1. KVADRATICKÉ FUNKCE A ROVNICE

1.1 Úvod

Kvadratická funkce je po lineární funkci další funkce, se kterou se seznámíme. Je po lineární druhá v pořadí, co se týče obtížnosti, a řadu konkrétních příkladů použití přitom již známe:

1. vztah pro výpočet obsahu *S* čtverce se stranou délky *a*: $S = a^2$;
2. vztah pro výpočet obsahu *S* kruhu o poloměru *r*: $S = \pi r^2$;
3. vztah pro dráhu *s* rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením o velikosti *a* a velikostí počáteční rychlosti v_0: $s = v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$;
4. …

Všechny výše uvedené příklady se vyznačují tím, že v nich některá veličina vystupuje ve **druhé mocnině** (tj. v **kvadrátu**). Z hlediska teorie funkcí jsou tedy výše uvedené příklady všechno příklady **kvadratické funkce**.

Úvahy, které budeme u kvadratických funkcí provádět (posun grafu funkce v závislosti na parametrech funkce, aplikace absolutní hodnoty, …), bude možné analogicky aplikovat na další funkce, s nimiž se v průběhu studia budeme seznamovat.

1.2 Definice a graf kvadratické funkce

Ačkoliv již tušíme, co to je kvadratická funkce, je nutné tento pojem definovat přesně.

KVADRATICKÁ FUNKCE SE NAZÝVÁ KAŽDÁ FUNKCE f DANÁ PŘEDPISEM

$$f : y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \tag{1}$$

KDE $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ A $b, c \in \mathbb{R}$. GRAFEM KVADRATICKÉ FUNKCE JE PARABOLA.

> Důvod, proč koeficient *a* nemůže být nula, je zřejmý. Pokud by *a* bylo nulové, z funkce *f* by se stala lineární funkce (z předpisu by vymizel kvadratický člen). Koeficienty *b* a *c* mohou být klidně oba nulové.

Informace $x \in \mathbb{R}$ je ekvivalentní s tím, že definičním oborem kvadratické funkce jsou všechna reálná čísla, tj. $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

V této souvislosti je třeba zvládnout názvosloví týkající se kvadratické funkce:

1. výraz $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se nazývá **kvadratický trojčlen**;
2. výraz $a \cdot x^2$ se nazývá **kvadratický člen** kvadratického trojčlenu;
3. výraz $b \cdot x$ se nazývá **lineární člen** kvadratického trojčlenu;
4. výraz *c* se nazývá **absolutní člen** kvadratického trojčlenu;
5. *a* a *b* jsou **koeficienty** kvadratického a lineárního členu.

Pokusíme se nyní zjistit, jak vypadá graf kvadratické funkce popsané předpisem (1) a jak jej ovlivní jednotlivé koeficienty vystupující v předpisu.

1.2.1 Graf kvadratické funkce - závislost na koeficientu *a*

Začneme závislostí grafu kvadratické funkce dané předpisem (1) na koeficientu *a*. Uvažujme proto tyto funkce: $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 2x^2$, $f_3 : y = \frac{1}{2}x^2$, $f_4 : y = -x^2$, $f_5 : y = -2x^2$ a $f_6 : y = -\frac{1}{2}x^2$.

Abychom zjistili, jak vypadají grafy těchto funkcí, dosadíme do předpisů zadaných funkcí několik bodů a vypočítáme funkční hodnoty (viz tab. 1).

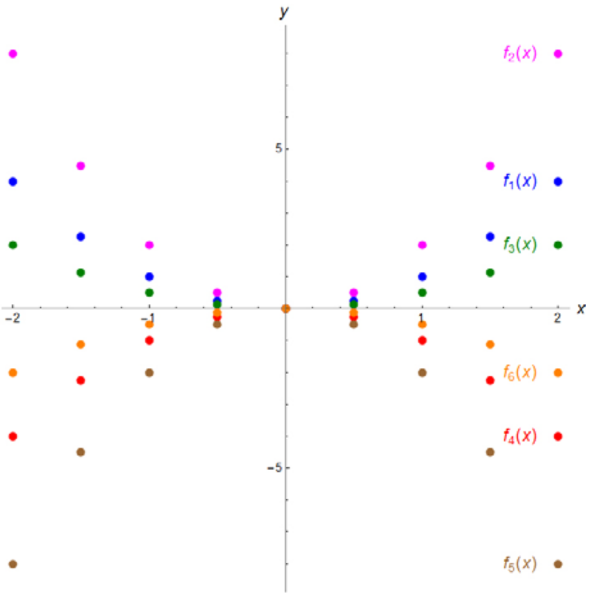
Tento postup není při kreslení grafů funkcí bez výhrad, protože nikdy tímto způsobem nemůžeme zvládnout dosadit všechna *x* z definičního oboru funkce (kterým v našem případě jsou všechna reálná čísla). Matematik by měl průběhy důležitých funkcí znát z paměti. Ale pro případ, že zapomeneme, nejsme si jistí, …, je tato metoda použitelná.

Body vypočtené v tab. 1 jsou zobrazené v grafu na obr. 1. Na obr. 2 jsou pak zobrazeny přímo zadané kvadratické funkce.

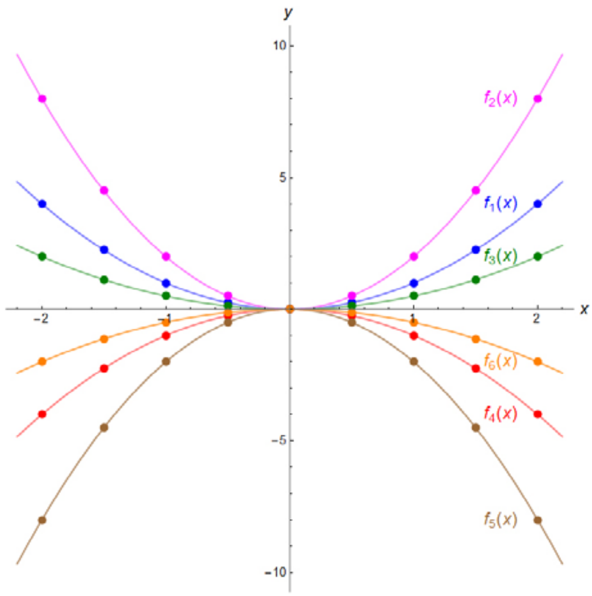
> Při přechodu z grafu zobrazeného na obr. 1 na graf zobrazený na obr. 2 NELZE SPOJOVAT JEDNOTLIVÉ BODY. Je nutné body proložit spojitou (= jedním tahem kreslenou) hladkou (= bez „špiček a zlomů“) křivkou!

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
-2	4	8	2	-4	-8	-2
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{8}$
-1	1	2	$\frac{1}{2}$	-1	-2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	1	2	$\frac{1}{2}$	-1	-2	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{8}$
2	4	8	2	-4	-8	-2

tab. 1



obr. 1



obr. 2

Pro funkce zobrazené na obr. 2 platí: $\mathrm{D}_{f_1} = \mathrm{D}_{f_2} = \mathrm{D}_{f_3} = \mathrm{D}_{f_4} = \mathrm{D}_{f_5} = \mathrm{D}_{f_6} = \mathbb{R}$, $\mathrm{H}_{f_1} = \mathrm{H}_{f_2} = \mathrm{H}_{f_3} = \langle 0; \infty)$ a $\mathrm{H}_{f_4} = \mathrm{H}_{f_5} = \mathrm{H}_{f_6} = (-\infty; 0\rangle$.

Z grafů funkcí zobrazených na obr. 2 je zřejmé, že kvadratická funkce daná předpisem (1) má tyto vlastnosti:

1. definičním oborem jsem všechna reálná čísla;
2. bod, ve kterém nabývá funkce minima v případě kladného *a* (resp. maxima v případě záporného *a*), se nazývá **vrchol paraboly** $\mathrm{V} = [x_0; y_0]$;
3. vrcholem paraboly prochází **osa paraboly**, která je obecně rovnoběžná s osou *y* (pro $b = 0$ tato osa s osou *y* splývá);
4. graf kvadratické funkce je souměrný podle osy paraboly;
5. pro $a > 0$:
    - je parabola otevřená směrem nahoru;
    - funkce má minimum;
    - funkce je omezená zdola;
    - s rostoucím *a* rostou funkční hodnoty rychleji a parabola je proto užší;

Pozor na časté špatné vyjadřování „čím větší *a*, tím užší graf". Slovní spojení „čím …, tím …" v matematice velmi často není možné použít!

- funkce je pro $x \in (-\infty; x_0)$ klesající, pro $x \in (x_0; \infty)$ je rostoucí;
- obor hodnot je $\mathrm{H} = \langle y_0; \infty)$;
- funkce je konvexní;

6. pro $a < 0$:
   - je parabola otevřená směrem dolů;
   - funkce má maximum;
   - funkce je omezená shora;
   - s rostoucím *a* rostou funkční hodnoty pomaleji a parabola je proto širší;

Pozor! Záporná *a* rostou od -2, přes -1 k $-\frac{1}{2}$. Podstatná je absolutní hodnota koeficientu *a*: když absolutní hodnota *a* roste, graf kvadratické funkce se zužuje (více se přibližuje ose *y*).

   - funkce je pro $x \in (-\infty; x_0)$ rostoucí, pro $x \in (x_0; \infty)$ je klesající;
   - obor hodnot je $\mathrm{H} = (-\infty; y_0\rangle$;
   - funkce je konkávní;
7. funkce není prostá.

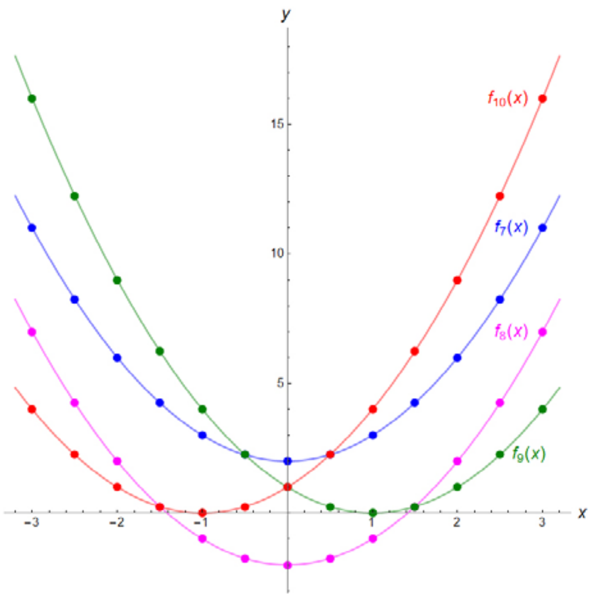
Tyto vlastnosti (stejně jako další zkoumané vlastnosti) není nutné umět z paměti. Stačí si načrtnout graf příslušné funkce a vlastnosti z něj odvodíme.

1.2.2 Graf kvadratické funkce - závislost na koeficientech *b* a *c*

Zkusme nyní vyšetřit tyto kvadratické funkce: $f_7: y = x^2 + 2$, $f_8: y = x^2 - 2$, $f_9: y = (x-1)^2$ a $f_{10}: y = (x+1)^2$. Budeme postupovat stejně jako v kapitole 1.2.2. Pro vybrané hodnoty nezávislé proměnné *x* vypočítáme funkční hodnoty zadaných funkcí (viz tab. 2) a poté funkce vykreslíme (viz obr. 3). V tomto případě je zobrazena pouze spojitá funkce s vyznačenými body z tab. 2. Graf pouze s jednotlivými body by byl v tomto případě velmi nepřehledný a navíc se běžně v matematice nepoužívá.

x	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$
-3	11	7	16	4
$-\frac{5}{2}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{49}{4}$	$\frac{9}{4}$
-2	6	2	9	1
$-\frac{3}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{4}$
-1	3	-1	4	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	2	-2	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
1	3	-1	0	4
$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{4}$
2	6	2	1	9
$\frac{5}{2}$	$\frac{33}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{49}{4}$
3	11	7	4	16

tab. 2



obr. 3

Jak je vidět, grafy funkcí zobrazených na obr. 3 jsou oproti grafům funkcí zobrazených na obr. 2 posunuté - jejich vrcholy jsou v jiném bodě než v počátku soustavy souřadnic:

1. graf funkce f_7 má vrchol v bodě $V_7 = [0; 2]$;
2. graf funkce f_8 má vrchol v bodě $V_8 = [0; -2]$;
3. graf funkce f_9 má vrchol v bodě $V_9 = [1; 0]$;
4. graf funkce f_{10} má vrchol v bodě $V_{10} = [-1; 0]$.

Pro tyto funkce platí: $D_{f_7} = D_{f_8} = D_{f_9} = D_{f_{10}} = \mathbb{R}$, $H_{f_7} = \langle 2; \infty)$, $H_{f_8} = \langle -2; \infty)$ a $H_{f_9} = H_{f_{10}} = \langle 0; \infty)$.

Podíváme-li se na předpisy uvedených funkcí, lze vyslovit závěr: bude-li kvadratická funkce zadaná předpisem

$$f : y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0 , \qquad (2)$$

má její vrchol souřadnice $V = [x_0; y_0]$.

Analogicky bylo možné vyčíst souřadnice vrcholu grafu z předpisu lineární funkce s absolutní hodnotou. Např. funkce $g : y = |x + 3| - 1$ měla vrchol v bodě $V = [-3; -1]$.

Na základě grafů funkcí zobrazených na obr. 2 a obr. 3 je zřejmé, že pro $b = 0$ je zadaná kvadratická funkce **sudá** (parabola, která je jejím grafem, je souměrná podle osy *y*).

Nakreslete pěkně graf funkce $h : y = (x - 2)^2 - 3$.

Řešení: Jedná se o kvadratickou funkci, jejím grafem bude parabola. Koeficient *a* je (při srovnání s obecným předpisem funkce (2)) roven jedna. Parabola tedy bude otevřená nahoru (kladné *a*) a bude mít standardní tvar (tj. nebude ani „užší“ ani „širší“ - *a* je rovno jedné). Její vrchol bude v bodě $V = [2; -3]$. Graf funkce *h* je zobrazen na obr. 4.

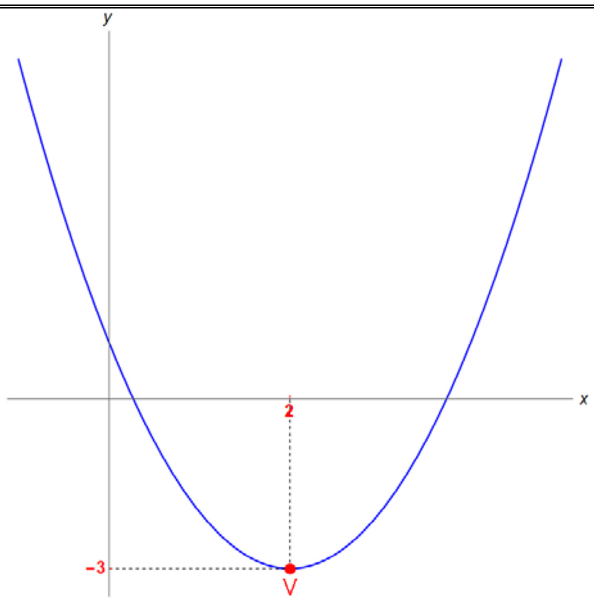
Platí: $D = \mathbb{R}$ a $H = \langle -3; \infty)$.

Nakreslete pěkně graf funkce $j : y = -(x + 1)^2 + 2$.

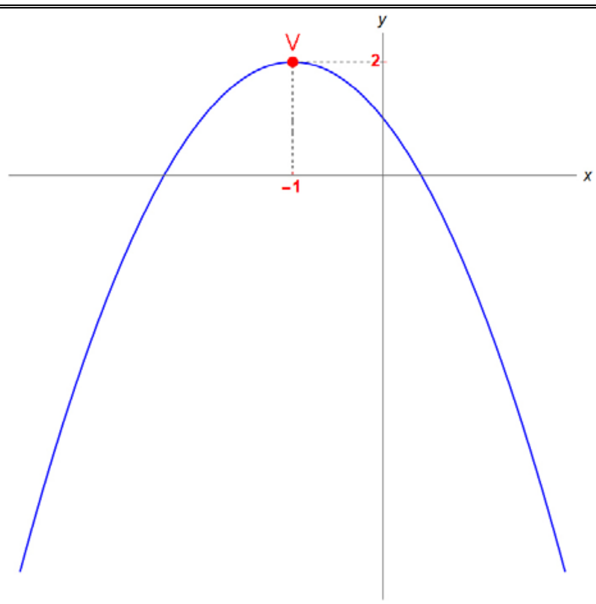
Řešení: Jedná se o kvadratickou funkci, jejímž grafem bude parabola. Koeficient *a* je (při srovnání s obecným předpisem (2)) roven mínus jedna. Parabola tedy bude otevřená dolů (záporné *a*) a bude mít standardní tvar (tj. nebude ani „užší“ ani „širší“ - absolutní hodnota *a* je rovna jedné).

Její vrchol bude v bodě $V = [-1; 2]$. Graf funkce *j* je zobrazen na obr. 5.

Platí: $D = \mathbb{R}$ a $H = (-\infty; 2\rangle$.



obr. 4



obr. 5

1.2.3 Doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu lineárního dvojčlenu

Abychom mohli rychle nakreslit graf kvadratické funkce, musíme znát:

1. jak je parabola otevřená (zda nahoru nebo dolů), tj. zda její vrchol leží v minimu nebo maximu grafu funkce - to poznáme podle znaménka koeficientu *a*;
2. souřadnice vrcholu paraboly.

Porovnáme-li navzájem dva tvary předpisů kvadratické funkce (předpisy (1) a (2)), je zřejmé, že souřadnice vrcholu se budou lépe určovat z předpisu (2). Předpis kvadratické funkce bude ale většinou zadán ve tvaru (1). Proto je nutné se naučit převést předpis ve tvaru (1) do tvaru (2).

Opačný převod je triviální: stačí umocnit závorku v předpisu ve tvaru (2) a sečíst členy bez *x*.

Postup, kterým lze převést předpis ve tvaru ve tvaru (1) do tvaru (2), se nazývá **doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu (lineárního) dvojčlenu** (resp. **doplnění na čtverec**). Při tomto doplnění je nutné využít dříve odvozené algebraické vztahy:

$$(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 . \tag{3}$$

Nejdříve ukážeme tento postup na obecně zadané kvadratické funkci, poté na konkrétních úlohách.

Uvažujme tedy kvadratickou funkci danou předpisem $f: y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, u které bychom chtěli určit souřadnice vrcholu paraboly. Budeme tedy chtít předpis této funkce upravit do tvaru $f: y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$.

Důležité upozornění: jedná se stále o předpis téže funkce, tedy můžeme upravovat pomocí vytýkání, přičítání a odečítání téhož členu, ale **NELZE** předpis funkce násobit nebo dělit, i když by tato úprava patrně lákala.

Vytkneme tedy nejdříve *a*, které je podle definice kvadratické funkce nenulové: $f: y = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right)$. Uvnitř závorky bychom rádi získali trojčlen, který bychom mohli napsat s využitím vztahu (3) jako druhou mocninu (resp. čtverec) dvojčlenu. V závorce je člen x^2, který odpovídá členu α^2, dále je tam člen $\frac{b}{a} \cdot x$ odpovídající členu $2\alpha\beta$ ve vztahu (3). To tedy znamená, že v našem případě proměnné β odpovídá výraz $\frac{b}{2a}$. Abychom měli kvadratický trojčlen kompletní, musíme přidat člen odpovídající výrazu β^2 - tj. člen $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$. Pokud bychom tento člen jen přidali do předpisu funkce *f*, předpis tím změníme! Proto je nutné tento člen zase ihned odečíst.

Tím na první pohled děláme zbytečnou práci, ale člen $\left(\frac{b}{2a} \right)^2$ potřebujeme, abychom měli kompletní kvadratický trojčlen.

Popsané úpravy nyní zapíšeme symbolicky: $f: y = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$. Ve shodě se vztahem (3) využijeme nyní první tři členy závorky: $y = a \cdot \left(\underbrace{x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2}_{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \cdot \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right)$. Nyní částečně roznásobíme: $y = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$.

Po porovnání s předpisem daným vztahem (2) je zřejmé, že platí $x_0 = -\frac{b}{2a}$ a $y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$. Vrchol paraboly má tedy souřadnice:

$$\mathrm{V}=\left[-\frac{b}{2a};c-\frac{b^2}{4a}\right]. \qquad (4)$$

Tyto souřadnice není nutné znát z paměti - na konkrétní úloze je lze velmi rychle odvodit.

Nakreslete pěkně graf kvadratické funkce $k: y=2x^2-12x+19$.

