Exponenciální rovnice

Rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá v exponentu, se nazývají **exponenciální rovnice**. Důležitou roli zde hraje věta, jejíž platnost přímo vyplývá z vlastností exponenciální funkce. Exponenciální funkce je totiž buď rostoucí nebo klesající (a tedy ryze monotónní) a tedy prostá. Proto platí následující věta:

V: Pro všechna reálná čísla *x*, *y* a pro každé $a \in R^{+} - \{1\}$ platí: je-li $a^{x} = a^{y}$, pak $x = y$.

<u>Poznámka:</u> Jinými slovy platí-li rovnost mezi dvěma mocninami, které mají stejný základ, musí se nutně rovnat i exponenty.

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $5^{5-x} = 5^{3x-3}$.

<u>Řešení:</u> na základě právě uvedené věty si stačí uvědomit, že uvedená rovnost platí, pokud exponenty v obou mocninách budou stejné (vzhledem k tomu, že jsou stejné základy mocnin - na obou stranách rovnice je základem číslo 5), tedy pokud bude platit: $5 - x = 3x - 3$, což je jednoduchá lineární rovnice, kterou je možné upravit na tvar $-4x = -8$, odkud dostáváme: $x = 2$. To je výsledek celého příkladu. Zbývá už jen *ODP*: $O = R$, $D = R$, $P = \{2\}$

Z právě uvedeného příkladu je jasná i „filosofie" řešení: snažit se vždy rovnici upravit tak, abychom dostali rovnost dvou mocnin o stejném základu. Jinými slovy se snažit převést všechny mocniny na mocniny o stejném základu pomocí známých vztahů probíraných v 1. ročníku. Na základě věty uvedené v záhlaví pak máme skoro hotovo.

V dalších řešených příkladech již nebudu vypisovat jednotlivé kroky se slovním komentářem, ale budu se snažit v úpravách postupovat pomalu, aby byl sled myšlenek jasný

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $\frac{1}{3^{5-4x}} = 81$.

<u>Řešení:</u>

$\frac{1}{3^{5-4x}} = 81$

$\frac{1}{3^{5-4x}} = 3^{4}$

$3^{-(5-4x)} = 3^{4}$

$-(5-4x) = 4$

$4x = 9$

$x = \frac{9}{4}$

$O = R$, $D = R$, $P = \left\{\frac{9}{4}\right\}$

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $9^{x-1}.\frac{3^{2x}}{3^{x+1}} = 3^{2x}.27$.

<u>Řešení:</u>

$\left(3^{2}\right)^{x-1}.\frac{3^{2x}}{3^{x+1}} = 3^{2x}.3^{3}$

$3^{2x-2}.3^{2x-x-1} = 3^{2x}.3^{3}$

$3^{2x-2}.3^{x-1} = 3^{2x}.3^{3}$

$3^{2x-2+x-1} = 3^{2x+3}$

$3^{3x-3} = 3^{2x+3}$

$3x - 3 = 2x + 3$

$x = 6$

$O = R$, $D = R$, $P = \{6\}$

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $3^{x} + 3^{x+1} = 108$.

<u>Řešení:</u>

$3^{x} + 3^{x+1} = 108$

$3^{x} + 3^{x}.3^{1} = 108$

$3^{x}\left(1 + 3^{1}\right) = 108$

$3^{x}.4 = 108$

$3^{x} = \frac{108}{4}$

$3^{x} = 27$

$3^{x} = 3^{3}$

$x = 3$

$O = R$, $D = R$, $P = \{3\}$

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $2^{x+3} + 2^{x+5} = 80$.

<u>Řešení:</u>

$2^{x+3} + 2^{x+5} = 80$

$2^{x}.2^{3} + 2^{x}.2^{5} = 80$

$2^{x}.\left(2^{3} + 2^{5}\right) = 80$

$2^{x}.(8 + 32) = 80$

$2^{x}.40 = 80$

$2^{x} = \frac{80}{40}$

$2^{x} = 2$

$x = 1$

$O = R$, $D = R$, $P = \{1\}$

Řešte v *R* rovnici o neznámé *x*: $4^{x} - 2^{x+1} = 48$.

