrtněte pěkně graf funkce $h$ dané předpisem $y = \dfrac{2|x|+1}{6-2|x|}$.

<u>Řešení:</u>

Tuto úlohu vyřešíme dvěma způsoby: rozpisem a úvahou založenou na vlastnostech spojených s transformací grafu funkce.

<u>1. způsob:</u>

Standardní způsob řešení rovnic, nerovnic nebo funkcí s absolutními hodnotami je založen na řešení na jednotlivých intervalech, na které rozdělí reálnou osu nulové body argumentů absolutních hodnot v zadání. Obě absolutní hodnoty v předpisu funkce jsou stejné a jejich nulový bod je 0. Proto budeme hledat předpis dané funkce na intervalech $(-\infty; 0)$ a $\langle 0; \infty)$.

Během výpočtu se dopustíme drobné nepřesnosti - nebudeme zatím dávat pozor na definiční obor. Ten určíme až na závěr, aby bylo zřejmé, že koresponduje se zobrazeným grafem funkce $h$.

Na intervalu $(-\infty; 0)$ nabývá argument absolutní hodnoty záporných hodnot, proto přepíšeme předpis funkce $h$ ve tvaru $h_1 : y = \dfrac{2(-x)+1}{6-2(-x)} = \dfrac{-2x+1}{6+2x}$ a upravíme opět na tvar (2):

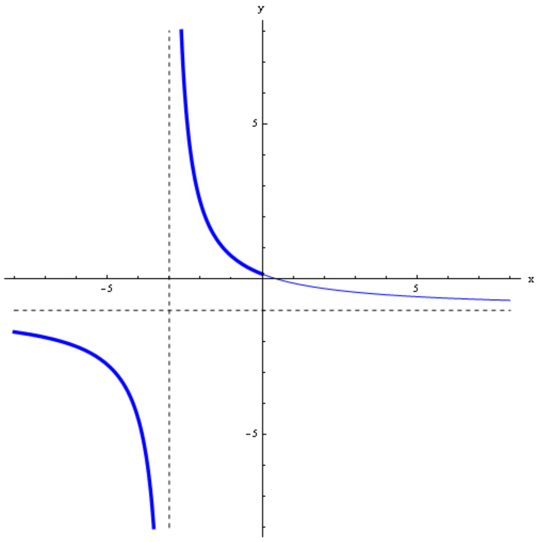
$y = \dfrac{-2x+1}{6+2x} = \dfrac{-2(x-0{,}5)}{2(x+3)} = \dfrac{-(x+3-3-0{,}5)}{x+3} = \dfrac{-(x+3-3{,}5)}{x+3} = -\dfrac{x+3}{x+3} + \dfrac{3{,}5}{x+3} = -1 + \dfrac{3{,}5}{x+3}$. Graf této funkce je zobrazen na obr. 4 (asymptoty procházejí bodem $[-3; -1]$).

Na intervalu $\langle 0; \infty)$ je argument absolutních hodnot v zadání funkce kladný, proto lze její předpis přepsat ve tvaru $h_2 : y = \dfrac{2x+1}{6-2x}$ a dále upravit na tvar (2): $y = \dfrac{2x+1}{6-2x} = \dfrac{2(x+0{,}5)}{2(x-3)} = \dfrac{x-3+3+0{,}5}{x-3} = \dfrac{x-3}{x-3} + \dfrac{3{,}5}{x-3} = 1 + \dfrac{3{,}5}{x-3}$. Graf této funkce je zobrazen na obr. 5, přičemž asymptoty procházejí bodem $[3; 1]$.

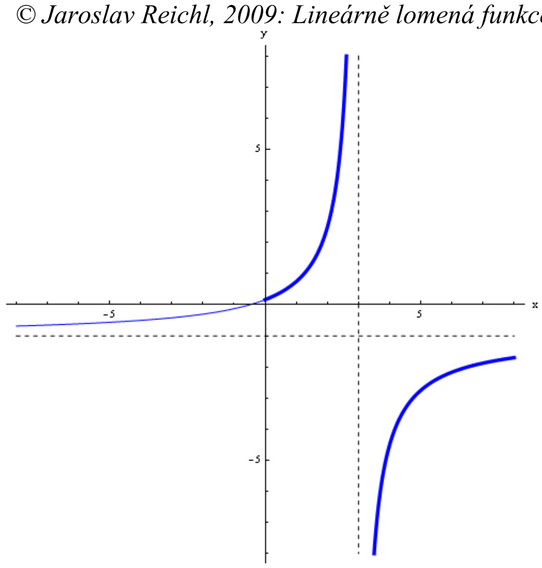
V grafech na obr. 4 a obr. 5 je vyznačena silněji pouze ta část grafu, která je důležitá pro sestrojení grafu funkce $h$. Pomocné funkce $h_1$ a $h_2$ totiž nejsou definované na množině reálných čísel, ale jen na jejích částech. Graf funkce $h$ získáme sjednocením grafů funkcí $h_1$ a $h_2$ - viz obr. 6.