Řešení: Předpis funkce nejdříve postupně upravíme ve shodě s obecným odvozením.

$$k: y=2x^2-12x+19=2\left(x^2-6x+\frac{19}{2}\right)=2\left(x^2-6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+\frac{19}{2}\right)=$$

$=2\left(\left(x^2-6x+9\right)-9+\frac{19}{2}\right)=2\left(\left(x-3\right)^2+\frac{1}{2}\right)=2\left(x-3\right)^2+1$. Souřadnice vrcholu tedy jsou $\mathrm{V}=[3;1]$, parabola bude užší (koeficient a je roven 2) a bude otevřená nahoru. Graf zadané funkce je zobrazen na obr. 6 (čárkově je pro srovnání zobrazena kvadratická funkce $y=(x-3)^2+1$).

Platí: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ a $\mathrm{H}=\langle 1;\infty)$.

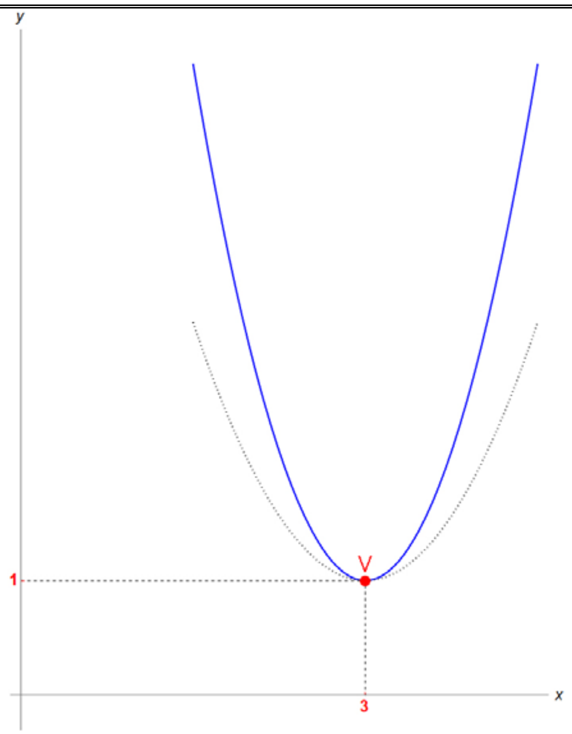
Nakreslete pěkně graf kvadratické funkce $l: y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

Řešení: Předpis funkce nejdříve postupně upravíme ve shodě s obecným odvozením.

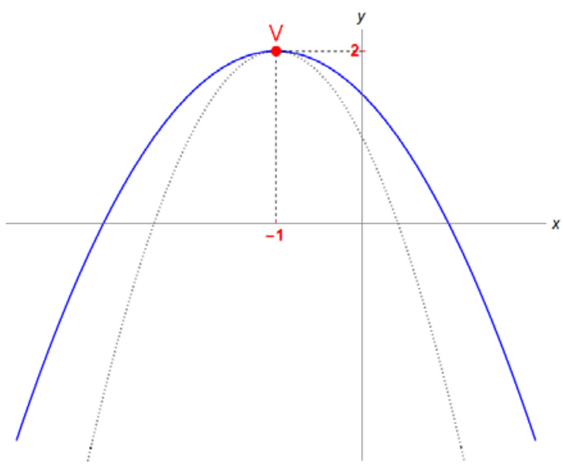
$$l: y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-3\right)=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2-3\right)=$$

$=-\frac{1}{2}\left(\left(x^2+2x+1\right)-1-3\right)=-\frac{1}{2}\left(\left(x+1\right)^2-4\right)=-\frac{1}{2}\left(x+1\right)^2+2$. Souřadnice vrcholu tedy jsou $\mathrm{V}=[-1;2]$, parabola bude širší (koeficient a je roven $-\frac{1}{2}$) a bude otevřená dolů. Graf zadané funkce je zobrazen na obr. 7 (čárkově je pro srovnání zobrazena kvadratická funkce $y=-(x+1)^2+2$).

Platí: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ a $\mathrm{H}=(-\infty;2\rangle$.



obr. 6



obr. 7

1.3 Kvadratická funkce s absolutní hodnotou

Stejně jako u lineárních funkcí bylo možné vyšetřovat funkce s absolutní hodnotou, je to možné i v případě kvadratickýgh funkcí. V tomto případě ale může nastat více případů, které popíšeme zvlášť.

1.3.1 Absolutní hodnota aplikována na celou funkci

Pokud budeme mít vyšetřit průběh kvadratické funkce dané předpisem ve tvaru

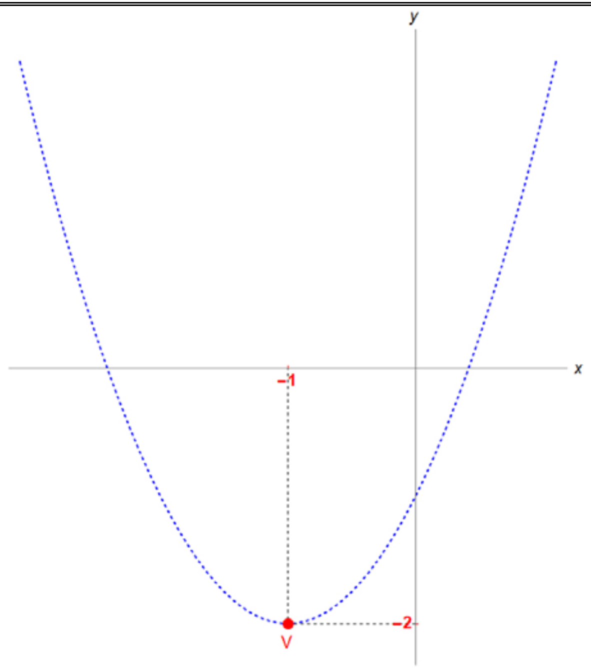
$$f: y = \left| a \cdot x^2 + b \cdot x + c \right|, \tag{5}$$

jedná se o nejjednodušší možnost. Z předpisu funkce je totiž zřejmé, že funkční hodnotou mohou nabývat pro libovolné reálné *x* pouze nezáporných hodnot (to vyplývá z vlastností absolutní hodnoty). Proto stačí vyšetřit funkci $f_1 : y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ a poté tu část grafu, která se nachází pod osou *x* symetricky překlopit nad osu *x*.

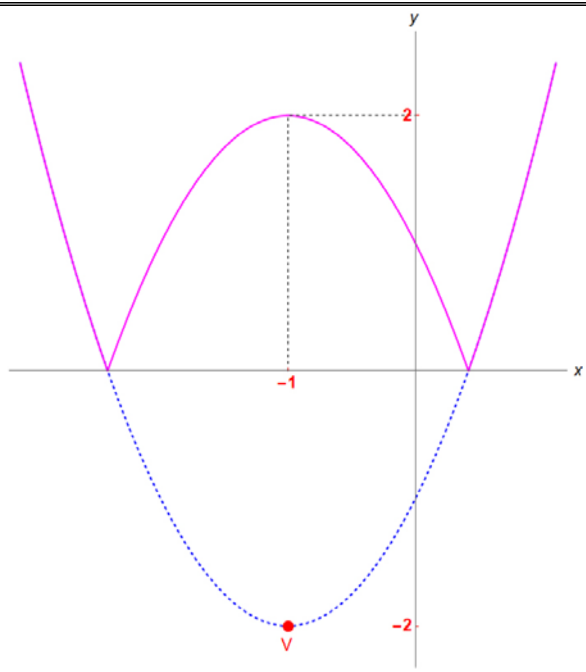
Nakreslete pěkně graf funkce $m : y = \left| x^2 + 2x - 1 \right|$.

Řešení: Nejdříve upravíme předpis funkce m_1, která je v argumentu absolutní hodnoty, do tvaru (2), ze kterého odečteme souřadnice vrcholu paraboly. Postupně tak dostaneme: $m_1 : y = x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 1 = (x+1)^2 - 2$. Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\mathrm{V} = [-1; -2]$. Graf funkce m_1 je zobrazen na obr. 8. Abychom získali graf funkce *m*, stačí tu část grafu funkce m_1, která se nachází pod osou *x*, překlopit nad osu *x* (ve shodě s vlastností absolutní hodnoty); graf funkce *m* je zobrazen na obr. 9.

Pro funkci *m* platí: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H} = \langle 0; \infty)$.



obr. 8



obr. 9

V případě, že bude koeficient *a* v předpisu funkce dané předpisem (1) záporný, může výsledná funkce, na kterou byla aplikována absolutní hodnota, vypadat principiálně stejně, jako funkce zobrazená na obr. 9. Může se také stát, že aplikace absolutní hodnoty na danou kvadratickou funkci graf této funkce nijak nezmění.

1.3.2 Absolutní hodnota aplikována na proměnnou *x*

Nyní budeme vyšetřovat graf kvadratické funkce dané předpisem ve tvaru

$$f: y = a \cdot x^2 + b \cdot |x| + c, \tag{6}$$

která, ač to na první pohled nevypadá, přesně odpovídá funkcí zmíněné v nadpisu kapitoly. Pokud bychom totiž napsali předpis funkce ve tvaru $f: y = a\cdot|x|^2 + b\cdot|x| + c$, dostaneme stejnou funkci, jako je funkce daná předpisem (6).

Výraz x^2 bude totiž pro libovolnou volbu reálného x vždy nezáporný, stejně jako výraz $|x|^2$. Proto je v případě tohoto členu absolutní hodnota nadbytečná.

Způsob, jak ze zadaného předpisu správně nakreslit graf, ukážeme jak standardní cestou, tak rychlejším způsobem s využitím základních vlastností funkcí.

Standardní postup ukážeme rovnou na řešené úloze. Postup řešení přitom není nový - analogicky jsme postupovali při vykreslování grafů složitějších lineárních funkcí s absolutními hodnotami.

Nakreslete pěkně graf funkce $p: y = -x^2 + 6|x| - 5$.

Řešení: Předpis funkce nejdříve upravíme do tvaru (2), abychom mohli určit souřadnice vrcholu paraboly. Řešení ale musíme rozdělit na dva intervaly, na které rozdělí reálnou osu nulový bod absolutní hodnoty; ten je roven $x_0 = 0$.

Pro $x \in (-\infty; 0)$ je argument absolutní hodnoty záporný, proto přepíšeme předpis zadané funkce p ve tvaru $p_1: y = -x^2 + 6\cdot(-x) - 5$ a dále upravíme:

$$p_1: y = -\left(x^2 + 6x + 5\right) = -\left(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5\right) = -\left((x+3)^2 - 4\right) = -(x+3)^2 + 4.$$

Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\mathrm{V}_1 = [-3; 4]$ a parabola bude otevřená dolů.

Pro $x \in \langle 0; \infty)$ je argument absolutní hodnoty nezáporný, proto přepíšeme předpis zadané funkce p ve tvaru $p_2: y = -x^2 + 6\cdot(+x) - 5$ a dále upravíme:

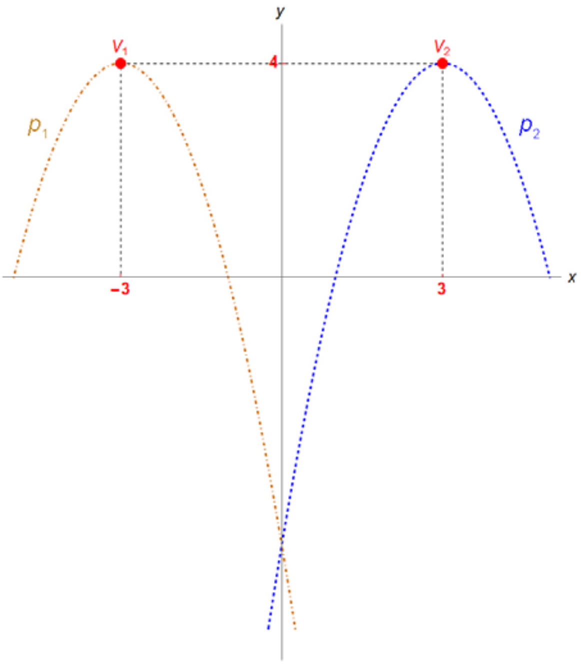
$$p_2: y = -\left(x^2 - 6x + 5\right) = -\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + 5\right) = -\left((x-3)^2 - 4\right) = -(x-3)^2 + 4.$$

Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\mathrm{V}_2 = [3; 4]$ a parabola bude otevřená dolů.

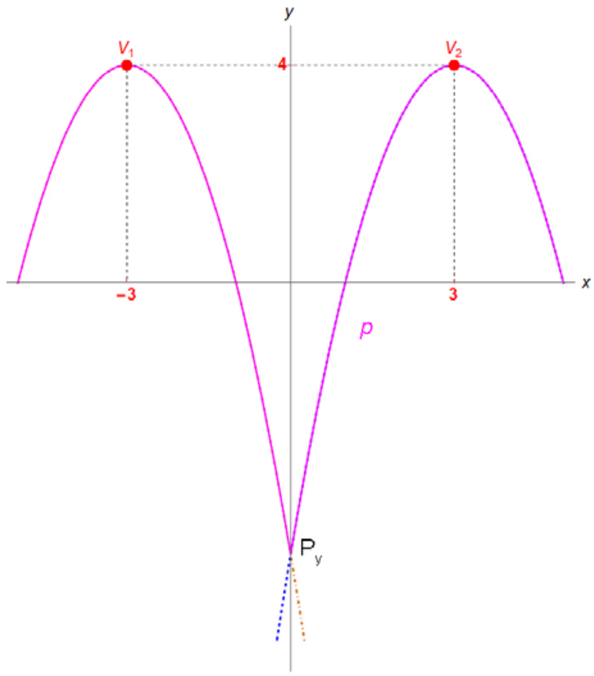
Grafy funkcí p_1 a p_2 jsou zobrazeny na obr. 10. Je nutné si ale uvědomit, že funkce p_1 je definována pouze pro $x \in (-\infty; 0)$, zatímco funkce p_2 je definována pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$. Proto výsledný graf funkce p vypadá tak, jak je zobrazeno na obr. 11.

Pozor při určování oboru hodnot funkce p! Na první pohled by se mohlo zdát, že oborem hodnot bude množina reálných čísel ležícími mezi y-ovou souřadnicí průsečíku grafu funkce p s osou y - tj. y-ovou souřadnicí bodu P_y - a y-ovou souřadnicí vrcholů obou parabol. Uvědomme si ale, že na obrázcích není (a ani nemůže být) zobrazen celý graf funkce p. Pro ta reálná x, jejichž absolutní hodnota je extrémně velká, nabývají funkční hodnoty extrémně malých (tj. k mínus nekonečnu se blížících) hodnot.

Pro funkci p tedy je: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H} = (-\infty; 4\rangle$.



obr. 10



obr. 11

Nakreslete pěkně graf funkce $q: y = \frac{1}{2}x^2 + 2|x| + 1$.

<u>Řešení:</u> Předpis funkce nejdříve upravíme do tvaru (2), abychom mohli určit souřadnice vrcholu paraboly. Řešení i v tomto případě rozdělíme na dva intervaly, na které rozdělí reálnou osu nulový bod absolutní hodnoty; ten je roven $x_0 = 0$.

Pro $x \in (-\infty; 0)$ je argument absolutní hodnot záporný, proto přepíšeme předpis zadané funkce q ve tvaru $q_1: y = \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot(-x) + 1$ a dále upravíme:

$$q_1: y = \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot(-x) + 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2\right) = \frac{1}{2}\left((x-2)^2 - 2\right) =$$

$= \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$. Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\mathrm{V}_1 = [2; -1]$, parabola bude otevřená nahoru a ve srovnání s parabolou odpovídající situaci $a = 1$ bude širší.

Pro $x \in \langle 0; \infty)$ je argument absolutní hodnoty nezáporný, proto můžeme předpis zadané funkce q přepsat ve tvaru $q_2: y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ a dále upravit:

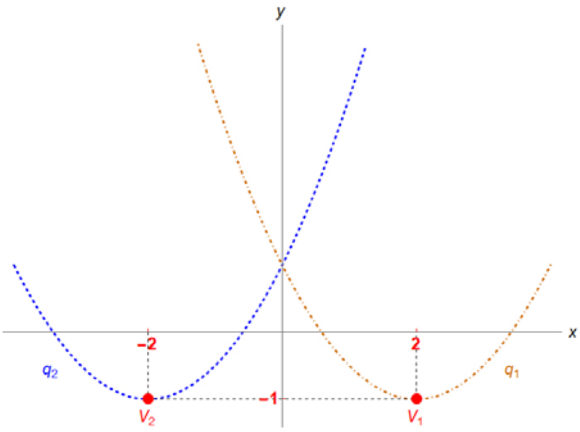
$$q_2: y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + 4 - 4 + 2\right) = \frac{1}{2}\left((x+2)^2 - 2\right) =$$

$= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$. Vrchol paraboly má tedy souřadnice $\mathrm{V}_2 = [-2; -1]$, parabola bude otevřená nahoru a ve srovnání s parabolou odpovídající situaci $a = 1$ bude širší.

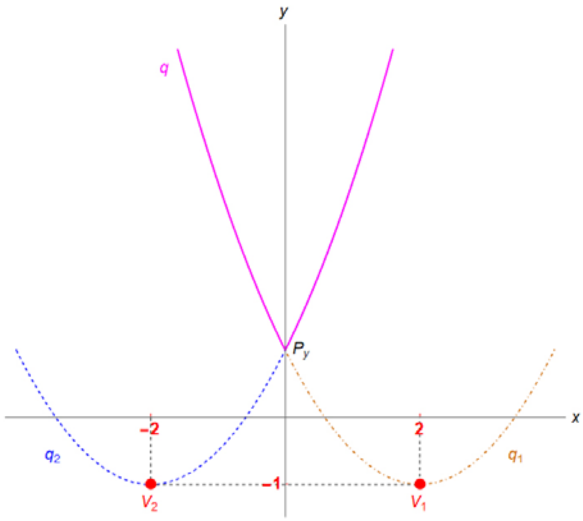
Grafy funkcí q_1 a q_2 jsou zobrazeny na obr. 12. Je nutné si ale uvědomit, že funkce q_1 je definována pouze pro $x \in (-\infty; 0)$, zatímco funkce q_2 je definována pouze pro $x \in \langle 0; \infty)$. Proto výsledný graf funkce q vypadá tak, jak je zobrazeno na obr. 13.

Pro určení oboru hodnot funkce q musíme znát y-ovou souřadnici průsečíku grafu této funkce s osou y - tj. y-ovou souřadnici bodu P_y. Jestliže je x-ová souřadnice bodu P_y nulová, je jeho y-ová souřadnice rovna $y_{\mathrm{P}_y} = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 2\cdot|0| + 1 = 1$.

Proto $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H} = \langle 1; \infty)$.



obr. 12



obr. 13

Nakreslete pěkně graf funkce $r: y = 2x^2 - 4|x| + \frac{1}{2}$.

<u>Řešení:</u> Tentokráte ukážeme rychlejší a snad i jednodušší variantu hledání grafu zadané funkce.

Začneme s funkcí r_1, v jejímž předpisu budeme ignorovat absolutní hodnotu. Upravíme tedy funkci $r_1: y = 2x^2 - 4x + \frac{1}{2}$, která odpovídá (při srovnání s minulými dvěma úlohami) předpisu pro nezáporná *x* (tj. pro ta *x*, pro něž je argument absolutní hodnoty nezáporný). Předpis funkce upravíme:

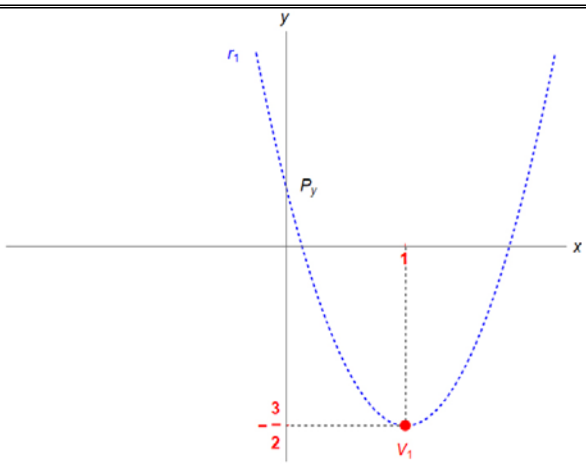
$$r_1: y = 2x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 2\left(x^2 - 2x + \frac{1}{4}\right) = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{1}{4}\right) = 2\left((x-1)^2 - \frac{3}{4}\right) = 2(x-1)^2 - \frac{3}{2}.$$

Vrchol paraboly má tedy souřadnice $V_1 = \left[1; -\frac{3}{2}\right]$, parabola bude otevřená nahoru a oproti parabole s koeficientem *a* rovným jedné bude užší. Tato parabola je zobrazena na obr. 14.