<u>Řešení:</u>

$4^{x} - 2^{x+1} = 48$

$2^{2x} - 2^{x}.2 = 48$ a tím jsme v podstatě skončili, protože není možné použít onu zmíněnou filosofii: upravit na rovnost dvou mocnin se stejným základem a na základě toto poté dát do rovnosti exponenty. Zde si musíme pomoci jinak. I když se totiž budeme snažit vytknout (jako v minulých příkladech), nepomůže to. Dostaneme totiž rovnici ve tvaru $2^x\left(2^x-2\right)=48$, kde „vadí“ v závorce člen 2^x (to v minulých příkladech nebylo). Bude tedy nezbytné se vrátit zpět k rovnici $2^{2x}-2^x.2=48$ a upravit první člen jinak: $\left(2^x\right)^2-2^x.2=48$. Nyní je možné rovnici převést na tvar $\left(2^x\right)^2-2^x.2-48=0$, která už připomíná kvadratickou rovnici. Použijeme tedy substituci: $y=2^x$ a rovnici napíšeme ve tvaru $y^2-2y-48=0$, což je kvadratická rovnice pro neznámou *y*. Po vyřešení (rozkladem nebo přes diskriminant) obdržíme dva kořeny: $y_1=8$ a $y_2=-6$. Musíme se ale „vrátit“ zpět k neznámé *x*, tedy zpět k substituci: $8=2^x$ a $-6=2^x$. První rovnici lze upravit na tvar $2^3=2^x$, odkud dostáváme $x=3$. Druhá rovnice $-6=2^x$ nemá řešení, protože exponenciální funkce (v základním tvaru) nabývá pouze kladných funkčních hodnot. Tedy řešením původní rovnice $4^x-2^{x+1}=48$ je pouze $x=3$. Tedy závěr je $O=R$, $D=R$, $P=\{3\}$.

Řešte v R rovnici o neznámé *x*: $3^{2x}-3.\left(3^x-3^2\right)=3^{x+2}$.

Řešení:

$3^{2x}-3.\left(3^x-3^2\right)=3^{x+2}$

$3^{2x}-3.3^x+3.3^2=3^x.3^2$

$3^{2x}-3.3^x+3.3^2=3^x.3^2$

$\left(3^x\right)^2-3.3^x+27=9.3^x$

$\left(3^x\right)^2-12.3^x+27=0$

substituce: $y=3^x$

$y^2-12y+27=0$

po vyřešení kvadratické rovnice: $y_1=3$ a $y_2=9$

$3=3^x \Rightarrow x=1$

$9=3^x \Rightarrow x=2$

$O=R$, $D=R$, $P=\{1;2\}$

Řešte v R rovnici o neznámé *x*: $5^x\left(5^x-20\right)=25\left(6.5^{x-2}-1\right)$.

Řešení:

$5^x\left(5^x-20\right)=5^2\left(6.5^{x-2}-1\right)$

$5^{2x}-20.5^x=6.5^x-5^2$

$5^{2x}-26.5^x+25=0$

$\left(5^x\right)^2-26.5^x+25=0$

substituce: $y=5^x$

$y^2-26y+25=0$

po vyřešení kvadratické rovnice: $y_1=1$ a $y_2=25$

$1=5^x \Rightarrow x=0$

$25=5^x \Rightarrow x=2$

$O=R$, $D=R$, $P=\{0;2\}$

Příklady k procvičení:

Řešte v *R*: $\dfrac{32^{x+1}}{16.2^{2x}}=4^{1+x}$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{1\}$), $2^x-2^{4-x}=15$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{4\}$), $6.\left(6^{2x-2}+1\right)=4.6^x-13.6^{x-1}$ ($O=R$, $D=R$, $P=\{0;2\}$), …

<u>Inverzní funkce</u>

D: Je-li funkce *f* **prostá**, pak k ní existuje právě jedna funkce, která se označuje symbolem f^{-1} a která je dána takto:

1. definičním oborem funkce f^{-1} je obor hodnot funkce *f*, tj. $D\left(f^{-1}\right)=H(f)$
2. každému $y\in D\left(f^{-1}\right)$ je přiřazeno právě jedno $x\in D(f)$ tak, že platí: $f(x)=y$.

Funkce f^{-1} se nazývá **<u>inverzní funkce</u>** k funkci *f*.

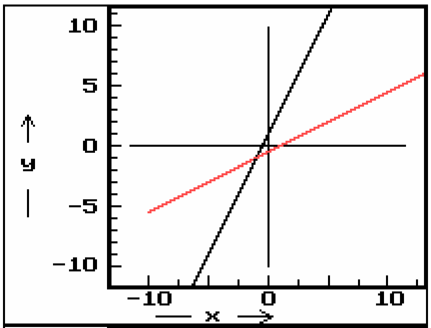
V: Inverzní funkce f^{-1} k funkci *f* je stejně ryze monotónní jako funkce *f*.

<u>Poznámka:</u> Grafy funkcí f a f^{-1} ležící v téže kartézské soustavě souřadnic 0xy jsou souměrně sdružené podle přímky $y=x$.