Průsečík grafu funkce $h$ s osou $x$ neexistuje (viz obr. 6), což vyplývá i podmínky nulového čitatele předpisu funkce $h$: nelze najít reálné číslo, které je řešením rovnice $2|x|+1=0$. Průsečík grafu funkce s osou $y$ je bod $P_y = \left[0; \dfrac{1}{6}\right]$.

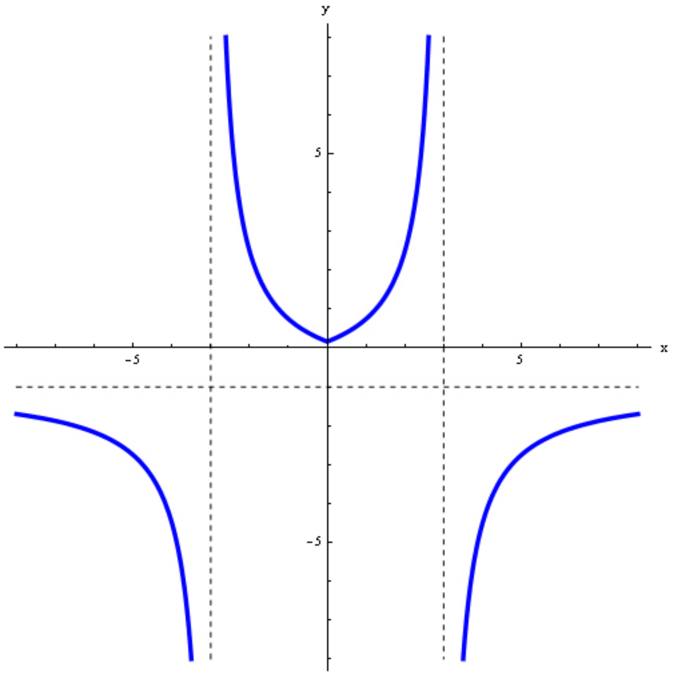
Definiční obor funkce $h$ je $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, což vyplývá jak z grafu funkce $h$, tak z jejího předpisu. Obor hodnot funkce $h$ je (podle grafu na obr. 6) $H = (-\infty; -1) \cup \left\langle \dfrac{1}{6};\ \infty \right) = \mathbb{R} \setminus \left\langle -1;\ \dfrac{1}{6} \right)$.




*obr. 4*




*obr. 5*




*obr. 6*

2. způsob:

Graf podobně zadaných funkcí, v nichž se vyskytují všechny proměnné $x$ ve „stejné“ absolutní hodnotě, lze řešit i jednodušeji. Z předpisu funkce $h$ totiž vyplývá, že funkce $h$ nabývá pro záporná $x$ stejných funkčních hodnot jako pro příslušná kladná $x$: pro navzájem opačná $x$ nabývá funkce stejných funkčních hodnot. Funkce je tedy sudá.

Stačí proto sestrojit graf funkce $h_2$, tj. zadaný předpis funkce $h$ upravit a následně vykreslit na intervalu $\langle 0;\infty)$.

Základní předpis získáme velmi rychle tak, že v předpisu dané funkce prostě vynecháme absolutní hodnoty - předpis si přepíšeme bez nich a upravíme na tvar (2).

Dostaneme tak graf zobrazený na obr. 5. Uvědomíme-li si, že funkce $h$ je funkce sudá, stačí nyní graf zobrazit v osové souměrnosti s osou $y$. Získáme graf zobrazený na obr. 6.

***4. úloha:***

Sestrojte graf funkce $j$ dané předpisem $y = \dfrac{|x+2|}{0{,}5x+2}$.

Řešení:

Podobný typ úlohy není možné řešit žádným trikem nebo zjednodušením. Je nutné použít rozpis předpisu funkce na intervalech, na které rozdělí reálnou osu nulové body argumentů absolutních hodnot v předpisu funkce.

Nulový bod absolutní hodnoty v předpisu funkce *j* je -2, proto budeme funkci *j* vyšetřovat na intervalech $(-\infty;-2)$ a $\langle -2;\infty)$.

Na intervalu $(-\infty;-2)$ můžeme postupně předpis funkce $j_1$ psát ve tvaru: $y=\frac{-x-2}{0,5x+2}=\frac{-(x+2)}{0,5(x+4)}=\frac{-(x+4-4+2)}{0,5(x+4)}=\frac{-(x+4)+2}{0,5(x+4)}=\frac{-(x+4)}{0,5(x+4)}+\frac{2}{0,5(x+4)}=-2+\frac{4}{x+4}$. Asymptoty procházejí bodem o souřadnicích $[-4;-2]$ a její graf je na obr. 7.