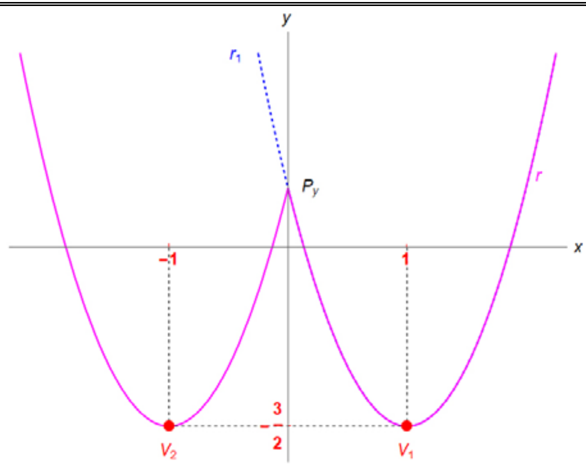
Nyní přistoupíme ke grafu funkce *r*. Druhá mocnina a absolutní hodnota u proměnné *x* vlastně říkají, že tak, jak se bude funkce chovat pro kladná *x*, bude se chovat i pro záporná *x*. (Tedy pokud bychom dosadili do předpisu funkce *r* např. čísla 5 a -5 dostaneme stejnou funkční hodnotu. Totéž nastane i pro další dvojice navzájem opačných reálných čísel.)

Graf funkce *r* tedy získáme z grafu funkce r_1 tak, že graf překopírujeme podél osy *y* (viz obr. 15).

Pro funkci *r* je $D = \mathbb{R}$ a $H = \left\langle -\frac{3}{2}; \infty \right)$.



obr. 14



obr. 15

1.3.3 Kombinace výše uvedených aplikací absolutní hodnoty

V této kapitole popíšeme graf kvadratické funkce dané předpisem ve tvaru

$$f: y = \left|a \cdot x^2 + b \cdot |x| + c\right|. \tag{7}$$

Jak vyplývá z předpisu funkce, jedná se funkci, kterou jsme částečně vyšetřovali v kapitole 1.3.1 a částečně v kapitole 1.3.2. V případě funkce dané předpisem (7) tedy nejdříve najdeme graf funkce dané předpisem (6) a poté na celou funkci aplikujeme absolutní hodnotu.

Graf funkce dané předpisem (7) tedy musí ležet nad osou *x*, které se bude maximálně dotýkat.

Postup si ukážeme na jedné úloze.

Nakreslete pěkně graf funkce $s: y = \left|\frac{x^2}{4} - 2|x| - 1\right|$.

Řešení: Začneme s úpravou funkce, která je v argumentu absolutní hodnoty a u níž zatím vynecháme absolutní hodnotu u *x*. Upravíme tedy funkci $s_1: y = \frac{x^2}{4} - 2x - 1$. Úpravou získáme:

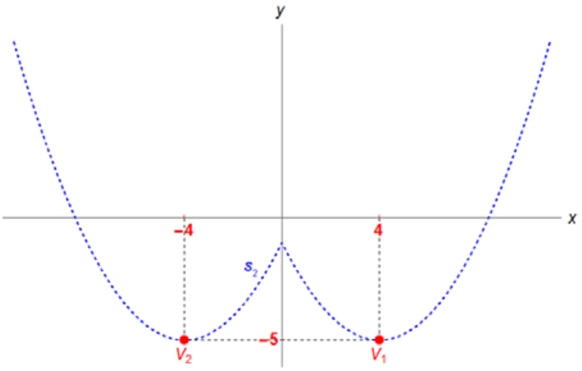
$$s_1: y = \frac{x^2}{4} - 2x - 1 = \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x - 4\right) = \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16 - 16 - 4\right) = \frac{1}{4}\left((x-4)^2 - 20\right) = \frac{1}{4}(x-4)^2 - 5.$$

Vrcholem paraboly, která je grafem této funkce, tedy bude bod $V_1 = [4; -5]$.

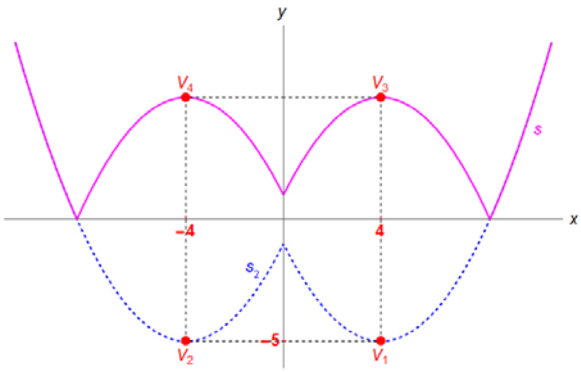
Abychom získali graf funkce $s_2: y = \frac{x^2}{4} - 2|x| - 1$, musíme tu část grafu funkce s_1, která odpovídá kladným *x*, překopírovat podle osy *y*. Graf funkce s_2 je zobrazen na obr. 16.

Graf funkce *s* získáme tak, že část grafu funkce s_2, která leží pod osou *x*, překlopíme nad osu *x*. Pro všechna *x* z definičního oboru funkce totiž musíme získat pouze nezáporné funkční hodnoty! Graf funkce *s* je zobrazen na obr. 17.

Pro funkci *s* je $D = \mathbb{R}$ a $H = \langle 0; \infty)$.



obr. 16



obr. 17

1.3.4 Složitější úlohy

Složitější úlohy jsou zaměřené na hledání grafu funkce, v jejímž předpisu jsou absolutní hodnoty umístěné tak, že úlohy je nutné řešit pouze rozpisem na jednotlivých intervalech daných nulovým bodem absolutní hodnoty. Grafem takové funkce pak bývá křivka, která je složené ze dvou (případně víc) křivek (většinou parabol). Výsledná funkce je spojitá, ale už ne nutně hladká.

Spojitá funkce je taková, která je namalovatelná jedním tahem. Hladká funkce je taková, která nemá v grafu nikde žádnou „špičku“ nebo „zlom“; každá „špička“ či „zlom“ přitom odpovídá jednomu nulovému bodu absolutní hodnoty z předpisu funkce (vzpomeňme na lineární funkce s absolutní hodnotou).

V rámci této kapitoly budou ukázány dvě řešené úlohy.

Nakreslete pěkně graf funkce $t: y = x|x-2|+1$.

<u>Řešení:</u> V tomto případě není jiná možnost, než vyšetřit funkci na dvou intervalech, na které rozděluje reálnou osu nulový bod absolutní hodnoty. Ten je roven $x_0 = 2$.

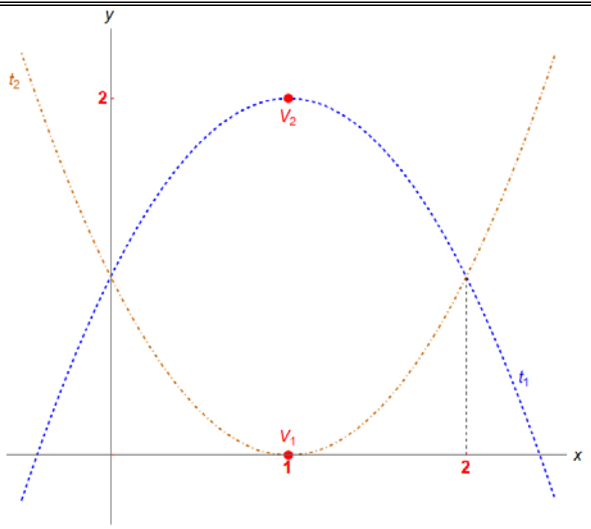
Na intervalu $x \in (-\infty; 2)$ přepíšeme předpis funkce *t* do tvaru $t_1: y = x(-x+2)+1$ a upravíme: $t_1: y = -x^2+2x+1 = -(x^2-2x+1-1-1) = -\left((x-1)^2-2\right) = -(x-1)^2+2$. Vrchol této paraboly, která je otevřená dolů, má tedy souřadnice $\mathrm{V}_1 = [1; 2]$.

Na intervalu $x \in \langle 2; \infty)$ přepíšeme předpis funkce *t* do tvaru $t_2: y = x(x-2)+1$ a upravíme: $t_2: y = x^2-2x+1 = (x-1)^2$. Vrchol této paraboly, která je otevřená nahoru, má souřadnice $\mathrm{V}_2 = [1; 0]$. Grafy funkcí t_1 a t_2 jsou zobrazeny na obr. 18.

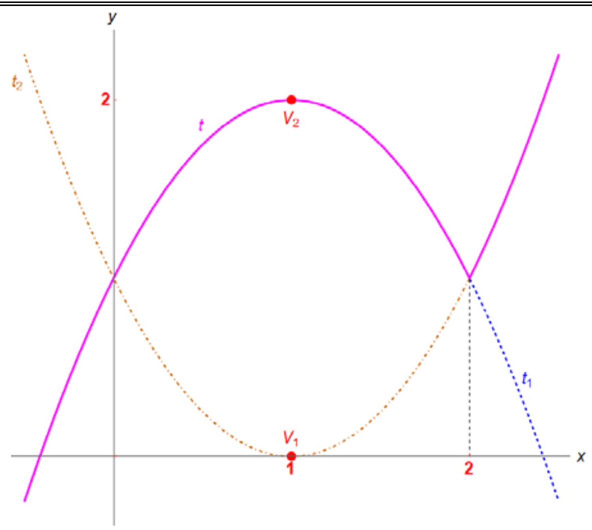
Abychom získali graf funkce *t*, je nutné si uvědomit, na jakých intervalech jsou funkce t_1 a t_2 definovány, a do výsledného grafu zahrnout pouze příslušnou část jejich grafu. Graf funkce *t* je pak zobrazen na obr. 19.

Platí $\mathrm{D} = \mathrm{H} = \mathbb{R}$.

Z grafu obr. 19 je vidět, že funkce *t* má skutečně zlom v bodě $x_0 = 2$, tj. v nulovém bodě absolutní hodnoty vystupující v zadání funkce *t*.



obr. 18



obr. 19

Nakreslete pěkně graf funkce $u: y = x|x+1|-2x$.

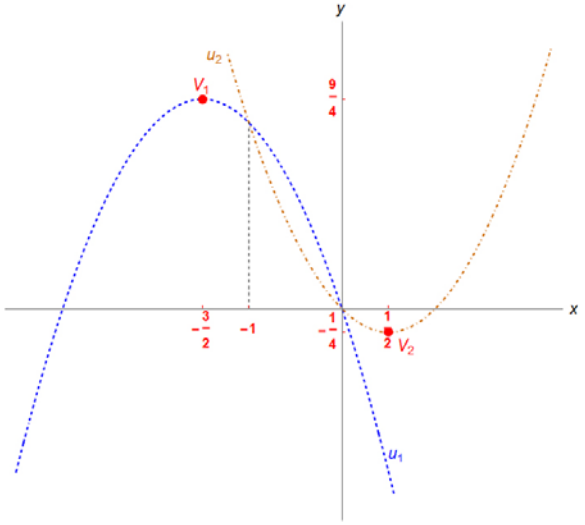
<u>Řešení:</u> Nulový bod absolutní hodnoty je roven $x_0 = -1$ a průběh funkce vyšetříme na dvou intervalech, na které reálnou osu rozděluje právě nulový bod.

Na intervalu $x \in (-\infty; -1)$ přepíšeme předpis funkce *u* ve tvaru $u_1: y = x(-x-1)-2x$ a upravíme: $u_1: y = -x^2-x-2x = -(x^2+3x) = -\left(x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$. Vrchol této paraboly, která je otevřená dolů, má tedy souřadnice $\mathrm{V}_1 = \left[-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right]$.

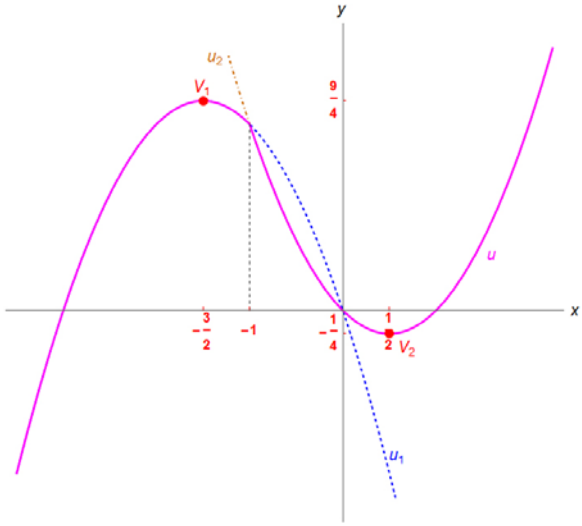
Na intervalu $x \in \langle -1; \infty)$ přepíšeme zadanou funkci ve tvaru $u_2: y = x(x+1)-2x$ a upravíme: $u_2: y = x^2+x-2x = x^2-x = x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Vrchol paraboly otevřené nahoru má souřadnice $\mathrm{V}_2 = \left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right]$. Grafy funkcí u_1 a u_2 jsou zobrazeny na obr. 20.

Je nutné si ale uvědomit, že obě funkce jsou definovány pouze na části reálných čísel, proto musíme jejich definiční obory v grafu výsledné funkce *u* zohlednit. Graf funkce *u* je pak zobrazen na obr. 21.

Pro funkci *u* je $\mathrm{D} = \mathrm{H} = \mathbb{R}$.



obr. 20



obr. 21

1.4 Kvadratické rovnice a nerovnice

V této kapitole se seznámíme s postupy vedoucími k nalezení řešení kvadratických rovnic (běžných i s parametrem) a nerovnic. V závěru kapitoly se budeme věnovat i soustavám rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická, a slovním úlohám, jejichž řešení vede na kvadratické rovnice nebo nerovnice.

1.4.1 Základní definice a konkrétní příklady kvadratických rovnic

Začneme definicí kvadratické rovnice.

KVADRATICKÁ ROVNICE S JEDNOU REÁLNOU NEZNÁMOU x SE NAZÝVÁ KAŽDÁ ROVNICE, KTEROU LZE EKVIVALENTNÍMI ÚPRAVAMI PŘEVÉST NA TVAR

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \tag{8}$$

KDE $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ A $b, c \in \mathbb{R}$.

Podmínka nenulovosti koeficientu a je stejná, jako u kvadratických funkcí (viz kapitola 1.2): v případě, že by koeficient a byl nulový, přejde rovnice daná předpisem (8) na lineární rovnici.

Nejdříve vyřešíme několik konkrétních úloh a poté odvodíme obecný vztah pro kořeny kvadratické rovnice (viz kapitola 1.4.2). Při řešení kvadratických rovnic je vhodné postupovat logicky a odvozený vztah pro kořeny kvadratické rovnice (vztah (12) v kapitole 1.4.2) používat jen v těch případech, kdy nebude možné postupovat jednodušeji.

Při řešení některých typů kvadratických rovnic využijeme dříve uvedený a vysvětlený vztah

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \sqrt{\alpha^2} = |\alpha| . \tag{9}$$

Ukážeme postupně řešení různých typů kvadratických rovnic na konkrétních úlohách.

V množině reálných čísel řešte rovnici $x^2 - 4 = 0$.

Řešení: Rovnici lze začít řešit osamostatněním neznámé; tím získáme rovnici ve tvaru $x^2 = 4$. Nyní odmocníme, ale musíme si uvědomit, že platí vztah (9). Dostaneme tedy $|x| = 2$. Kořeny zadané rovnice jsou tedy dva: $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$.

Můžeme tedy udělat závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{-2; 2\}$.

Kvadratické rovnice velmi úzce souvisejí s kvadratickými funkcemi. Na levou stranu kvadratické rovnice (8) lze nahlížet jako na předpis kvadratické funkce (viz předpis (1)). Na kvadratickou rovnici (8) tedy můžeme nahlížet jako na kvadratickou funkci s tím, že hledáme průsečík grafu kvadratické funkce s osou *x*.

Hledáme totiž taková *x*, pro která je funkční hodnota nulová; a taková *x* tedy odpovídají průsečíkům grafu kvadratické funkce s osou *x*.

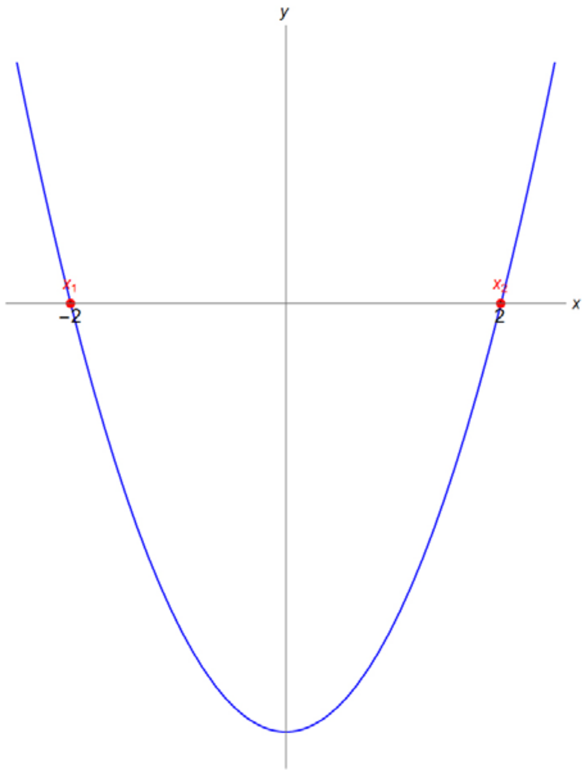
Tuto situaci pro vyřešenou rovnici ilustruje obr. 22.

Vzhledem k tomu, že grafem kvadratické funkce je parabola, mohou nastat při posunu paraboly podél osy *y* tři možnosti (ty budou dále diskutovány v kapitole 1.4.2):

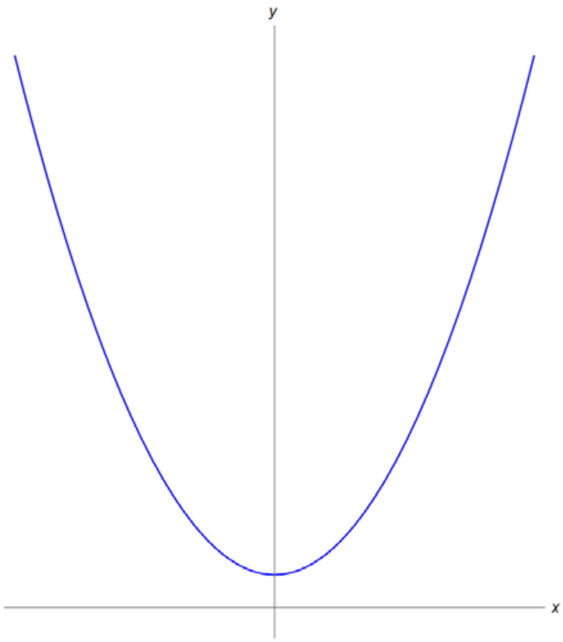
1. parabola protne osu *x* ve dvou bodech - příslušná kvadratická rovnice má dvě řešení;
2. parabola se dotkne osy *x* v jednom bodě - příslušná kvadratická rovnice má jedno řešení, tzv. dvojnásobný kořen;
3. parabola neprotne osu *x* - příslušná kvadratická rovnice nemá v reálných číslech žádné řešení.

Později ukážeme, že v posledním popsaném případu má kvadratická rovnice řešení v komplexních číslech.

Důležité je také si všimnout použitých sloves: *protnout* osu *x* znamená něco jiného než *dotknout* se osy *x*. Už sama slovesa naznačují počet kořenů příslušné kvadratické rovnice.



obr. 22



obr. 23

V množině reálných čísel řešte rovnici $x^2 + 1 = 0$.

Řešení: Rovnici budeme řešit podobně jako předchozí rovnici. Upravíme jí do tvaru $x^2 = -1$, ze kterého je zřejmé, že tato rovnice nemá v množině reálných čísel řešení.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \emptyset$.

Graf kvadratické funkce odpovídající řešené rovnici je zobrazen na obr. 23. Je zřejmé, že parabola v tomto případě neprotíná osu *x*.

V množině reálných čísel řešte rovnici $2x^2 + 5x = 0$.

Řešení: V tomto případě se nabízí vytknout *x*. Získáme tak rovnici $x \cdot (2x + 5) = 0$.

Rovnice, jejíž jedna strana je zapsána jako součin dvou a více výrazů a jejíž druhá strana je nulová, se velmi jednoduše řeší. Je-li totiž součin několika činitelů roven nule, pak alespoň jeden z nich je roven nule.

V našem případě tedy dostáváme $x_1 = 0$ nebo $2x_2 + 5 = 0$, tedy $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$.