<u>Komentář:</u> Inverzní funkce k dané funkci je v podstatě taková funkce, která vznikne prohozením souřadných os, tj. *x* zaměníme za *y*. Důležitou vlastností funkcí, k nimž je možné sestrojovat funkce inverzní, je, aby funkce byly **<u>prosté</u>**. Jinak by totiž (po záměně os) nově vznikla relace (tedy „funkce“ inverzní), která by nebyla funkcí (tj. jednomu *x* by odpovídaly dvě různé funkční hodnoty na ose *y*). Se záměnou os *x* a *y* souvisí též záměna definičního oboru původní funkce s oborem hodnot funkce inverzní a naopak (blíže - viz příklady).

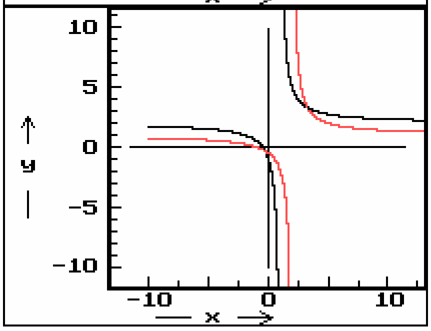
Najděte k dané funkci funkci inverzní (pokud je to možné):

1. $f: y = 2x + 1$



Řešení: Formálně vyměníme x a y a z takto získané rovnice vyjádříme y: $x = 2y + 1 \;\Rightarrow\; f^{-1}: y = \dfrac{x-1}{2}$. Obě funkce je možné nakreslit do téhož grafu, přičemž platí: $D(f) = H\left(f^{-1}\right) = R$ a $H(f) = D\left(f^{-1}\right) = R$.

2. $g: y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

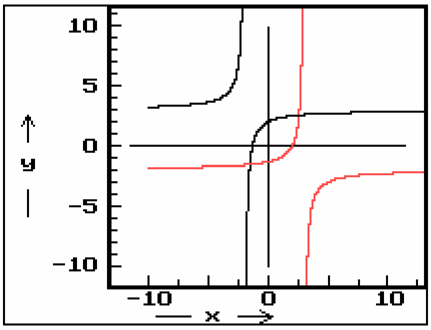


Řešení: $g: y = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2x-2+2+1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+2+1}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ a tento graf umíme nakreslit. Inverzní funkce: $x = \dfrac{2y+1}{y-1} \;\Rightarrow$

$xy - x = 2y + 1 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{x+1}{x-2} \;\Rightarrow\; g^{-1}: y = \dfrac{x-2+2+1}{x-2} = 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

$D(g) = H\left(g^{-1}\right) = R - \{1\}$ a $H(g) = D\left(g^{-1}\right) = R - \{2\}$

3. $h: y = \dfrac{3x+4}{x+2}$



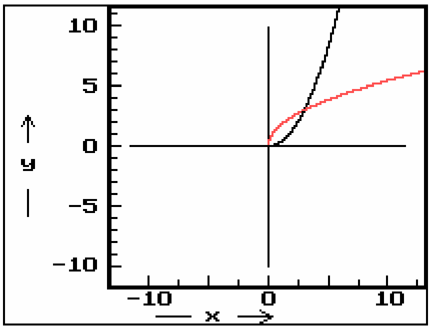
Řešení: $h: y = \dfrac{3x+4}{x+2} = \dfrac{3x+6-6+4}{x+2} = \dfrac{3(x+2)-6+4}{x+2} = 3 - \dfrac{2}{x+2}$.

Inverzní funkce: $x = \dfrac{3y+4}{y+2} \;\Rightarrow\; xy + 2x = 3y + 4 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{-2x+4}{x-3}$

$\Rightarrow\; h^{-1}: y = \dfrac{-2x+4}{x-3} = \dfrac{-2x+6-6+4}{x-3} = \dfrac{-2(x-3)-2}{x-3} = -2 - \dfrac{2}{x-3}$.

$D(h) = H\left(h^{-1}\right) = R - \{-2\}$ a $H(h) = D\left(h^{-1}\right) = R - \{3\}$

4. $j: y = \dfrac{x^2}{3}$



Řešení: k této funkci není možné sestrojit inverzní funkci na celém jejím definičním oboru, neboť daná funkce j není na svém definičním oboru prostá. Proto je třeba zvolit interval (a většinou se volí největší možný), na kterém by prostá byla. V tomto případě jde o interval $\langle 0; \infty)$, na kterém je možné provést již výše naznačený postup.

Inverzní funkce: $j: y = \dfrac{x^2}{3} \;\Rightarrow\; j^{-1}: y = \sqrt{3x}$.

$D(j) = H\left(j^{-1}\right) = \langle 0; \infty)$, $H(j) = D\left(j^{-1}\right) = \langle 0; \infty)$