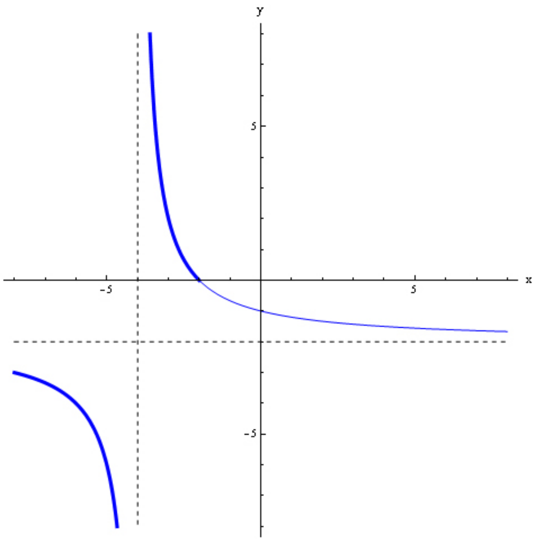
Na intervalu $\langle -2;\infty)$ lze předpis funkce $j_2$ psát ve tvaru: $y=\frac{x+2}{0,5x+2}=\frac{x+2}{0,5(x+4)}=\frac{x+4-4+2}{0,5(x+4)}=\frac{x+4}{0,5(x+4)}-\frac{2}{0,5(x+4)}=2-\frac{4}{x+4}$. Asymptoty této funkce procházejí bodem $[-4;2]$ a její graf je zobrazen na obr. 8.

V grafech na obr. 7 a obr. 8 je silněji zobrazena vždy jen část grafu, protože funkce $j_1$ a $j_2$ nejsou definovány na množině reálných čísel, ale jen na výše uvedených intervalech.

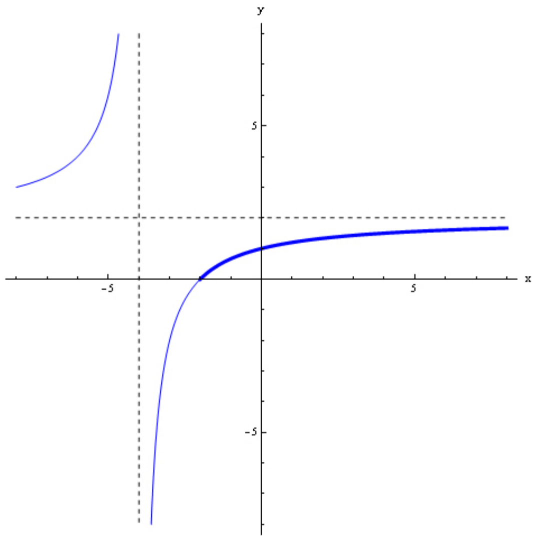
Graf zadané funkce *j* je sjednocením obou předchozích grafů a je zobrazen na obr. 9.

Průsečík grafu funkce s osou *x* je bod $P_x=[-2;0]$, průsečík s osou *y* je bod $P_y=[0;1]$.

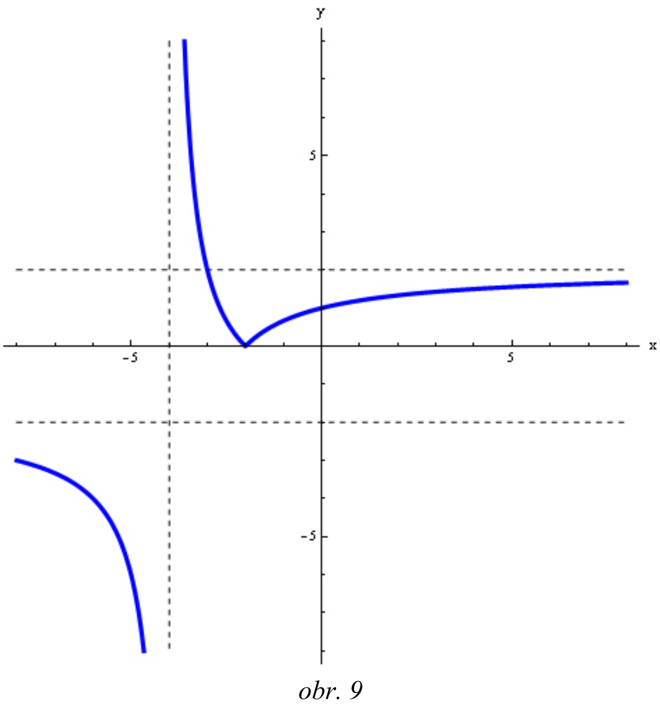
Definiční obor funkce *j* je $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ a obor hodnot funkce *j* je (podle grafu na obr. 9) $H=(-\infty;-2)\cup\langle 0;\infty)=\mathbb{R}\setminus\langle -2;0)$.




*obr. 7*




*obr. 8*




*obr. 9*