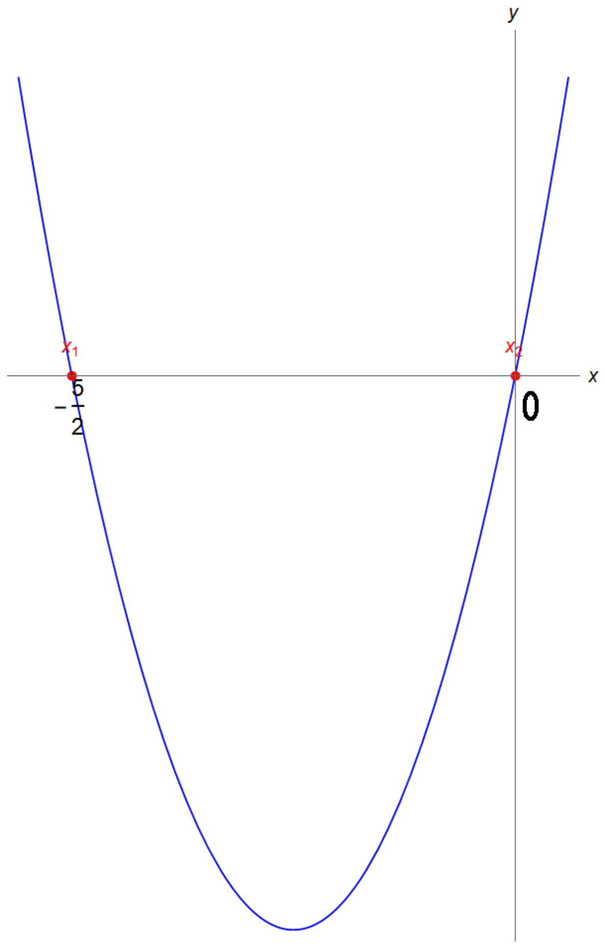
Graf kvadratické funkce odpovídající řešené rovnici je zobrazen na obr. 24.

V množině reálných čísel řešte rovnici $x^2 - 6x + 9 = 0$.

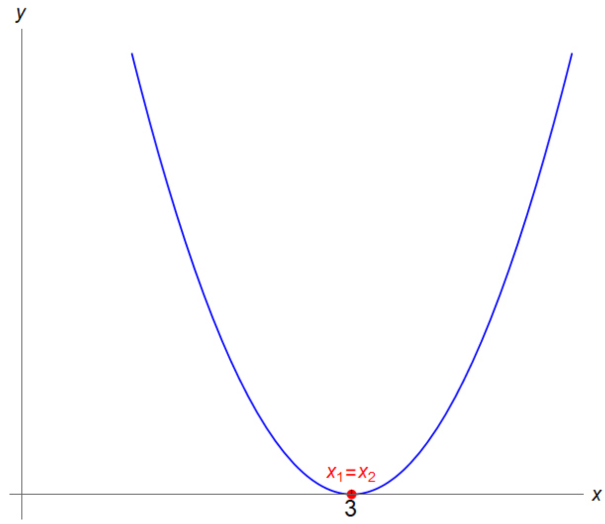
Řešení: Je zřejmé, že levá strana rovnice odpovídá algebraickému vzorci (3), a proto můžeme rovnici přepsat ve tvaru: $(x-3)^2 = 0$. Nyní můžeme odmocnit. Obecně musíme dávat pozor na správný zápis s absolutní hodnotou (viz vztah (9)). Správě bychom tedy měli psát: $|x-3| = 0$. Vzhledem k tomu, že na pravé straně rovnice je nula, můžeme psát pouze $x - 3 = 0$. Odtud vyjádříme $x = 3$. Zadaná rovnice má tedy jeden (tzv. dvojnásobný) kořen.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{3\}$.

Graf kvadratické funkce odpovídající řešené rovnici je zobrazen na obr. 25.



obr. 24



obr. 25

V množině reálných čísel řešte rovnici $\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2} = 0$.

Řešení: Zadaná rovnice je složitější v tom smyslu, že jí není možné řešit vytýkáním, převodem neznámé na jednu stranu nebo přímou aplikací algebraického vztahu (3). Nicméně umíme kvadratický trojčlen, stojící na levé straně rovnice, převést do tvaru, v němž můžeme příslušný algebraický vztah použít. Použijeme metodu doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu dvojčlenu (viz kapitola 1.2.3).

V případě, že máme řešit rovnici, můžeme si ji převést do elegantnějšího tvaru. Můžeme tedy např. celou rovnici vynásobit dvěma. Dostaneme tak rovnici $x^2 - 2x - 3 = 0$. Nyní provedeme avizované doplnění na čtverec. Doplníme druhou mocninu poloviny lineárního koeficientu a nezapomene tento člen zase odečíst: $x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$. Využijeme avizovaný algebraický vztah a ostatní členy rovnice převedeme na její druhou stranu: $(x-1)^2 = 4$. S využitím vztahu (9) rovnici odmocníme a získáme rovnici ve tvaru: $|x-1| = 2$. Tato rovnice s absolutní hodnotou vede na dvě lineární rovnice bez absolutní hodnoty: $x_1 - 1 = -2$ a $x_2 - 1 = 2$. Dostáváme tedy kořeny kvadratické rovnice $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{-1; 3\}$.

Graf kvadratické funkce odpovídající řešené kvadratické rovnici je zobrazen na obr. 26.

V množině reálných čísel řešte rovnici $-x^2 + 2x - 3 = 0$.

Řešení: Budeme postupovat analogicky jako v minulé úloze: levou stranu doplníme na čtverec. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnici, můžeme předtím celou rovnici vynásobit číslem -1. Postupně tak dostaneme:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

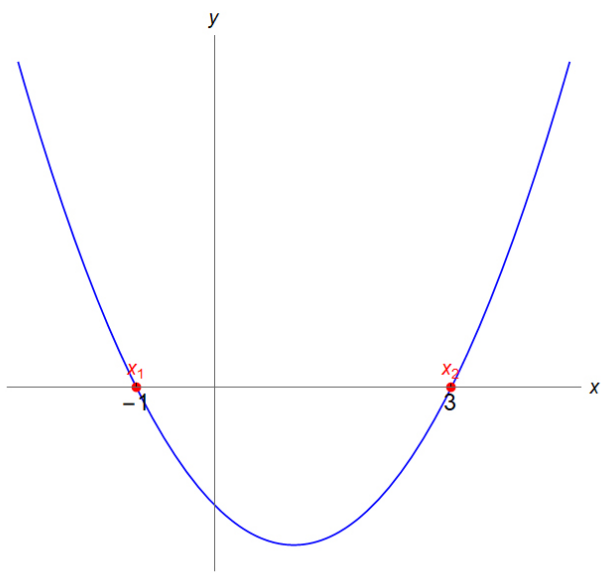
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + 3 = 0$$

$$(x-1)^2 = -2$$

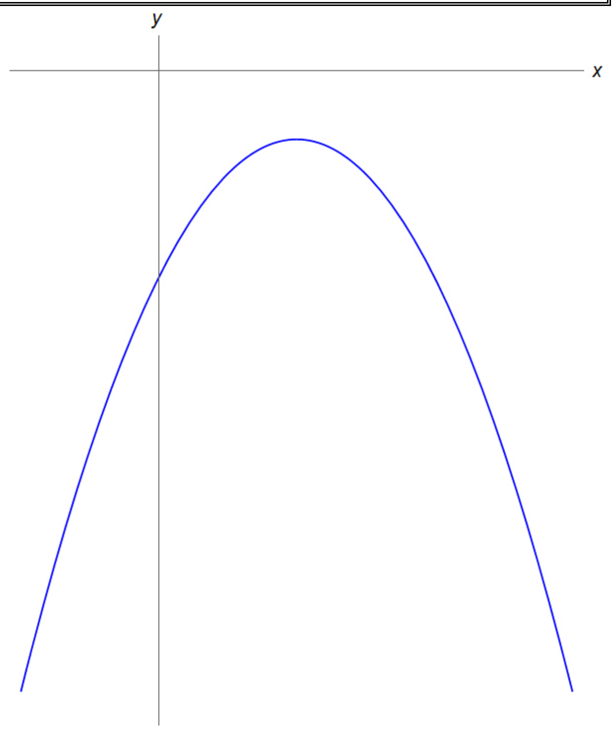
Tato rovnice přitom nemá v reálných číslech řešení: žádné reálné číslo nemá druhou mocninu rovnou zápornému číslu.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \emptyset$.

Graf kvadratické funkce odpovídající zadané rovnici je zobrazen na obr. 27 (je vykreslena kvadratická funkce odpovídající zadanému tvaru rovnice).



obr. 26



obr. 27

Souvislost kvadratických rovnic a funkcí je užitečná ještě v dalších aspektech.

Pokud má kvadratická rovnice jeden dvojnásobný kořen x_{12}, má parabola, která je grafem příslušné kvadratické funkce, vrchol v bodě $\mathrm{V} = [x_{12}; 0]$ a tímto bodem prochází i osa paraboly.

Pokud má kvadratická rovnice dva kořeny x_1 a x_2, je x-ová souřadnice vrcholu paraboly rovna $x_\mathrm{V} = \frac{x_1 + x_2}{2}$. To znamená, že osa paraboly protíná osu x přesně v poloviční vzdálenosti mezi oběma kořeny.

1.4.2 Vztah pro výpočet kořenů kvadratické rovnice

V kapitole 1.4.1 bylo vyřešeno několik kvadratických rovnic. Některé z nich bylo možné vyřešit velmi snadno, u jiných bylo zapotřebí použít doplnění kvadratického trojčlenu na druhou mocninu. S využitím této techniky nyní odvodíme vztahy pro kořeny obecně zadané kvadratické rovnice (8).

Rovnici $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ nejdříve vydělíme a, které je podle definice kvadratické rovnice nenulové. Dostaneme tedy rovnici ve tvaru $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$. Nyní doplníme na čtverec $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ a dále upravíme: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$. Pravou stranu rovnice ještě převedeme na společného jmenovatele a dostaneme rovnici ve tvaru

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (10)$$

Nyní musíme postupovat opatrně. Další úprava, kterou bychom rádi provedli, je odmocnění obou stran rovnice. Na pravé straně rovnice je ale rozdíl, a proto se může stát, že tato strana rovnice bude záporná.

Čitatel zlomku pravé strany je pro řešení kvadratické rovnice klíčový, proto jej označíme symbolem *D*. Pro *D* tedy platí:

$$D = b^2 - 4ac\,. \tag{11}$$

Tento výraz se nazývá **diskriminant kvadratické rovnice**; tento termín zavedl britský matematik James Joseph Sylvester (1814 - 1897) v roce 1851.

V závislosti na hodnotě diskriminantu *D* rozlišíme tři případy.

1. Je-li $D < 0$, nemá zadaná kvadratická rovnice v reálných číslech řešení.
2. Je-li $D = 0$, můžeme rovnici (10) přepsat ve tvaru $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Je zřejmé, že tato rovnice má jediný reálný kořen (říká se mu **dvojnásobný kořen**), který je roven $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.
3. Je-li $D > 0$, pak má kvadratická rovnice dva různé reálné kořeny. Pravou stranu v rovnici (10) tedy můžeme odmocnit a s využitím zavedeného diskriminantu (11) psát $\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ nebo též $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$. Pro kořeny kvadratické rovnice pak můžeme psát rovnici

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,. \tag{12}$$

Pokud máme nalezeny kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice (8), můžeme tuto rovnici zapsat v ekvivalentním tvaru

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0\,. \tag{13}$$

Při řešení kvadratických rovnic je zvykem nejdříve vypočítat diskriminant a na základě jeho hodnoty postupovat dále. Rovnici, jejíž diskriminant vyjde nulový, poznáme na první pohled: levá strana rovnice (bude-li na pravé straně nula) půjde přepsat s využitím algebraických vztahů (3) bez nutnosti doplňovat další členy.

Platí ale to, že se snažíme rovnici, kterou ekvivalentními úpravami převedeme do základního tvaru (8), řešit co možná nejjednodušeji:

1. přímým vyjádřením neznámé;
2. vytýkáním;
3. doplněním na čtverec - tyto tři typy postupů byly ukázány v kapitole 1.4.1;
4. rozkladem kvadratického trojčlenu - viz kapitola 1.4.3;
5. pomocí vztahu (12).

Jinými slovy: výpočet využívající diskriminant kvadratické rovnice využíváme až jako poslední, když nelze kvadratickou rovnici vyřešit jednodušeji. Řešení pomocí diskriminantu je přímočaré, vede vždy k cíli, ale může být někdy časově náročné a i zdrojem zbytečných chyb.

Uvědomme si, že kvadratická rovnice se v pokročilejších partiích matematiky stane nástrojem, pomocí kterého bude nutné rychle vyřešit zcela jiné (a náročnější) úlohy. Proto se snažme počítat co nejefektivněji.

1.4.3 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Začneme řešením jedné konkrétní úlohy, na základě níž se budeme snažit odvodit obecně platné vztahy.

V množině reálných čísel řešte rovnici $5x^2 - 6x - 8 = 0$.

Řešení: Začneme výpočtem diskriminantu (podle vztahu (11): $D = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-8) = 36 + 160 = 196$. Diskriminant je kladný, rovnice má tedy dva reálné kořeny.

Ty vypočítáme podle vztahu (12): $x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{196}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm 14}{10}$. Tedy $x_1 = \frac{6+14}{10} = 2$ a $x_2 = \frac{6-14}{10} = -\frac{4}{5}$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \left\{-\frac{4}{5}; 2\right\}$.

Zkusme nyní najít souvislost vypočtených kořenů se zadanou rovnicí. Tu si převedeme do ekvivalentního tvaru $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{8}{5} = 0$. Prozkoumejme, čemu je roven součet a součin nalezených kořenů. Pro součet kořenů dostáváme $x_1 + x_2 = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ a pro součin kořenů platí $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{8}{5}$. Hodnoty, které jsme nyní získali, nalezneme i v rovnici, jejíž kořeny jsme vyšetřovali. Je zřejmé, že součet kořenů je až na znaménko roven koeficientu lineárního členu a součin kořenů je roven koeficientu absolutního členu.

Pochopitelně, že na základě jedné konkrétní úlohy nemůžeme učinit obecný závěr. Ale můžeme tuto skutečnost dokázat obecně.

Řešením obecné rovnice (8) jsou (za předpokladu, že diskriminant rovnice je kladný) podle vztahu (12) kořeny $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Pro jejich součet můžeme psát $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$. Pro součin kořenů obecné kvadratické rovnice pak lze psát $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Můžeme tedy vyslovit závěr.

MÁ-LI KVADRATICKÁ ROVNICE (8) KOŘENY x_1 A x_2, PAK PRO TYTO KOŘENY PLATÍ VZTAHY:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ a } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \tag{14}$$

Vztahy (14) se nazývají **Viétovy vztahy**; jako první je totiž obecně odvodil francouzský matematik Francois Viéte (1540 - 1603).

V této souvislosti se také často zavádí tzv. **normovaná kvadratická rovnice**.

NORMOVANÁ KVADRATICKÁ ROVNICE JE ROVNICE VE TVARU:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0, \tag{15}$$

PRO JEJÍŽ KOŘENY x_1 A x_2 LZE V PŘÍPADĚ, ŽE PLATÍ $p^2 - 4q > 0$, PSÁT VIÉTOVY VZORCE VE TVARU:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ a } x_1 \cdot x_2 = q. \tag{16}$$

Převod rovnice (8) na rovnici ve tvaru (15) je prostý: stačí rovnici (8) vydělit koeficientem a, který je podle definice nenulový, a označit zlomek $\frac{b}{a}$ symbolem p a zlomek $\frac{c}{a}$ symbolem q.

Podmínka $p^2 - 4q > 0$ je podmínka na kladný diskriminant normované kvadratické rovnice.

Terminologie v tomto případně není příliš podstatná, je nutné chápat princip vztahu součtu kořenů a součinu kořenů k jednotlivým koeficientům řešené kvadratické rovnice.

Nyní uvedeme několik řešených úloh.

Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Řešení: S využitím Viétových vztahů bude řešení snadné, byť tento první řešený příklad bude na výklad zdlouhavý. Chceme-li rychle a efektivně používat Viétovy vztahy, musíme „znát čísla“. V případě zadané rovnice hledáme dva kořeny tak, aby jejich součin byl roven 6 a součet byl roven pěti (viz vztahy (16)). Proto musíme být schopni rychle určit dělitele čísla 6 a vybrat takové, jejichž součet je roven -5.

Doporučený postup je využít vztah (13) a zapsat si do závorek zatím jen takové dělitele čísla 6, jejichž součin je 6 a rozdíl může být -5. Teoreticky připadají v úvahu dvojice 2, 3 a 6, 1. Součin je kladné číslo, proto musejí mít oba dělitelé stejné znaménko. Je tedy zřejmé, že z čísel 6 a 1 nelze číslo -5 získat. Proto můžeme psát rozklad ve tvaru $(x \quad 3)\cdot(x \quad 2) = 0$. Znaménka teď určíme tak, aby součin zapsaných čísel byl roven +6 a součet -5. Tedy jediná možnost je $(x-3)\cdot(x-2) = 0$.

Může se zdát, že jsme při prováděných úvahách porušili první z Viétových vztahů (16), když jsme nezměnili znaménko u lineárního členu. Zatím jsme ale nemluvili o kořenech kvadratické rovnice. Ty určíme nyní snadno, protože rovnici máme zapsanou ve tvaru součinu a na pravé straně je nula. Kořeny zadané kvadratické rovnice tedy jsou: $x_1 = 3$ a $x_2 = 2$. A tyto kořeny splňují oba Viétovy vztahy.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{2; 3\}$.

Předchozí úloha vypadá složitě, ale to jen proto, že byla první a bylo nutné vysvětlit princip. Ve skutečnosti je použití Viétových vztahů při řešení kvadratických rovnic velmi efektivní.

Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici $u^2 - 5u - 14 = 0$.

Řešení: S využitím Viétových vztahů bude řešení snadné. S využitím dělitelů čísla 14 a s ohledem na koeficient lineárního členu můžeme rovnici prozatím přepsat ve tvaru $(u \quad 7)\cdot(u \quad 2) = 0$. Vzhledem k tomu, že absolutní člen je záporný, musejí mít oba dělitelé různá znaménka. Přitom součet dělitelů musí být roven koeficientu lineárního členu. Tedy jediná možnost je $(u-7)\cdot(u+2) = 0$. Proto $u_1 = 7$ a $u_2 = -2$. Viétovy vztahy platí.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{-2; 7\}$.

Viétovy vztahy lze použít i k řešení jiného typu úloh.

Napište kvadratickou rovnici, která má oba kořeny třikrát větší, než jsou kořeny kvadratické rovnice $2v^2 + 9v - 15 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

Řešení: K řešení využijeme Viétovy vztahy (14). Označíme-li kořeny zadané rovnice symboly v_1 a v_2, pak platí: $v_1 + v_2 = -\frac{9}{2}$ a $v_1 \cdot v_2 = -\frac{15}{2}$. Označíme-li kořeny nové rovnice např. symboly x_1 a x_2, pak podle zadání úlohy platí $x_1 = 3v_1$ a $x_2 = 3v_2$. Podle Viétových vztahů platí: $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1 \cdot x_2 = q$. Po dosazení dostaneme: $3v_1 + 3v_2 = -p$ a $3v_1 \cdot 3v_2 = q$. Získané rovnice upravíme do tvarů $3(v_1 + v_2) = -p$ a $9v_1 \cdot v_2 = q$ a dosadíme z Viétových vztahů vyjádřených z původní rovnice. Dostaneme $3\cdot\left(-\frac{9}{2}\right) = -p$ a $9\cdot\left(-\frac{15}{2}\right) = q$. Dostáváme tedy $p = \frac{27}{2}$ a $q = -\frac{135}{2}$.

Můžeme tedy napsat kvadratickou rovnici ve tvaru $x^2 + \frac{27}{2}x - \frac{135}{2} = 0$. Tato rovnice je jedna z nekonečně mnoha možných, které z nalezené rovnice můžeme získat vynásobením nenulovým číslem a.

Hledaná rovnice má tedy tvar $a\cdot\left(2x^2 + 27x - 135\right) = 0$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Napište kvadratickou rovnici, která má oba kořeny o pět menší, než jsou kořeny kvadratické rovnice $3w^2 - 12w + 5 = 0$, aniž tuto rovnici řešíte.

Řešení: K řešení využijeme Viétovy vztahy (14). Označíme-li kořeny zadané rovnice symboly w_1 a w_2, pak platí: $w_1 + w_2 = 4$ a $w_1 \cdot w_2 = \frac{5}{3}$. Označíme-li kořeny nové rovnice symboly x_1 a x_2, pak podle zadání úlohy platí $x_1 = w_1 - 5$ a $x_2 = w_2 - 5$. Podle Viétových vztahů platí: $x_1 + x_2 = -p$ a $x_1 \cdot x_2 = q$. Po dosazení dostaneme: $w_1 - 5 + w_2 - 5 = -p$ a $(w_1 - 5)\cdot(w_2 - 5) = q$. Získané rovnice upravíme do tvarů $w_1 + w_2 - 10 = -p$ a $w_1 \cdot w_2 - 5(w_1 + w_2) + 25 = q$ a dosadíme z Viétových vztahů vyjádřených z původní rovnice. Dostaneme $4 - 10 = -p$ a $\frac{5}{3} - 5 \cdot 4 + 25 = q$. Dostáváme tedy $p = 6$ a $q = \frac{20}{3}$.

Můžeme tedy napsat kvadratickou rovnici ve tvaru $3x^2 + 18x + 20 = 0$. Tato rovnice je jedna z nekonečně mnoha možných, které z nalezené rovnice můžeme získat vynásobením nenulovým číslem *a*.

Hledaná rovnice má tedy tvar $a \cdot (3x^2 + 18x + 20) = 0$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

V obou uvedených úlohách měly nové kořeny vlastnosti, které byly vůči původním kořenům symetrické (tj. oba původní kořeny se měly násobit stejným číslem resp. zmenšit o stejné číslo). Proto nezáviselo na tom, který „nový“ kořen získáme ze kterého „původního“ kořenu. Pokud by zadání uvažovanou „symetrii“ nemělo, nebyla by úloha řešitelná.

1.4.4 Rozklad kvadratického trojčlenu na součin lineárních činitelů

S kvadratickou rovnicí a jejím řešením velmi úzce souvisí i rozklad kvadratického trojčlenu na součin lineárních činitelů.

Na základě definice kvadratické funkce (viz kapitola 1.2) víme, že kvadratický trojčlen je výraz $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Jeho rozklad na součin lineárních činitelů je rozklad ve tvaru

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2), \tag{17}$$

kde x_1 a x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Pokud tato rovnice nemá v množině reálných čísel řešení, není možné jí odpovídající kvadratický trojčlen v množině reálných čísel rozložit.

Pokud chceme kvadratický trojčlen rozložit na součin lineárních činitelů, je nutné vyřešit jemu odpovídající kvadratickou rovnici. Nalezené kořeny lze pak použít k rozkladu kvadratického trojčlenu.

Napište ve tvaru součinu $2a^2 + 6a - 20$.

Řešení: Nejdříve musíme najít kořeny kvadratické rovnice $2a^2 + 6a - 20 = 0$. Tu můžeme přepsat v jednodušším tvaru $a^2 + 3a - 10 = 0$. S využitím Viétových vztahů lze rovnici psát ve tvaru $(a + 5)\cdot(a - 2) = 0$.

Nyní můžeme zadaný kvadratický trojčlen psát ve tvaru $2 \cdot (a + 5) \cdot (a - 2)$.

Pozor! Zatímco rovnici bylo možné dělit dvěma, abychom si jí zjednodušili, kvadratický trojčlen **NELZE DĚLIT ANI NÁSOBIT** žádným reálným číslem! Tím bychom měnili jeho hodnotu!

Výše uvedený postup lze pochopitelně zjednodušit a při získání rutiny vynechat řešení kvadratické rovnice; tyto jednoduché rovnice zvládneme vyřešit z hlavy.

Upravte výraz $\frac{2\alpha^2 + 4\alpha - 30}{-\alpha^2 - \alpha + 12}$.

Řešení: V čitateli i jmenovateli nejdříve vytkneme, abychom získali kvadratický trojčlen v normovaném tvaru, pak použijeme rozklad pomocí Viétových vztahů.

Postupně tedy dostaneme $\frac{2\alpha^2+4\alpha-30}{-\alpha^2-\alpha+12}=\frac{2\left(\alpha^2+2\alpha-15\right)}{-\left(\alpha^2+\alpha-12\right)}=\frac{2(\alpha-3)(\alpha+5)}{-(\alpha-3)(\alpha+4)}$. Nyní můžeme zkrátit a získáme výsledek: $\frac{2\alpha^2+4\alpha-30}{-\alpha^2-\alpha+12}=-\frac{2(\alpha+5)}{\alpha+4}$.

A nesmíme zapomenout na podmínky, za kterých má výraz smysl: $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$.

1.4.5 Iracionální rovnice (rovnice s neznámou pod odmocninou)

Na kvadratickou rovnici mohou vést i rovnice, ve kterých se neznámá vyskytuje pod odmocninou (tj. v odmocněnci). Takovým rovnicím se říká **iracionální rovnice**. Při řešení těchto rovnic se využívají stejné ekvivalentní úpravy jako při řešení lineárních rovnic (resp. jako byly zmíněny v kapitole 1.4.1) při definici pojmu kvadratická rovnice).

Navíc je ale nutné provádět i tzv. **důsledkové úpravy**, které již obecně nemusejí být ekvivalentní.

DŮSLEDKOVÁ ÚPRAVA ROVNICE JE ÚPRAVA, PŘI NÍŽ UMOCNÍME OBĚ STRANY ROVNICE NA STEJNOU MOCNINU.

Příčina, proč tento typ úprav nemusí být ekvivalentní úpravou, vyplývá z vlastnosti druhé mocniny: druhá mocnina přiřazuje všem reálným číslům čísla nezáporná. Pokud budeme umocňovat pouze **nezáporná čísla** (resp. výrazy nabývajících pro danou proměnnou pouze nezáporných hodnot), je umocňování ekvivalentní úpravou. V případě umocňování záporných čísel (resp. výrazů) už ne!

Umocnění na druhou tedy „likviduje“ znaménka! A to je příčina, proč se nemusí jednat o ekvivalentní úpravu!

V tomto případě je nutné postupovat velmi opatrně. Proto je nutné postupovat jedním ze dvou způsobů:

1. během úprav rovnice dávat pozor, abychom **umocňovali pouze nezáporná čísla** - tj. v případě výrazu s neznámou psát okamžitě podmínky;
2. rovnici vyřešit bez ohledu na to, jaké výrazy co do znaménka umocňujeme, a na závěr úlohy **provést zkoušku**.

Provedením zkoušky navíc nemusíme vypisovat ani definiční obor rovnice, který v některých případech bývá u těchto rovnic relativně komplikovaný.

Oba postupy ukážeme na řešení několika úloh.

V množině reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{3p+2}=\sqrt{4-p}$.

Řešení: Ukážeme dva způsoby řešení - jeden s průběžným přemýšlením nad definičním oborem a druhý se zkouškou nakonec.

1. způsob: Celou rovnici bychom rádi umocnili, abychom se zbavili odmocnin. Výsledek odmocniny je na základě její definice nezáporné číslo, takže umocňování je v tomto případě ekvivalentní úprava. Proto můžeme celou rovnici umocnit a dostaneme lineární rovnici $3p+2=4-p$, odkud $p=\frac{1}{2}$.

Podmínky na definiční obor vyplývají z podmínek na argument odmocniny: $3p+2\ge 0 \wedge 4-p\ge 0$. Ty můžeme přepsat ve tvaru $p\ge -\frac{2}{3}0 \wedge p\le 4$.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=\left\langle -\frac{2}{3};4\right\rangle$ a $\mathrm{P}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2. způsob: „Bezmyšlenkovitě“ umocníme a vyřešíme. Získáme stejný kořen, ale nyní musíme provést zkoušku!

$\mathrm{L}:\sqrt{3\cdot\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{7}{2}}$; $\mathrm{P}:\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$, tedy L = P, a proto $p=\frac{1}{2}$.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=\left\langle -\frac{2}{3};4\right\rangle$ a $\mathrm{P}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

V množině reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{q^2-3q-1}=2q-7$.

Řešení: Opět ukážeme oba způsoby řešení. Při umocňování si musíme uvědomit, že je nutné umocnit **celou stranu rovnice**, tj. v našem případě při umocňování pravé strany rovnice využít jeden z algebraických vztahů (3).

1. způsob: Chceme umocnit danou rovnici. Levá strana je na základě definice odmocniny nezáporná. Pravá strana je nezáporná pouze v případě $2q-7\geq 0$, čili pro $q\geq\frac{7}{2}$. Za této podmínky je umocnění původní rovnice ekvivalentní úpravou. Dostaneme tak rovnici $q^2-3q-1=4q^2-28q+49$, kterou upravíme do tvaru $3q^2-25q+50=0$. Tu vyřešíme pomocí vztahu (12) a dostaneme tak $q_{1,2}=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot 3\cdot 50}}{2\cdot 3}=\frac{25\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{25\pm 5}{6}$. Odtud $q_1=5$ a $q_2=\frac{10}{3}$. Pro kořen q_2 platí $q_2=\frac{10}{3}\doteq 3{,}3<\frac{7}{2}=3{,}5$, tedy tento kořen nevyhovuje podmínkám, za kterých je umocňování ekvivalentní úpravou.

Podmínky definičního oboru jsou $q^2-3q-1\geq 0$. Mohli bychom tuto kvadratickou nerovnici dále řešit, ale v tuto chvíli je to zbytečné. Můžeme dosadit do této podmínky kořen $q_1=5$ a přesvědčit se, že jí splňuje. Tedy víme, že tento kořen je řešením zadané rovnice. (Řešení kvadratických nerovnic je popsáno v kapitole 1.4.6.)

Závěr: $\mathrm{O}=\mathbb{R}$ a $\mathrm{P}=\{5\}$.

2. způsob: „Bezmyšlenkovitě“ umocníme zadanou rovnici, upravíme jí a vyřešíme. A nyní provedeme zkoušku tak, že oba kořeny $q_1=5$ a $q_2=\frac{10}{3}$ postupně dosadíme do zadané rovnice.

Pro $q_1=5$: $\mathrm{L}:\sqrt{5^2-3\cdot 5-1}=\sqrt{9}=3$, $\mathrm{P}:2\cdot 5-7=3$, tedy L = P.

Pro $q_2=\frac{10}{3}$: $\mathrm{L}:\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-3\cdot\frac{10}{3}-1}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}:2\cdot\frac{10}{3}-7=-\frac{1}{3}$, tedy $\mathrm{L}\neq\mathrm{P}$

Závěr: $\mathrm{O}=\mathbb{R}$ a $\mathrm{P}=\{5\}$.

Jak je zřejmé, druhá metoda je sice o čas věnovaný zkoušce delší, ale na druhou stranu je pohodlnější v tom smyslu, že není nutné na každém řádku úprav rovnice hlídat definiční obor daného výrazu vystupujícího na konkrétní straně rovnice. Navíc v některých případech mohou být podmínky, za kterých je daný výraz nezáporný, poměrně složité. Proto je druhý způsob jednodušší na řešení.

V množině reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{2z+13}-\sqrt{6+z}=1$.

Řešení: Vzhledem k výše uvedenému budeme rovnici řešit druhým způsobem. Budeme tedy postupovat bez ohledu na definiční obor prováděných operací a na závěr uděláme zkoušku.

Začneme tedy umocněním obou stran rovnice: $2z+13-2\sqrt{2z+13}\cdot\sqrt{6+z}+6+z=1$. Nyní rovnici zjednodušíme: $3z+19-2\sqrt{(2z+13)\cdot(6+z)}=1$. V rovnici je stále odmocnina, proto je nutné rovnici umocnit znovu. Předtím je ale velmi vhodné si rovnici převést do tvaru, který je pro umocňování jednodušší (uvědomme si, že musíme umocňovat celou stranu dané rovnice). Vhodnější tvar je: $3z+18=2\sqrt{(2z+13)\cdot(6+z)}$. Nyní umocníme: $9z^2+108z+324=4\left(12z+2z^2+78+13z\right)$. Rovnici dále upravíme do tvaru $9z^2+108z+324=48z+8z^2+312+52z$ a dostaneme kvadratickou rovnici $z^2+8z+12=0$, kterou je možné vyřešit s využitím Viétových vztahů. Levou stranu rovnice tedy rozložíme $(z+6)\cdot(z+2)=0$ a dostaneme kořeny $z_1=-6$ a $z_2=-2$.

Místo určování definičního oboru a podmínek, za kterých je umocnění rovnice ekvivalentní úpravou, provedeme zkoušku.

Pro $z_1 = -6$: $\mathrm{L}: \sqrt{2\cdot(-6)+13} - \sqrt{6+(-6)} = 1-0 = 1$, P: 1, tedy L = P.

Pro $z_2 = -2$: $\mathrm{L}: \sqrt{2\cdot(-2)+13} - \sqrt{6+(-2)} = 3-2 = 1$, P: 1, tedy L = P.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \{-6; -2\}$.

Nyní vyřešíme jednu rovnici, která na první pohled bude komplikovanější.

V množině reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{5}{2+\sqrt{k+1}} + \sqrt{k+1} = 4$.

Řešení: Idea, že začneme násobit rovnici jmenovatelem prvního zlomku, povede k relativně komplikovaným výrazům. Pokud si ale všimneme, že odmocniny vystupující v rovnici jsou stejné, lze použít **metodu substituce**. Výraz $\sqrt{k+1}$ prostě nahradíme jinou proměnnou. Tedy např. $m = \sqrt{k+1}$. Nyní rovnici přepíšeme v nově zavedené proměnné: $\dfrac{5}{2+m} + m = 4$. Následně rovnici vyřešíme.

$$5 + 2m + m^2 = 8 + 4m$$
$$m^2 - 2m - 3 = 0$$
$$(m+1)\cdot(m-3) = 0$$

Rovnice má tedy kořeny $m_1 = -1$ a $m_2 = 3$. To ale nejsou kořeny původní rovnice! Ta byla zadaná v proměnné *k*. Musíme tedy ještě vypočítat neznámou *k*. Dosadíme do substitučního vztahu a dostaneme rovnici $-1 = \sqrt{k_1+1}$, která nemá řešení; druhá odmocnina je totiž definována jako nezáporné číslo! Druhá možnost je $3 = \sqrt{k_2+1}$, odkud získáme $k_2 + 1 = 9$ a tedy $k_2 = 8$.

Při řešení rovnice s neznámou *m* jsme prováděli pouze ekvivalentní úpravy, při hledání neznámé k_2 jsme sice umocňovali rovnici, ale její obě strany byly kladné; tedy i v tomto případě se jednalo o ekvivalentní úpravy.

Definiční obor zadané rovnice určíme na základě podmínek $k+1 \geq 0$ a $2+\sqrt{k+1} \neq 0$. Dostáváme tedy $k \geq -1$ a $\sqrt{k+1} \neq -2$. Druhá podmínka je splněna díky definici odmocniny.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathbb{R}$, $\mathrm{D} = \langle -1; \infty)$ a $\mathrm{P} = \{8\}$.

1.4.6 Kvadratické nerovnice

Řešit kvadratické nerovnice vlastně již umíme. Jednak jsme řešili nerovnice v součinovém tvaru, navíc umíme řešit kvadratickou rovnici a víme, jak souvisí kvadratická rovnice s grafem kvadratické funkce. Takže vše potřebné pro řešení kvadratických nerovnic už máme připravené.

Přesto pro úplnost začneme definicí kvadratické nerovnice a ukážeme další způsob řešení využívající graf kvadratické funkce.

KVADRATICKÁ NEROVNICE S JEDNOU REÁLNOU NEZNÁMOU x **SE NAZÝVÁ KAŽDÁ NEROVNICE, KTEROU LZE EKVIVALENTNÍMI ÚPRAVAMI PŘEVÉST NA JEDEN Z TVARŮ**

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \geq 0, \tag{18}$$
$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c > 0,$$
$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c \leq 0,$$
$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c < 0,$$

KDE $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **A** $b, c \in \mathbb{R}$.

Podmínka nenulovosti koeficientu a je jasná - kdyby a bylo nulové, nerovnice by nebyla kvadratická.

Postup řešení kvadratické nerovnice je následující:

1. převést nerovnici do jednoho z tvarů (18);
2. vyřešit odpovídající kvadratickou rovnici;

3. zapsat levou stranu kvadratické nerovnice v součinovém tvaru analogickému tvaru (13) pro kvadratické rovnice;
4. vyřešit kvadratickou nerovnici buď pomocí rozpisu na jednotlivých intervalech (viz řešení nerovnic v součinovém tvaru) nebo s využitím grafu kvadratické funkce.

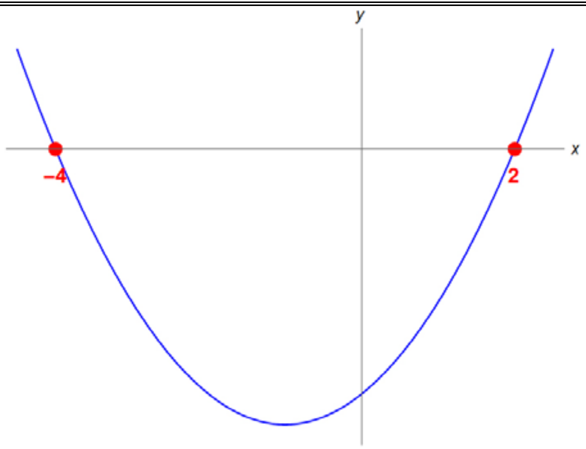
Postup bude ukázán na několika řešených úlohách.

V množině reálných čísel řešte nerovnici $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.

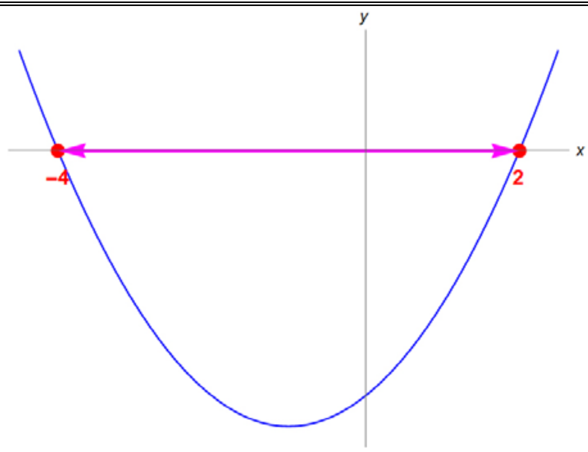
Řešení: Kvadratickou rovnici odpovídající zadané kvadratické nerovnici vyřešíme s využitím Viétových vztahů. Můžeme tedy psát: $(x+4)\cdot(x-2) \leq 0$, tedy kořeny příslušné kvadratické rovnice jsou $x_1 = -4$ a $x_1 = 2$. Levou stranu zadané nerovnice lze chápat jako kvadratickou funkci $f: y = x^2 + 2x - 8$, kterou můžeme nyní velmi rychle načrtnout. Souřadnice vrcholu paraboly v tuto chvíli nejsou podstatné, důležité je, že pokud známe kořeny příslušné kvadratické rovnice, známe i průsečíky grafu kvadratické funkce s osou *x*. Vrchol paraboly bude mít *x*-ovou souřadnici ležící symetricky mezi oběma kořeny. Proto lze příslušnou parabolu velmi rychle načrtnout (viz obr. 28).

Ze zadané nerovnice lze vyčíst, že funkční hodnoty příslušné kvadratické funkce *f* mají být menší nebo rovny nule. To znamená, že řešení kvadratické nerovnice vyhovují ta reálná čísla, pro něž leží graf funkce *f* pod osou *x*. Interval, ve kterém tato čísla leží, je vyznačen na obr. 29.

Můžeme tedy udělat závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = \langle -4; 2 \rangle$.



obr. 28



obr. 29

V množině reálných čísel řešte nerovnici $-2x^2 + 2x + 12 < 0$.

Řešení: V této úloze budeme postupovat analogicky jako v té minulé. Vidíme, že na levé straně nerovnice můžeme vytknout: $-2\left(x^2 - x - 6\right) < 0$. Pokud nyní nerovnici vydělíme mínus dvěma (což můžeme, abychom si nerovnici zjednodušili), nesmíme zapomenout na změnu znaku nerovnosti. Dostaneme nerovnici $x^2 - x - 6 > 0$, jejíž levou stranu rozložíme s využitím Viérových vztahů: $(x-3)\cdot(x+2) > 0$. Kořeny odpovídající kvadratické rovnice (a tedy i *x*-ové souřadnice průsečíků grafu příslušné kvadratické funkce s osou *x*) jsou $x_1 = -2$ a $x_1 = 3$.

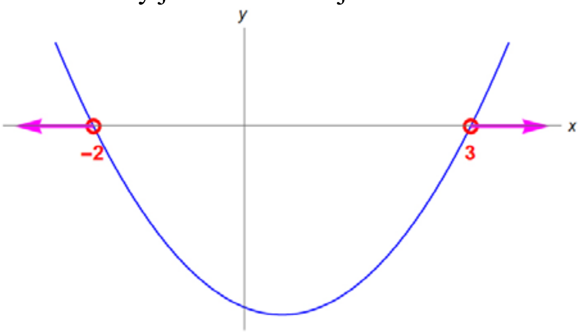
Graf příslušné kvadratické funkce (včetně vyznačení kořenů a intervalů, které jsou řešením zadané nerovnice) je zobrazen na obr. 30. Krajní body intervalů do řešení nepatří vzhledem ke znaku nerovnosti.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$ a $\mathrm{P} = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$.

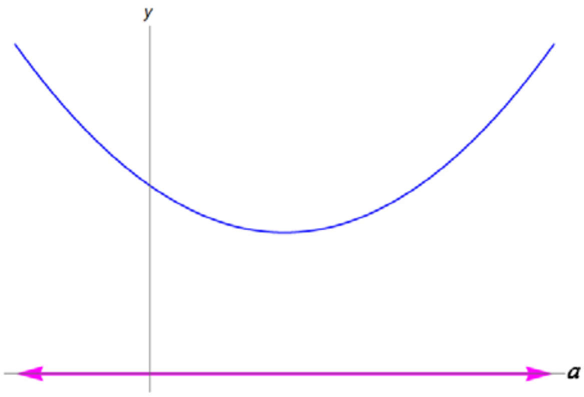
K právě vypočtené úloze uvedeme několik poznámek.

Tím, že jsme nerovnici vydělili nenulovým číslem, přešli jsme k jiné funkci, kterou jsme potom vykreslovali do grafu. To ale není nijak v rozporu s řešením dané nerovnice. Graf je v tomto případě pouze pomůcka, abychom mohli nerovnici rychle a správně vyřešit. Na strmosti grafu (která je ovlivněna tím koeficientem, kterým jsme nerovnici dělili) v tomto případě nezávisí. Podstatné jsou *x*-ové souřadnice průsečíků grafu funkce s osou *x* a ty se provedenou úpravou nemění.

Dělili jsme záporným číslem, ale ani to nemá vliv na výsledné řešení nerovnice. Kdybychom uvažovali původní nerovnici $-2x^2+2x+12<0$, kreslili bychom parabolu otevřenou dolů (s vrcholem nad osou *x*) a zajímala by nás ta *x*, pro která jsou funkční hodnoty dané funkce záporné. Po vydělení záporným číslem jsme získali nerovnici $x^2-x-6>0$. V tomto případě jsme kreslili parabolu otevřenou nahoru, která měla vrchol pod osou *x*, a zajímala nás ta *x*, pro které nabývá funkce kladných hodnot. Tedy jsme získali stejné řešení.



obr. 30



obr. 31

V množině reálných čísel řešte nerovnici $-a^2+a-1\leq 0$.

<u>Řešení:</u> Nerovnici si nejdříve upravíme: vytkneme mínus jedničku a rovnici jí vydělíme. Tak dostaneme nerovnici ve tvaru: $a^2-a+1\geq 0$. Kvadratickou rovnici $a^2-a+1=0$ nelze rychle vyřešit s využitím Viétových vztahů, proto spočítáme její diskriminant: $D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$. Diskriminant je záporný, kvadratická rovnice tedy nemá v množině reálných čísel řešení. Jak to ale bude s kvadratickou nerovnicí $a^2-a+1\geq 0$?

Načrtneme si rychle graf příslušné kvadratické funkce. Graf neprotíná osu *a* kartézského systému (kvadratická rovnice nemá v reálných číslech řešení) a parabola je otevřená nahoru; parabola tedy leží nad osou *a*. Jako řešení kvadratické nerovnice $a^2-a+1\geq 0$ nás zajímají ta *a*, pro která jsou funkční hodnoty nezáporné. To ale v tomto případě splňují všechna reálná *a*. Graf funkce je zobrazen na obr. 31.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathrm{P}=\mathbb{R}$.

Pro vyřešení kvadratické nerovnice je graf odpovídající kvadratické funkce pouze pomůckou a zajímají nás pouze průsečíky s vodorovnou osou. Jestliže tyto průsečíky neexistují (viz poslední úloha), musí graf kvadratické funkce ležet nad vodorovnou osou. Kde bude mít parabola vrchol, není v tomto případě podstatné. Grafy v tomto textu jsou kresleny v software Mathematica, proto je parabola i na obr. 31 nakreslena správně; souřadnice vrcholu jsme nepočítali, protože to není nutné!

V množině reálných čísel řešte nerovnici $u^2+1<0$.

<u>Řešení:</u> Začneme-li s řešením kvadratické rovnice $u^2+1=0$, dospějeme ke tvaru $u^2=-1$, ze kterého je zřejmé, že tato rovnice nemá v množině reálných čísel řešení.

Parabola, která je grafem kvadratické funkce a která je otevřená směrem nahoru, leží tedy celá nad osou *u* (viz obr. 32). Zadaná kvadratická nerovnice hledající ta *u*, pro která jsou funkční hodnoty záporné, tedy nemá řešení.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}$, $P=\emptyset$.

Určete definiční obor funkce $r: y=\sqrt{\dfrac{-12x^2}{x^2-6x+5}}$.

<u>Řešení:</u> Argument odmocniny musí být nezáporný, tedy musí platit $\dfrac{-12x^2}{x^2-6x+5}\geq 0$. Současně musí být jmenovatel zlomku nenulový, tedy $x^2-6x+5\neq 0$. Sestavenou nerovnici v tomto tvaru řešit neumíme, ale můžeme si jí pomocí logických kroků zjednodušit.

Za prvé: činitel x^2 v čitateli zlomku je pro libovolné reálné *x* nezáporný.

Za druhé: jestliže vyšetřujeme zlomek, jehož čitatel je nekladný (v čitateli je součin záporného čísla -12 a nezáporného x^2), musí být jmenovatel zlomku záporný, aby byl celý zlomek nezáporný.

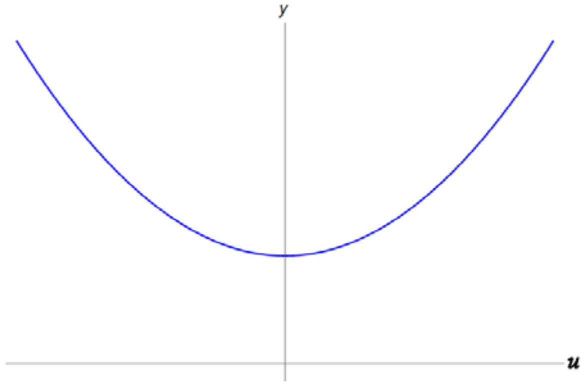
(Podobné úvahy jsme prováděli při řešení nerovnic v podílovém tvaru.)

Z původní nerovnice, která nebyla v příliš vhodném tvaru, jsme se tak dostali k nerovnici $x^2 - 6x + 5 < 0$. Tato nerovnice je jednak již snadno řešitelná, a současně splňuje i podmínku nenulovosti jmenovatele původního zlomku.

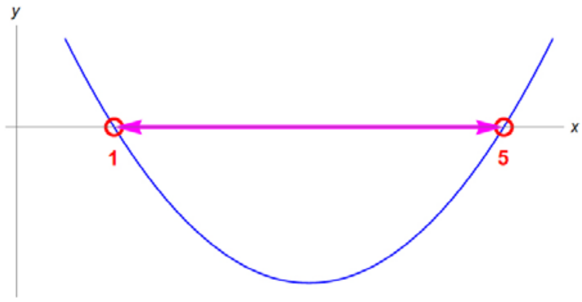
Nerovnici můžeme přepsat ve tvaru $(x-1)\cdot(x-5) < 0$. Parabola odpovídající kvadratické funkce bude otevřená nahoru a osu *x* bude protínat v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = 5$. Řešením kvadratické nerovnice budou ta *x*, pro něž jsou funkční hodnoty příslušné kvadratické funkce záporné (viz graf zobrazený na obr. 33).

Závěr: $\mathrm{D_r} = (1; 5)$.

Pozor! Ačkoliv jsme řešili kvadratickou nerovnici, nepíšeme závěr v podobě O, D a P, ale pouze hledaný definiční obor zadané funkce (jak požadovalo zadání úlohy).



obr. 32



obr. 33

Určete definiční obor funkce $q: y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 2x^2 - 15x}{x^2 + 3x - 4}}$.

Řešení: Odmocňovat můžeme pouze nezáporná výrazy, proto musí platit: $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 15x}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$. Současně musí platit $x^2 + 3x - 4 \neq 0$. Pokusíme se sestavenou nerovnici upravit. V čitateli můžeme vytknout *x* a dostaneme: $\dfrac{x\cdot(x^2 - 2x - 15)}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$. Dále můžeme kvadratické trojčleny v čitateli i jmenovateli rozložit s využitím Viétových vztahů na součin lineárních činitelů. Dostaneme tak nerovnici ve tvaru $\dfrac{x\cdot(x+3)\cdot(x-5)}{(x+4)\cdot(x-1)} \geq 0$. Vyřešit tuto nerovnici můžeme s využitím rozboru, jakých znamének nabývají jednotliví činitelé zlomku nerovnice na intervalech, na které rozdělí reálnou osu nulové body těchto činitelů. Nulové body na číselné ose jsou zobrazeny na obr. 34. V tab. 3 jsou pak znaménka, kterých daný výraz na konkrétním intervalu nabývá. (Důvodem, proč jsou oba konce intervalů u nulových bodů -4 a 1 otevřené, je skutečnost, že příslušní činitelé jsou ve jmenovateli zlomku.)

Vzhledem řešené nerovnici hledáme ty intervaly, na kterých bude součin (resp. podíl) všech činitelů kladný. S využitím tab. 3 tak můžeme psát závěr úlohy: $\mathrm{D_q} = (-4; -3\rangle \cup \langle 0; 1) \cup \langle 5; \infty)$.

obr. 34

	$(-\infty;-4)$	$(-4;-3)$	$\langle -3;0)$	$\langle 0;1)$	$(1;5)$	$\langle 5;\infty)$
x	–	–	–	+	+	+
$x+3$	–	–	+	+	+	+
x - 5	–	–	–	–	–	+
$x+4$	–	+	+	+	+	+
x - 1	–	–	–	–	+	+

tab. 3

1.4.7 Kvadratické rovnice s parametrem

Kvadratické rovnice s parametrem jsou kvadratické rovnice, které kromě neznámé obsahují i (většinou reálný) parametr. Ten může být přitom součástí koeficientu kvadratického, lineárního i absolutního členu.

Při řešení tohoto typu rovnic postupujeme standardně jako při řešení běžných kvadratických rovnic, pouze musíme velmi pečlivě sledovat:

1. zda je zadaná rovnice skutečně kvadratická - tj. zda pro každou hodnotu parametru je koeficient kvadratického členu nenulový;
2. jakou hodnotu má diskriminant kvadratické rovnice v závislosti na různých hodnotách parametru (a tedy jaký typ řešení má řešená rovnice).

Při řešení kvadratických rovnic s parametrem postupujeme podobně, jako při řešení lineárních rovnic s parametrem. A stejně jako lineární rovnice s parametrem, i kvadratické rovnice s parametrem lze využít v dalších oblastech matematiky (např. při hledání vzájemné polohy přímky a kuželosečky - viz ukázka v kapitole 1.4.9.1) i v aplikačních předmětech (fyzika, chemie, elektrotechnika, …) pro popis různých závislostí.

Princip řešení kvadratických rovnic s parametrem bude ukázán na řešených úlohách. Většinou bude nutné provést tzv. **úplnou diskusi** počtu řešení kvadratické rovnice vzhledem k danému parametru.

Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici $px^2+3x+2=0$ v závislosti na reálném parametru *p*.

Řešení: Jako první musíme vyloučit možnost $p=0$; při této volbě není zadaná rovnice kvadratická.

Pokud bude $p\neq 0$, můžeme spočítat diskriminant kvadratické rovnice, který bude závislý na parametru *p*. Proto je nutné provést následně diskusi, za jakých podmínek bude mít v tomto případě kvadratická rovnice řešení a kolik jich bude.

Řešení je napsáno přehledně tak, jak se běžně píše.

$$px^2+3x+2=0$$

$p=0$	$p\neq 0$
rovnice není kvadratická $0\cdot x^2+3x+2=0$ $x=-\frac{2}{3}$	rovnice je kvadratická $D=3^2-4\cdot p\cdot 2=9-8p$ a) $D<0$, tedy $9-8p<0$, odkud $p>\frac{9}{8}$ rovnice nemá v reálných číslech řešení b) $D=0$, tedy $9-8p=0$, odkud $p=\frac{9}{8}$ rovnice má dvojnásobný kořen: $x_{12}=-\frac{3}{2p}$ c) $D>0$, tedy $9-8p>0$, odkud $p<\frac{9}{8}$

rovnice má dva kořeny: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8p}}{2p}$

Závěr:
$\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$

$p = 0: \mathrm{P} = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ (rovnice není kvadratická)

$p \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{9}{8}\right): \mathrm{P} = \left\{\frac{-3 \pm \sqrt{9-8p}}{2p}\right\}$

$p = \frac{9}{8}: \mathrm{P} = \left\{-\frac{3}{2p}\right\}$

$p \in \left(\frac{9}{8}; \infty\right): \mathrm{P} = \emptyset$

Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici $x^2 - 2qx + 4 = 0$ v závislosti na reálném parametru q.

Řešení: V tomto případě se bude jednat pokaždé o kvadratickou rovnici (koeficient kvadratického členu nezávisí na parametru), problém může nastat až u diskriminantu. Začneme tedy výpočtem diskriminantu: $D = (-2q)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4q^2 - 16 = 4(q^2 - 4)$. Je zřejmé, že vypočtený diskriminant může být záporný, nulový i kladný. Vyšetříme tedy jednotlivé případy:

a) $D < 0$ právě tehdy, když $4(q^2 - 4) < 0$, tedy $q^2 < 4$, což platí pro $|q| < 2$. V tomto případě nemá zadaná rovnice v množině reálných čísel řešení.

b) $D = 0$ právě tehdy, když $4(q^2 - 4) = 0$, což je splněno pro $|q| = 2$. V tomto případě má kvadratická rovnice dvojnásobný kořen: $x_{12} = \frac{2q \pm 0}{2} = q$.

Pro každou hodnotu q má rovnice dvojnásobný kořen. Tedy jeden dvojnásobný kořen má pro q = -2 a jeden dvojnásobný kořen má pro q = 2.

c) $D > 0$ právě tehdy, když $4(q^2 - 4) > 0$, což platí pro $|q| > 2$. V tomto případě má zadaná rovnice dva reálné kořeny: $x_{1,2} = \frac{2q \pm \sqrt{4(q^2-4)}}{2} = \frac{2q \pm 2\sqrt{q^2-4}}{2} = q \pm \sqrt{q^2 - 4}$.

Závěr:
$\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$

$q \in (-2; 2): \mathrm{P} = \emptyset$

$q = \pm 2: \mathrm{P} = \{q\}$

$q \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty): \mathrm{P} = \left\{q \pm \sqrt{q^2 - 4}\right\}$

Řešte v množině reálných čísel kvadratickou rovnici $y^2 - (a-3)y + a = 0$ v závislosti na reálném parametru a.

Řešení: Pro libovolnou hodnotu parametru se jedná vždy o kvadratickou rovnici. Můžeme tedy začít výpočtem diskriminantu: $D = (-(a-3))^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = a^2 - 6a + 9 - 4a = a^2 - 10a + 9$. Vzhledem k tomu, že budeme diskriminant dále porovnávat s nulou, zkusíme kvadratický trojčlen diskriminantu rozložit na součin lineárních činitelů. To se v tomto případě podaří snadno, takže můžeme psát $D = (a-1) \cdot (a-9)$. Nyní provedeme diskusi, pro jaké hodnoty parametru a má zadaná rovnice řešení.

a) $D < 0$ nastává v případě $(a-1)\cdot(a-9) < 0$. Musíme tedy vyřešit kvadratickou nerovnici (viz odstavec 1.4.6). Levou stranu nerovnice můžeme chápat jako předpis kvadratické funkce, jejímž grafem je parabola otevřená nahoru a která protíná osu a v bodech $a_1 = 1$ a $a_2 = 9$. Nerovnice je tedy splněna pro $a \in (1;9)$. V tomto případě nemá rovnice žádné reálné řešení.

b) $D = 0$ nastává pro $(a-1)\cdot(a-9) = 0$, tj. pokud $a \in \{1;9\}$. Rovnice má v tomto případě dvojnásobný kořen $y_{12} = \frac{a-3\pm 0}{2} = \frac{a-3}{2}$.

c) $D > 0$ nastává v případě, že platí $(a-1)\cdot(a-9) > 0$. S využitím řešení nerovnice v případě a) diskuse je zřejmé, že uvedená nerovnice platí pro $a \in (-\infty;1)\cup(9;\infty)$. Zadaná kvadratická rovnice má v tomto případě dva reálné kořeny: $y_{1,2} = \frac{a-3\pm\sqrt{(a-1)\cdot(a-9)}}{2}$.

Závěr:

$\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$

$a \in (1;9): \mathrm{P} = \emptyset$

$a \in \{1;9\}: \mathrm{P} = \left\{\frac{a-3}{2}\right\}$

$a \in (-\infty;1)\cup(9;\infty): \mathrm{P} = \left\{\frac{a-3\pm\sqrt{(a-1)\cdot(a-9)}}{2}\right\}$

Je dána kvadratická rovnice $m(x^2+1) - 4x = 2x(m+x)$. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m má tato rovnice a) alespoň jeden reálný kořen, b) dva reálné kladné kořeny, c) dva reálné kořeny opačného znaménka, d) jeden kořen roven -1.

Řešení: Zadání je jiné, než bylo dosud, ale princip řešení bude velmi podobný. Jen nebudeme provádět úplnou diskusi řešení dané rovnice, ale pouze najdeme takové hodnoty parametru, které splňují zadané požadavky. Nejdříve ale rovnici upravíme do standardního tvaru.

$$mx^2 + m - 4x = 2mx + 2x^2$$
$$mx^2 - 2x^2 + m - 2mx - 4x = 0$$
$$(m-2)x^2 - 2(m+2)x + m = 0$$

Nyní můžeme začít řešit jednotlivé případy. Aby byla zadaná rovnice kvadratická, musí být $m - 2 \neq 0$, tedy $m \neq 2$.

Dále postupně vypočítáme diskriminant dané rovnice: $D = (-2(m+2))^2 - 4(m-2)m = 4m^2 + 16m + 16 - 4m^2 + 8m = 24m + 16 = 8(3m+2)$.

Můžeme tedy přistoupit k hledání hodnot parametru vyhovujících zadání.

a) Alespoň jeden reálný kořen má rovnice za předpokladu, že $m = 2$ (v tomto případě rovnice není kvadratická, ale jedno reálné řešení má) nebo $m \neq 2$ a současně $D \geq 0$ (tedy jeden dvojnásobný kořen nebo dva různé reálné kořeny). Nezáporný diskriminant bude v případě, že platí $3m + 2 \geq 0$, tj. $m \geq -\frac{2}{3}$.

Alespoň jeden reálný kořen má tedy rovnice pro $m \geq -\frac{2}{3}$.

Bude-li m rovno 2, má rovnice též reálný kořen, i když daná rovnice nebude kvadratická.

b) Pokud budeme hledat podmínku pro parametr m, při níž má zadaná rovnice dva kladné kořeny, můžeme oba kořeny vypočítat a pak řešit příslušné nerovnice. Vzhledem k tomu, že parametr m vystupuje jak diskriminantu kvadratické rovnice, tak ve všech členech kvadratické rovnice, byl by výpočet technicky komplikovanější. Proto raději využijeme Viétovy vztahy, na základě kterých pro dva kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice musí platit: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$ a současně $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$. Po dosazení tedy dostaneme dvě nerovnice $-\frac{2(m+2)}{m-2} > 0$ a $\frac{m}{m-2} > 0$. Řešení najdeme na základě vyšetření znaménka výrazů v obou nerovnicích na jednotlivých intervalech, na které rozdělí reálnou osu nulové body uvažovaných výrazů. Řešení první nerovnice tak vyčteme z tab. 4, řešení druhé nerovnice z tab. 5.

	$(-\infty; -2)$	$\langle -2; 2)$	$(2; \infty)$
$m + 2$	–	+	+
m - 2	–	–	+

tab. 4

	$(-\infty; 0)$	$\langle 0; 2)$	$(2; \infty)$
m	–	+	+
m - 2	–	–	+

tab. 5

Řešením první nerovnice jsou $m \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$, řešení druhé nerovnice vyhovují $m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$. Obě nerovnice musejí platit současně, musíme tedy hledat průnik obou nalezených řešení. Musíme vzít v úvahu také podmínku na nezápornost diskriminantu, tj. podmínku $m \geq -\frac{2}{3}$.

Zadaná rovnice má oba kořeny kladné pro $m \in (2; \infty)$.

c) Podmínku pro parametr *m*, při které má zadaná rovnice dva reálné kořeny opačného znaménka, najdeme opět s využitím Viétových vztahů. V tomto případě musí platit: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$. Po dosazení získáme nerovnici $\frac{m}{m-2} < 0$, jejíž řešení vyčteme z tab. 5. I zde musíme vzít v úvahu podmínku na nezápornost diskriminantu.

Zadaná rovnice má dva reálné kořeny opačného znaménka pro $m \in (0; 2)$.

d) Hledáme-li hodnotu parametru, pro kterou je jeden kořen roven konkrétnímu číslu, musíme kořeny zadané kvadratické rovnice vypočítat.

Dostaneme: $x_{1,2} = \frac{2(m+2) \pm 2\sqrt{2(3m+2)}}{2(m-2)} = \frac{m+2 \pm \sqrt{2(3m+2)}}{m-2}$.

Nyní dosadíme požadovanou hodnotu kořene a získanou rovnici pro neznámou *m* postupně upravíme.

$$-1 = \frac{m+2 \pm \sqrt{2(3m+2)}}{m-2}$$

$$-m + 2 = m + 2 \pm \sqrt{2(3m+2)}$$

$$-2m = \pm\sqrt{2(3m+2)}$$

Vzhledem k tomu, že v tomto případě je na pravé straně rovnice možno mít jak číslo kladné, tak záporné, můžeme celou rovnici umocnit, aniž bychom později museli dělat zkoušku.

$$4m^2 = 6m + 4$$

$$4m^2 - 6m - 4 = 0$$

$$m^2 - \frac{3}{2}m - 1 = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot (m-2) = 0$$

Tato rovnice má dva kořeny: $m_1 = -\frac{1}{2}$ a $m_2 = 2$. Druhý kořen ovšem nevyhovuje, protože rovnice není v tomto případě kvadratická.

Jeden z kořenů zadané rovnice je tedy roven -1 pro $m = -\frac{1}{2}$.

1.4.8 Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou

Kvadratické rovnice s absolutní hodnotou se řeší většinou podobně jako lineární rovnice s absolutní hodnotou:

1. najdeme nulové body absolutních hodnot vystupujících v rovnici;
2. určíme intervaly, na které tyto nulové body rozdělí reálnou osu;
3. určíme znaménka argumentů absolutních hodnot na těchto intervalech;
4. na jednotlivých intervalech rovnici vyřešíme - při určování oboru pravdivosti na daném intervalu kontrolujeme, zda nalezený kořen do intervalu, v němž rovnici právě řešíme, patří;
5. uděláme závěr - tj. napíšeme finální O, D a P.

V některých případech lze využít k řešení i graf kvadratické funkce nebo jinou logicky podloženou úvahu.

Řešte v množině reálných čísel rovnici $x^2 + |x| - 2 = 0$.

Řešení: Nejdříve určíme nulový bod absolutní hodnoty - ten je roven nule. Proto budeme zadanou rovnici řešit na dvou intervalech.

a) Pro $x \in (-\infty; 0)$ přepíšeme zadanou rovnici ve tvaru $x^2 - x - 2 = 0$ a rozložíme s využitím Viétových vztahů: $(x+1)\cdot(x-2) = 0$. Dostáváme tak kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$. Můžeme tedy psát: $\mathrm{P}_1 = \{-1\}$; kořen $x_2 = 2$ neleží v intervalu, v němž rovnici řešíme.

b) Pro $x \in \langle 0; \infty)$ lze zadanou rovnici psát ve tvaru $x^2 + x - 2 = 0$. Po rozložení dostaneme $(x-1)\cdot(x+2) = 0$, a tedy $x_3 = 1$ a $x_4 = -2$. Můžeme tedy psát: $\mathrm{P}_2 = \{1\}$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$, $\mathrm{P} = \{-1; 1\}$.

Řešte v množině reálných čísel rovnici $|v^2 - 5| = 4$.

Řešení: Nejdříve určíme nulové body argumentu absolutní hodnoty. To znamená vyřešit kvadratickou rovnici $v^2 - 5 = 0$. Ta má dva kořeny: $|v_0| = \sqrt{5}$. Reálná osa tedy bude rozdělena na tři intervaly.

a) Pro $v \in (-\infty; -\sqrt{5})$ je argument absolutní hodnoty kladný, a proto budeme řešit rovnici $v^2 - 5 = 4$, jejíž řešení je $|v| = 3$. V intervalu, ve kterém právě rovnici řešíme, ale leží pouze jeden kořen. Proto $\mathrm{P}_1 = \{-3\}$.

b) Pro $v \in \langle -\sqrt{5}; \sqrt{5})$ je argument absolutní hodnoty záporný, proto řešíme rovnici $-v^2 + 5 = 4$. Získáme rovnici $v^2 = 1$, jejíž řešení je $|v| = 1$. Tedy $\mathrm{P}_2 = \{-1; 1\}$.

c) Pro $v \in \langle \sqrt{5}; \infty)$ bude řešení shodné jako v případě a). Dostaneme tedy dva kořeny, pro něž platí $|v| = 3$. Proto $\mathrm{P}_3 = \{3\}$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$, $\mathrm{P} = \{-3; -1; 1; 3\}$.

Řešte v množině reálných čísel rovnici $w|w+1| = w - 2$.

Řešení: Nulový bod je roven $w_0 = -1$, rovnici tedy budeme řešit na dvou intervalech.

a) Pro $w \in (-\infty; -1)$ řešíme rovnici $w(-w-1) = w - 2$, kterou lze upravit na tvar $w^2 + 2w - 2 = 0$. Tato rovnice nepůjde jednoduše rozložit, proto spočítáme její diskriminant.

Dostaneme tak $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$. Rovnice má tedy dva reálné kořeny, pro které platí $w_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$. Můžeme tedy psát: $\mathrm{P}_1 = \left\{-1-\sqrt{3}\right\}$.

a) Pro $w \in \langle -1; \infty)$ dostaneme rovnici $w(w+1) = w - 2$, kterou lze upravit na tvar $w^2 + 2 = 0$. Tato rovnice přitom nemá v reálných číslech řešení, tedy $\mathrm{P}_2 = \emptyset$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}$, $\mathrm{P} = \left\{-1-\sqrt{3}\right\}$.

1.4.9 Soustava rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická

Řešení soustav rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická, je nástroj, s nímž se v rámci studia kvadratických rovnic seznámíme a který hojně využijeme např. v analytické geometrii, kde lineární rovnice a kvadratické rovnice mají svůj geometrický význam.

1.4.9.1 Soustava kvadratické rovnice a lineární rovnice

Začneme se soustavou dvou rovnic, z nichž jedna je lineární a druhá kvadratická. Postup řešení této soustavy je zřejmý:

1. z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou;
2. dosadíme do kvadratické rovnice;
3. vypočítáme druhou neznámou;
4. dosazením zpět do lineární rovnice vypočítáme zbývající neznámou;
5. zapíšeme závěr řešení.

Tento obecný postup ukážeme na řešení konkrétních úloh.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $2x + y = 4$ a $2x^2 + y^2 - 3y = 4$.

Řešení: Z lineární rovnice vyjádříme *y*, protože vyjádření bude technicky jednodušší (nebude obsahovat zlomky). Dostaneme tak $y = 4 - 2x$ a dosadíme do kvadratické rovnice. Dostaneme tak rovnici: $2x^2 + (4-2x)^2 - 3 \cdot (4-2x) = 4$, kterou vyřešíme.

$$2x^2 + 16 - 16x + 4x^2 - 12 + 6x = 4$$
$$6x^2 - 10x = 0$$
$$2x \cdot (3x - 5x) = 0$$

Dostáváme tedy dva kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{5}{3}$. Nyní dosadíme do vztahu pro neznámou *y* a dostaneme: $y_1 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ a $y_2 = 4 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$. Vzhledem k tomu, že jsme použili ekvivalentní úpravy, není zkouška nutná.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^2$ a $\mathrm{P} = \left\{[0; 4]; \left[\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right]\right\}$.

Pozor na množinu P. Jedná se o množinu obsahující uspořádané dvojice odpovídající neznámým *x* a *y* (ve správném pořadí). Proto je potřeba dávat pozor na správné typy závorek a jejich pořadí.

Určete v závislosti na reálném parametru *c* řešení soustavy rovnic $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ a $-3x + 4y + c = 0$ v množině $\mathbb{R}^2$.

Řešení: Jedná se tedy o soustavu dvou rovnic s parametrem. Budeme postupovat jako v minulé úloze a dospějeme k výrazu, ze kterého bude možné určit řešení zadané soustavy v závislosti na parametru *c*.

Ač to bude technicky náročnější, začneme vyjádřením např. neznámé *y* z lineární rovnice. Dostaneme: $y = \frac{3x - c}{4}$. Tento výraz dosadíme do kvadratické rovnice a postupně upravíme.

$$\left(x-2\right)^2+\left(\frac{3x-c}{4}+1\right)^2=25$$

$$x^2-4x+4+\left(\frac{3x-c}{4}\right)^2+\frac{3x-c}{2}+1=25$$

$$x^2-4x+4+\frac{9x^2-6cx+c^2}{16}+\frac{3x-c}{2}+1=25$$

$$16x^2-64x+64+9x^2-6cx+c^2+24x-8c+16=400$$

$$25x^2-40x-6cx+c^2-8c-320=0$$

$$25x^2-\left(40+6c\right)x+c^2-8c-320=0$$

Nyní spočítáme diskriminant získané kvadratické rovnice.

$$D=\left(-\left(40+6c\right)\right)^2-4\cdot 25\cdot\left(c^2-8c-320\right)=1600+480c+36c^2-100c^2+800c+32000=$$

$$=-64c^2+1280c+33600=64\left(-c^2+20c+525\right)$$

Další postup závisí na tom, jaký bude diskriminant vůči nule. Začněme tedy s možností $D = 0$, tedy musíme vyřešit kvadratickou rovnici $-64\left(c^2-20c-525\right)=0$. Buď pomocí diskriminantu nebo rozkladem zjistíme, že jí můžeme psát ve tvaru $-64\left(c+15\right)\cdot\left(c-35\right)=0$.

Pro $c_1=-15$ a pro $c_2=35$ je tedy diskriminant upravené kvadratické rovnice nulový a zadaná soustava má jediné řešení. Pro $c_1=-15$ je toto řešení rovno $x_1=\frac{40+6\cdot\left(-15\right)\pm 0}{2\cdot 25}=-1$ a odpovídající hodnota *y* je rovna $y_1=\frac{3\cdot\left(-1\right)-\left(-15\right)}{4}=3$.

Pro $c_2=35$ je toto řešení rovno $x_2=\frac{40+6\cdot 35\pm 0}{2\cdot 25}=5$ a odpovídající hodnota *y* je rovna $y_2=\frac{3\cdot 5-35}{4}=-5$.

Pokud bude diskriminant záporný, nebude mít soustava žádné řešení. To nastane v případě, že $-64\left(c^2-20c-525\right)<0$, tedy v případě, že $c^2-20c-525>0$. Tuto nerovnici můžeme psát ve tvaru $\left(c+15\right)\cdot\left(c-35\right)>0$, ze kterého (s využitím náčrtku příslušné paraboly) lze určit přípustné hodnoty parametru *c*: $c\in\left(-\infty;-15\right)\cup\left(35;\infty\right)$.

V případě, že diskriminant bude kladný, bude mít soustava dvě řešení. To nastane v případě, že $-64\left(c^2-20c-525\right)>0$ resp. $\left(c+15\right)\cdot\left(c-35\right)<0$. Tato nerovnice je splněna pro $c\in\left(-15;35\right)$. Pro kořeny $x_{3,4}$ příslušné kvadratické rovnice pak platí:

$$x_{3,4}=\frac{40+6c\pm\sqrt{64\left(-c^2+20c+525\right)}}{2\cdot 25}=\frac{2\cdot\left(20+3c\pm 4\sqrt{-c^2+20c+525}\right)}{2\cdot 25}=$$

$=\frac{20+3c\pm 4\sqrt{-c^2+20c+525}}{25}$. Pro příslušné hodnoty neznámé *y* pak dostáváme:

$$y_{3,4}=\frac{60+9c\pm 12\sqrt{-c^2+20c+525}-25c}{4\cdot 25}=\frac{60-16c\pm 12\sqrt{-c^2+20c+525}}{4\cdot 25}=$$

$$=\frac{15-4c\pm 3\sqrt{-c^2+20c+525}}{25}$$

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}^2$

$c\in\left(-\infty;-15\right)\cup\left(35;\infty\right):\mathrm{P}=\emptyset$

$c=-15:\mathrm{P}=\left\{\left[-1;3\right]\right\}$

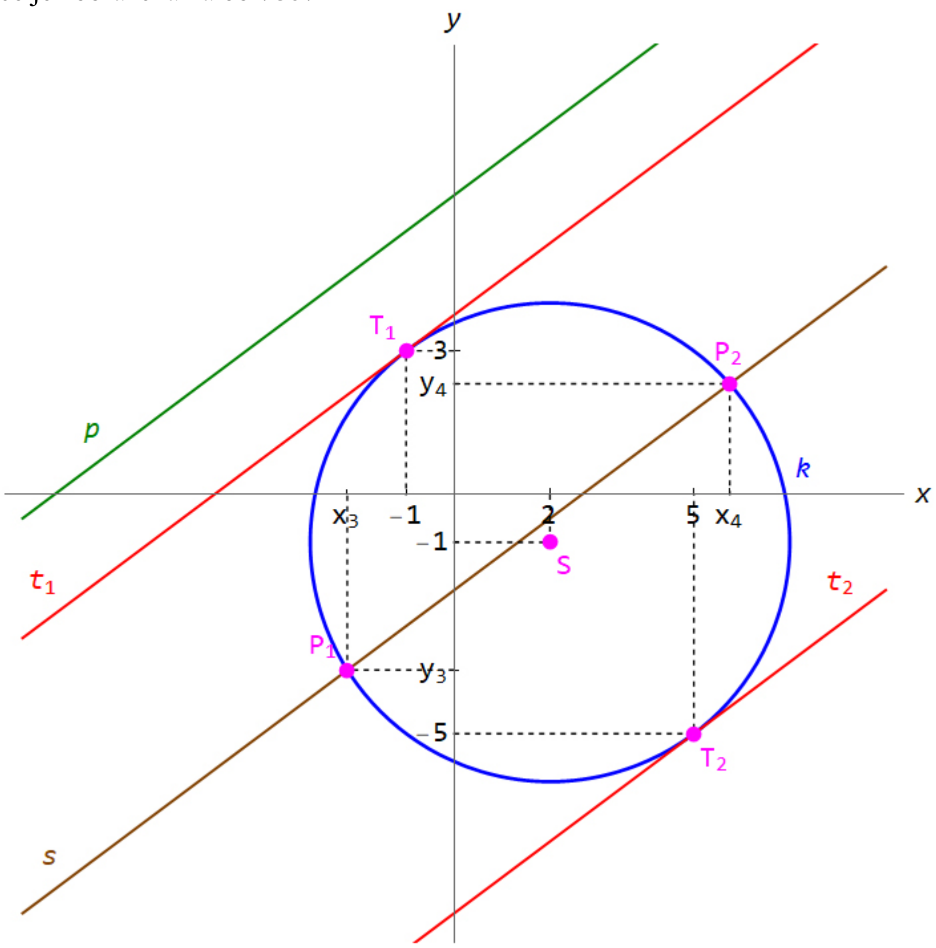
$c = 35 : \mathrm{P} = \{[5; -5]\}$

$c \in (-15; 35) : \mathrm{P} = \{[x_3; y_3]; [x_4; y_4]\}$

Právě vyřešená úloha má geometrický kontext. Zadaná kvadratická rovnice popisuje kružnici se středem v bodě $\mathrm{S} = [2; -1]$ a poloměrem 5 j a zadaná lineární rovnice popisuje přímku, kterou lze (v tomto případě) chápat jako graf lineární funkce s předpisem $y = \frac{3x - c}{4}$. Reálný parametr c způsobí posun dané přímky ve směru osy y při zachování její směrnice. Počet řešení výše vyřešené soustavy rovnic tak určuje počet průsečíků zadané kružnice a přímky:

1. pro $c \in (-\infty; -15) \cup (35; \infty)$ kružnice a přímka nemají žádný společný bod - přímka p je tedy vnější přímkou kružnice;
2. pro $c \in \{-15; 35\}$ má kružnice s přímkou jeden společný bod T_1 (resp. T_2) - přímka t_1 (resp. t_2) je tedy tečnou kružnice;
3. pro $c \in (-15; 35)$ má kružnice a přímka dva společné body P_1 a P_2 - přímka s je tedy sečnou kružnice.

Situace je zobrazena na obr. 35.



obr. 35

1.4.9.2 Soustava dvou kvadratických rovnic

V případě, že budeme řešit soustavu dvou kvadratických rovnic, neexistuje univerzální postup řešení. Zadanou soustavu rovnic je nutné pomocí ekvivalentních úprav (včetně součtu rovnic) převést na:

1. soustavu jedné kvadratické a jedné lineární rovnice - tuto soustavu již umíme řešit (viz kapitola 1.4.9.1);
2. kvadratickou rovnici s jednou neznámou.

Může se stát, že zadanou soustavu rovnic nebude možné analyticky (tj. bez použití hledání numerického řešení s využitím počítače) vyřešit. Takové soustavy rovnic ale v rámci středoškolské matematiky zadávat nebudeme.

Několik úloh demonstrující různé postupy řešení nyní ukážeme.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $(x-3)^2+(y+2)^2=20$ a $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

Řešení: Nejdříve v obou rovnicích umocníme oba členy, rovnice upravíme a následně provedeme takovou úpravu, aby se kvadratické členy po sečtení obou rovnic navzájem odečetly.

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=20$$
$$x^2-2x+1+y^2+6y+9=25$$

$$x^2-6x+y^2+4y=7$$
$$x^2-2x+y^2+6y=15$$

$$x^2-6x+y^2+4y=7$$
$$-x^2+2x-y^2-6y=-15$$

$$-4x-2y=-8$$

Z této rovnice vyjádříme nyní např. neznámou *y*, čímž dostaneme: $y=4-2x$. Toto vyjádření dosadíme do libovolné kvadratické rovnice v této úloze. Vzhledem k tomu, že jsme používali ekvivalentní úpravy, můžeme si vybrat, kterou rovnici použijeme. Dosaďme tedy např. do rovnice $x^2-6x+y^2+4y=7$. Postupně tak dostaneme:

$$x^2-6x+(4-2x)^2+4\cdot(4-2x)=7$$
$$x^2-6x+16-16x+4x^2+16-8x=7$$
$$5x^2-30x+25=0$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$(x-1)\cdot(x-5)=0$$

Máme tedy dva kořeny: $x_1=1$ a $x_2=5$. Ty dosadíme do vztahu pro neznámou *y* a dostaneme: $y_1=4-2\cdot1=2$ a $y_2=4-2\cdot5=-6$.

Závěr: $\mathrm{O}=\mathrm{D}=\mathbb{R}^2$ a $\mathrm{P}=\{[1;2];[5;-6]\}$.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $25(x-1)^2+36(y-3)^2=900$ a $(x-1)^2+(y-3)^2=25$.

Řešení: Podíváme-li se pečlivě na zadané rovnice, zjistíme, že v tomto případě můžeme řešit danou soustavu elegantněji, než manuálním umocňováním. Např. ze druhé rovnice můžeme vyjádřit $(y-3)^2=25-(x-1)^2$ a dosadit do první rovnice.

Je zbytečné odmocňovat nebo dokonce vyjadřovat *y*. Situace by se zkomplikovala, byl by problém s definičním oborem ekvivalentních úprav a ve finále bychom stejně museli dospět k témuž.

Dostaneme tak: $25(x-1)^2+36\cdot\left(25-(x-1)^2\right)=900$. Rovnici dále upravíme:

$$25(x-1)^2+900-36(x-1)^2=900$$
$$-11(x-1)^2=0$$
$$(x-1)^2=0$$
$$x=1$$

Tento kořen dosadíme do rovnice $(y-3)^2=25-(x-1)^2$ a dostaneme:

$$(y-3)^2=25-(1-1)^2$$

$(y-3)^2 = 25$

$|y-3| = 5$

Dostáváme tedy: $y_1 = 5+3 = 8$ a $y_2 = -5+3 = -2$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^2$ a $\mathrm{P} = \{[1;8];[1;-2]\}$.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $36(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 576$ a $x^2 + (y-2)^2 = 25$.

Řešení: Můžeme postupovat jako v minulé úloze nebo tak, že umocníme v obou rovnicích oba členy a následně se pokusíme eliminovat kvadratické členy. Použijme např. první možnost.

Ze druhé rovnice vyjádříme $(y-2)^2 = 25 - x^2$ a dosadíme do první rovnice.

$36(x-1)^2 + 16(25-x^2) = 576$

$36x^2 - 72x + 36 + 400 - 16x^2 = 576$

$20x^2 - 72x - 140 = 0$

$5x^2 - 18x - 35 = 0$

Rozklad kvadratického trojčlenu na levé straně rovnice nebude snadný, proto vypočítáme neznámou x pomocí diskriminantu: $x_{1,2} = \dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot 5\cdot(-35)}}{2\cdot 5} = \dfrac{18 \pm \sqrt{324+700}}{10} = \dfrac{18 \pm 32}{10}$.

Tedy $x_1 = \dfrac{18+32}{10} = 5$ a $x_2 = \dfrac{18-32}{10} = -\dfrac{7}{5}$.

Vypočtené hodnoty neznámé x dosadíme do rovnice $(y-2)^2 = 25 - x^2$ a upravíme:

$(y_1-2)^2 = 25 - 5^2$

$(y_1-2)^2 = 0$

$y_1 = 2$

Pro druhý kořen x dostáváme rovnici:

$(y_2-2)^2 = 25 - \left(-\dfrac{7}{5}\right)^2$

$(y_2-2)^2 = \dfrac{625-49}{25}$

$(y_2-2)^2 = \dfrac{576}{25}$

$|y_2-2| = \dfrac{24}{5}$

Dostáváme tedy dva kořeny: $y_{21} = \dfrac{24}{5} + 2 = \dfrac{34}{5}$ a $y_{22} = -\dfrac{24}{5} + 2 = -\dfrac{14}{5}$.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^2$ a $\mathrm{P} = \left\{[5;2];\left[-\dfrac{7}{5};\dfrac{34}{5}\right];\left[-\dfrac{7}{5};-\dfrac{14}{5}\right]\right\}$.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $4x^2 - y^2 = 20$ a $x^2 + y^2 = 25$.

Řešení: V tomto případě můžeme soustavu rovnic řešit dosazovací metodou nebo sčítací metodou.

$4x^2 - y^2 = 20$

$\underline{x^2 + y^2 = 25}$

$5x^2 = 45$

$x^2 = 9$

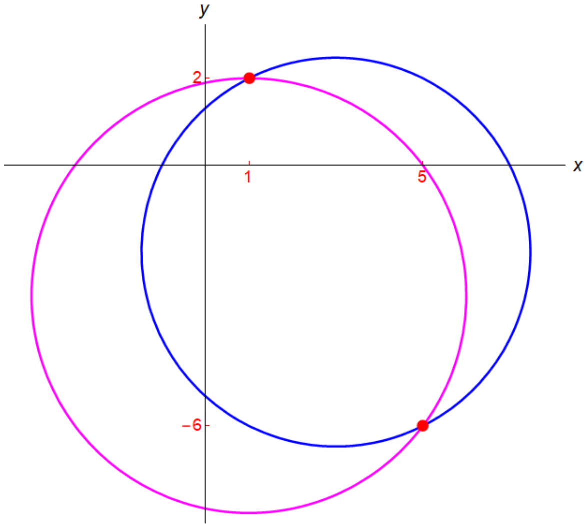
$|x| = 3$

Máme tedy dva kořeny $x_1 = -3$ a $x_2 = 3$. Ty dosadíme do vyjádření neznámé *y* z první zadané rovnice. Dostaneme tak: $y_1^2 = 4x^2 - 20 = 4 \cdot (-3)^2 - 20 = 16$ a tedy $y_{11} = -4$ a $y_{12} = 4$.

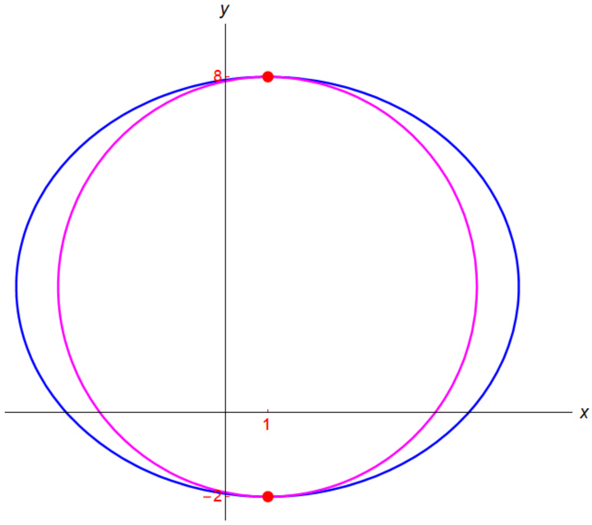
Pro druhý kořen *x* dostaneme tytéž kořeny *y*, protože ve vyjádření neznámé *y* vystupuje druhá mocnina *x*.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^2$ a $\mathrm{P} = \{[-3; -4]; [-3; 4]; [3; -4]; [3; 4]\}$.

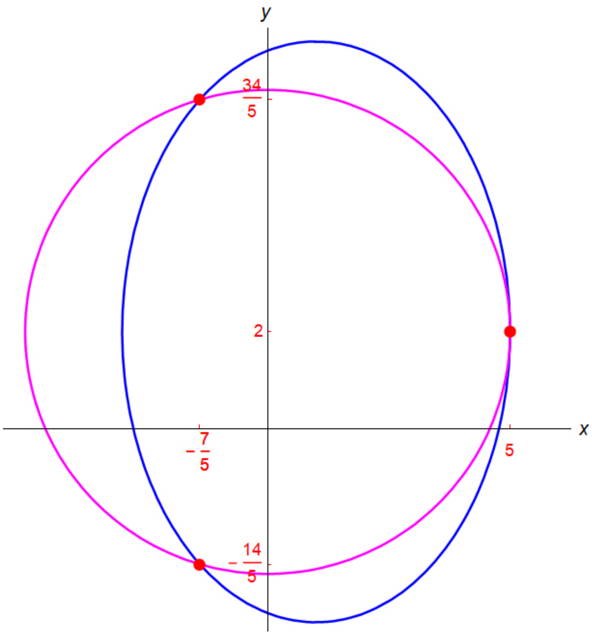
Všechny čtyři zatím spočítané úlohy mají i geometrický význam, s nímž se setkáme až v analytické geometrii kvadratických útvarů při vyšetřování vlastností kuželoseček (kružnice, elipsa, hyperbola a parabola).



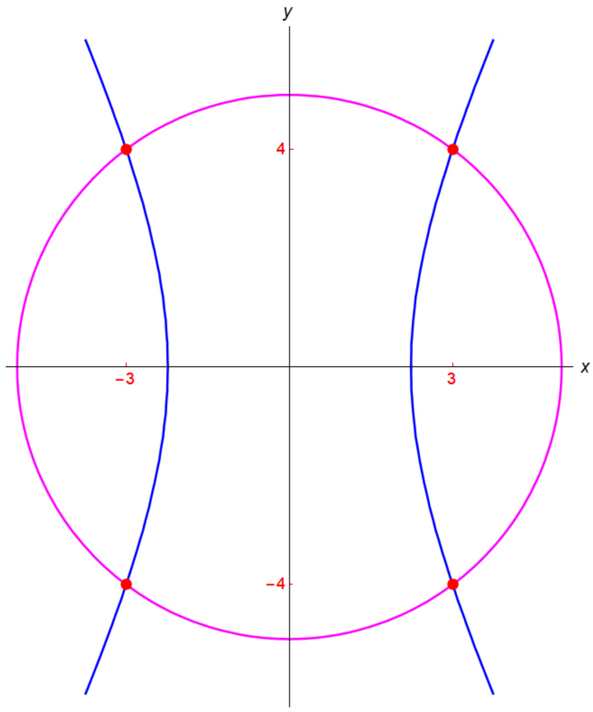
obr. 36



obr. 37



obr. 38



obr. 39

První řešená soustava rovnic odpovídá vzájemné poloze dvou kružnic - viz obr. 36.

Druhá a třetí řešená soustava rovnic odpovídá vzájemné poloze elipsy a kružnice - viz obr. 37 a obr. 38.

Čtvrtá řešená soustava rovnic odpovídá vzájemné poloze hyperboly a kružnice - viz obr. 39.

Poslední typ soustavy rovnic bude poněkud netradiční, ale občas se s ním v matematice setkáme.

V množině $\mathbb{R}^2$ řešte soustavu rovnic $x^2+4y^2=20$ a $x\cdot y=-4$.

Řešení: V tomto případě použijeme dosazovací metodu: ze druhé rovnice vyjádříme jednu neznámou (např. *y*) a dosadíme do první rovnice. Pro *y* tedy platí $y=-\frac{4}{x}$. Po dosazení do první rovnice postupně dostaneme:

$$x^2+4\cdot\left(-\frac{4}{x}\right)^2=20$$

$$x^2+4\cdot\frac{16}{x^2}=20$$

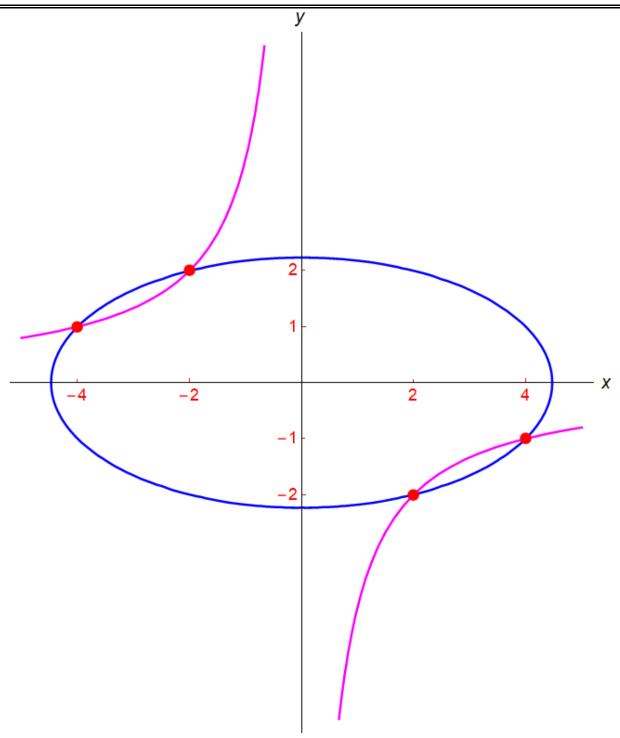
$$x^4+64=20x^2$$

$$x^4-20x^2+64=0$$

Rovnice, kterou jsme získali, připomíná kvadratickou rovnici. A proto se jí na kvadratickou rovnici pokusíme převést pomocí **substituce**. Zavedeme novou proměnnou *a* a tu definujeme takto: $a=x^2$. Poslední rovnici pak můžeme přepsat ve tvaru $a^2-20a+64=0$, kterou umíme již vyřešit. Levou stranu zapíšeme jako součin lineárních členů $(a-4)\cdot(a-16)=0$ a dostáváme dva kořeny: $a_1=4$ a $a_2=16$.

Dosazením do definice substituce dostaneme rovnice $4=x_1^2$ a $16=x_2^2$, z nichž získáme kořeny $x_{11}=-2$, $x_{12}=2$, $x_{21}=-4$ a $x_{22}=4$.

Zbývá určit pro každou hodnotu neznámé *x* hodnotu neznámé *y*. Postupně tak dostaneme: $y_{11}=-\frac{4}{-2}=2$, $y_{12}=-\frac{4}{2}=-2$, $y_{21}=-\frac{4}{-4}=1$ a $y_{22}=-\frac{4}{4}=-1$.



obr. 40

Dříve, než uděláme závěr rovnice, je nutné si uvědomit, že při vyjadřování neznámé *y* jsme dělili neznámou *x*. Z definičního oboru rovnice tedy vynecháme ty uspořádané dvojice, jejichž alespoň jedna souřadnice je nulová - mohli jsme totiž místo neznámé *y* vyjádřit neznámou *x*, čímž by se do jmenovatele zlomku dostala neznámá *y*.

Současně je ale nutné ověřit, že vynecháním těchto uspořádaných dvojic nepřijdeme o žádný kořen rovnice. Kořeny rovnice musejí totiž vyjít stejné bez ohledu na metodu, kterou danou rovnici (resp. soustavu rovnic) řešíme. Kdyby ale jedna z neznámých *x* nebo *y* případně obě byly rovny nule, neplatila by druhá rovnice: součin dvou činitelů, z nichž alespoň jeden je nulový, nemůže být roven nenulovému číslu. Vynecháním uvedených uspořádaných dvojic z definičního oboru tedy o žádný kořen nepřijdeme.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ [x;\, y] \in \mathbb{R}^2;\, x = 0 \vee y = 0 \right\}$ a $\mathrm{P} = \left\{ [-2;\, 2];\, [2;\, -2];\, [-4;\, 1];\, [4;\, -1] \right\}$.

I právě vyřešená soustava rovnic má geometrický význam: popisuje hledání společných průsečíků elipsy a rovnoosé hyperboly (viz obr. 40).

1.4.9.3 Soustava tří kvadratických rovnic

Na závěr studia soustav kvadratických rovnic ukážeme ještě řešení jedné soustavy tří kvadratických rovnic. Uvedená soustava se může vyskytnout v již zmiňované analytické geometrii při hledání parametrů kuželosečky, na níž leží dané body.

Metody řešení jsou podobné jako při řešení soustavy dvou kvadratických rovnic (viz kapitola 1.4.9.2). A stejně tak i v tomto případě se může stát, že zadaná soustava nebude řešitelná analyticky a bude nutné použít některou z numerických metod a využít výpočetní techniku.

Ukážeme řešení jedné úlohy, s níž se setkáme později v analytické geometrii.

Řešte v $\mathbb{R}^3$ soustavu rovnic $a^2 + b^2 - c^2 + 16a - 22b + 185 = 0$, $a^2 + b^2 - c^2 - 8a + 10b + 41 = 0$ a $a^2 + b^2 - c^2 - 12a - 18b + 117 = 0$.

Řešení: S využitím sčítací metody bude možné (při daném zadání) eliminovat kvadratické členy a vždy ze dvou kvadratických rovnic získat jednu rovnici lineární. S využitím prvních dvou rovnic dostaneme:

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 - c^2 + 16a - 22b + 185 = 0 \\ \underline{-a^2 - b^2 + c^2 + 8a - 10b - 41 = 0} \\ 24a - 32b + 144 = 0 \end{array}$$

S využitím druhé a třetí rovnice získáme:

$$\begin{array}{l} a^2 + b^2 - c^2 - 8a + 10b + 41 = 0 \\ \underline{-a^2 - b^2 + c^2 + 12a + 18b - 117 = 0} \\ 4a + 28b - 76 = 0 \end{array}$$

Nyní vyřešíme soustavu dvou lineárních rovnic, kterou jsme získali.

$$\begin{array}{l} 24a - 32b + 144 = 0 \\ \underline{4a + 28b - 76 = 0} \\ 12a - 16b + 72 = 0 \\ \underline{-12a - 84b + 228 = 0} \\ -100b + 300 = 0 \\ b = 3 \end{array}$$

Vyjádřením neznámé *a* např. z rovnice $4a + 28b - 76 = 0$ dostaneme $a = 19 - 7b$. Po dosazení tak dostaneme: $a = 19 - 7 \cdot 3 = -2$.

Vypočtené hodnoty neznámých *a* a *b* dosadíme do jedné z kvadratických rovnic (např. do první zadané rovnice) a vypočítáme neznámou *c*.

$$(-2)^2 + 3^2 - c^2 + 16 \cdot (-2) - 22 \cdot 3 + 185 = 0$$

$$4 + 9 - c^2 - 32 - 66 + 185 = 0$$

$$-c^2 + 100 = 0$$

Z poslední rovnice dostáváme dva kořeny: $c_1 = -10$ a $c_2 = 10$.

Vzhledem k tomu, že jsme používali pouze ekvivalentní úpravy, není nutné provádět zkoušku.

Závěr: $\mathrm{O} = \mathrm{D} = \mathbb{R}^3$ a $\mathrm{P} = \left\{ [-2;\, 3;\, -10];\, [-2;\, 3;\, 10] \right\}$.

1.4.10 Slovní úlohy

Postup při řešení slovních úloh, které vedou na kvadratickou rovnici nebo na soustavu rovnic, z nichž alespoň jedna je kvadratická, je analogický jako u řešení slovních úloh vedoucích na lineární rovnici nebo soustavu lineárních rovnic:

1. pečlivě si přečíst slovní zadání úlohy;
2. matematizovat zadání - tj. popsat zadání matematicky (uvědomit, co je neznámá, co známe, napsat vztahy mezi zadanými údaji, …);
3. sestavit příslušnou rovnici (resp. rovnice);
4. sestavené rovnice vyřešit;
5. vyhodnotit smysluplnost zadání (např. celočíselné počty objektů ve skupinách, nezáporné počty objektů ve skupinách, …);
6. napsat slovní odpověď, v níž zohledníme předcházející bod.

Řešení několika slovních úloh ukážeme.

Délky stran trojúhelníku DEN jsou 12 cm, 19 cm a 20 cm. Zkrátíme-li každou stranu o stejnou délku, dostaneme délky stran trojúhelníku VIP, který je pravoúhlý. O jakou délku je nutné zkrátit strany trojúhelníka DEN?

Řešení: Je-li trojúhelník VIP pravoúhlý, pak délky jeho stran splňují Pythagorovu větu. Označíme-li délku, o kterou je nutné zkrátit délky stran trojúhelníku DEN, symbolem *x*, můžeme psát rovnici (Pythagorovou větu pro délky stran trojúhelníka VIP): $(12-x)^2+(19-x)^2=(20-x)^2$. Tuto rovnici nyní vyřešíme.

$$144-24x+x^2+361-38x+x^2=400-40x+x^2$$

$$x^2-22x+105=0$$

$$(x-7)\cdot(x-15)=0$$

Dostáváme tak dva kořeny: $x_1=7$ a $x_2=15$.

Po odečtení 7 cm od délek stran trojúhelník DEN získáme délky stran trojúhelníka VIP: 5 cm, 12 cm a 13 cm. Odečítat 15 cm nelze, protože délky stran trojúhelníka mohou být vyjádřeny pouze kladnými čísly.

Na vůz působí dvě navzájem kolmé síly, jejichž velikosti jsou v poměru 3:4. Výsledná síla má velikost 20 kN. Určete velikosti obou sil, které působí na vůz.

Řešení: Označíme-li hledané velikosti sil symboly F_1 a F_2, můžeme ve shodě se zadáním napsat podmínku: $\frac{F_1}{F_2}=\frac{3}{4}$. Tím předpokládáme, že $F_1<F_2$, což není v žádném rozporu se zadáním. Současně předpokládáme, že žádná ze skládaných sil nemá nulovou velikost (kdyby měla jedna ze skládaných sil nulovou velikost, informace o poměru velikostí by byla nesmyslná).

Působí-li na dané těleso dvě navzájem kolmé síly, můžeme velikost jejich výslednice psát s využitím Pythagorovy věty. Lze tedy psát: $F_1^2+F_2^2=20^2$.

Z první rovnice vyjádříme $F_1=\frac{3}{4}F_2$ a dosadíme do druhé rovnice. Tu následně vyřešíme.

$$\left(\frac{3}{4}F_2\right)^2+F_2^2=20^2$$

$$\frac{9}{16}F_2^2+F_2^2=400$$

$$9F_2^2+16F_2^2=6400$$

$$25F_2^2=6400$$

$$F_2^2=256$$

Dostáváme tedy dvě řešení: $F_{21} = 16$ a $F_{22} = -16$. Velikost síly je ale definována jako nezáporné číslo, proto druhý kořen nemá fyzikální smysl. Pro velikost první síly po dosazení dostáváme $F_1 = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$.

Velikosti sil působících na vůz tedy jsou 12 kN a 16 kN.

Úloha byla řešena matematicky; při fyzikálním řešení by bylo nutné i během postupu řešení psát jednotky sil nebo je nahradit jiným, alternativním zápisem.

V areálu rekreačního střediska jsou děti na letním táboře. Jeden den odpoledne si matematicky nadaný vedoucí všiml, že děti v počtu rovném druhé mocnině devítiny celkového počtu dětí hrají fotbal, dvanáctina celkového počtu dětí telefonuje s rodiči, čtvrtina celkového počtu dětí se koupe v bazénu a osm dětí v klidu sedí ve stínu a povídá si. Kolik dětí je na táboře? Kolik dětí se koupe v bazénu?

Řešení: Označme celkový počet dětí symbolem *d*. Podle zadání pak platí:

fotbal .... $\left(\frac{d}{9}\right)^2$

telefonuje ………... $\frac{d}{12}$

koupe se …………... $\frac{d}{4}$

povídá si ……..…… 8

celkem ……………. $\left(\frac{d}{9}\right)^2 + \frac{d}{12} + \frac{d}{4} + 8$

$$\left(\frac{d}{9}\right)^2 + \frac{d}{12} + \frac{d}{4} + 8 = d$$

$$\frac{d^2}{81} + \frac{d}{12} + \frac{d}{4} + 8 = d$$

$$4d^2 + 27d + 81d + 2592 = 324d$$

$$4d^2 - 216d + 2592 = 0$$

$$d^2 - 54d + 648 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{(-54)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 648}}{2} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2592}}{2} = \frac{54 \pm 18}{2}$$

Dostáváme tedy kořeny: $d_1 = \frac{54+18}{2} = 36$ a $d_2 = \frac{54-18}{2} = 18$.

Nyní provedeme zkoušku, zda kořeny vyhovují podmínkám úlohy:

fotbal .... $\left(\frac{36}{9}\right)^2 = 16$ …………… $\left(\frac{18}{9}\right)^2 = 4$

telefonuje ……….. $\frac{36}{12} = 3$ ………..……… $\frac{18}{12} = 1{,}5$

koupe se ………... $\frac{36}{4} = 9$ ………………... $\frac{18}{4} = 4{,}5$

povídá si …..……… 8

celkem …………… $16 + 3 + 9 + 8 = 36$ …… $4 + 1{,}5 + 4{,}5 + 8 = 18$

Ačkoliv pro kořen d_2 vychází správně součet, tento kořen nevyhovuje zadání! Počty dětí musejí být vyjádřeny celými nezápornými čísly.

Na táboře je 36 dětí, z nichž se 9 v danou chvíli koupe v bazénu.