Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3, Praha 1

Diferenciální a integrální počet

Jaroslav Reichl

OBSAH

Text je psán pomocí několika zvláštních stylů:

Běžný text, odvozování vztahů, výsledné vztahy, …

DEFINICE DŮLEŽITÝCH MATEMATICKÝCH POJMŮ, ZNĚNÍ MATEMATICKÝCH VĚT.

Komentář, který probíranou látku rozšiřuje, upřesňuje či doplňuje.

Zjednodušená tvrzení pro lepší pochopení, která jsou tedy z matematického hlediska nepřesná, ale která mohou napomoci k lepšímu pochopení probírané látky.

Text v některých částech překračuje běžně probíranou středoškolskou látku z matematiky. Tyto rozšiřující poznatky mohou přispět k hlubšímu pochopení látky těm žákům, kteří budou matematiku studovat i na vysoké škole (a to nejen technického zaměření).

Text neprošel odbornou ani jazykovou korekturou. Narazíte-li na chyby, prosím na jejich upozornění.

Předem děkuji.

Jaroslav Reichl

1. DIFERENCIÁLNÍ POČET

Základy diferenciálního a integrálního počtu, který bývá též nazýván počet infinitezimální (latinky *infinitesimalis* znamená nekonečně malý), vytvořili anglický matematik, fyzik a astronom Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik, fyzik, filosof, právník a diplomat Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). Tato matematická disciplína, která je založena „na nekonečně malých veličinách“, nalezla rychle uplatnění v nastupujícím 18. století, protože měla použití nejen v samotné matematice, ale i v přírodních vědách a technice.

1.1 Elementární funkce

Vzhledem k tomu, že problematika diferenciálního a integrálního počtu je založena na pojmu funkce, je třeba bezpodmínečně ovládat základní (tzv. elementární) funkce a jejich vlastnosti (graf, transformace grafu v soustavě souřadnic, definiční obor a obor hodnot, monotonie, ryzí monotonie, omezenost, inverzní funkce, periodická funkce, …).

Při výpočtu limit, derivací a integrálů se často využívá rovnost funkcí a navíc většina z vyšetřovaných funkcí budou funkce složené, je třeba tyto pojmy upřesnit.

FUNKCE f A g SE ROVNAJÍ NA MNOŽINĚ $M = D(f) \cap D(g)$, PLATÍ-LI PRO KAŽDÉ $x \in M$: $f(x) = g(x)$.

ŘEKNEME, ŽE FUNKCE h JE SLOŽENA (h JE SLOŽENÁ FUNKCE) Z FUNKCÍ f A g, PRÁVĚ TEHDY KDYŽ PLATÍ: $D(h) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\}$ A $\forall x \in D(h): h(x) = g(f(x))$. FUNKCE h SE ZNAČÍ SYMBOLEM: $h = g \circ f$. SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ NENÍ OBECNĚ KOMUTATIVNÍ.

Mějme např. funkce $f: y = x^2$ a $g: y = \sin x$. Dvě funkce můžeme složit dvojím způsobem. Funkce $h = g \circ f$ je funkce, kterou získáme tak, že funkci *g* aplikujeme na funkci *f*. Tedy nejdříve zpracujeme funkci *f* a poté až funkci *g*, tj. $h = g \circ f = \sin x^2$. Funkci $j = f \circ g$ získáme tak, že na funkci *g* aplikujeme funkci *f*, tj. $j = f \circ g = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Spolu se základními funkcemi (elementárními funkcemi), které jsou známé ze středoškolské matematiky, je třeba znát i jejich grafy (včetně transformace grafu - posunutí po jednotlivých osách kartézského systému, násobky, …). Přehled základních (elementárních) funkcí:

1. <u>polynomická:</u> $f: y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ a $D(f) = \mathbb{R}$ (jejími zvláštními případy jsou funkce konstantní, lineární a kvadratická);
2. <u>racionální:</u> $f: y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1 x + b_0}$, jejímž definičním oborem jsou reálná čísla vyjma všech nulových bodů polynomu $Q_m(x)$ (jejími zvláštními případy jsou nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce);
3. <u>mocninná:</u> $f: y = x^n$, kde:

a) $n \in \mathbb{N}$ a $D(f) = \mathbb{R}$;

b) $n \in \mathbb{Z}^-$ a $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$;

c) $n \in \mathbb{Q}$ a $D(f) = \mathbb{R}^+$;

4. <u>exponenciální:</u> $f: y = a^x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a $D(f) = \mathbb{R}$;
5. <u>logaritmická:</u> $f: y = \log_a x$, kde $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a $D(f) = \mathbb{R}^+$;
6. <u>goniometrické</u>:

a) $f: y = \sin x$, kde $D(f) = \mathbb{R}$;

b) $f: y = \cos x$, kde $D(f) = \mathbb{R}$;

c) $f: y = \mathrm{tg}\, x$, kde $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$;

d) $f: y = \mathrm{cotg}\, x$, kde $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;

7. funkce signum: $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pro } x < 0 \\ 0 \text{ pro } x = 0 \\ 1 \text{ pro } x > 0 \end{cases}$, kde $D(f) = \mathbb{R}$.

1.2 Limita funkce

1.2.1 Základní pojmy, zavedení pojmu limita

Pojem limita funkce je důležitým pojmem nejen v oblasti diferenciálního a integrálního počtu, ale v celé matematice vůbec. Na základě limit je možné přesně popsat řadu pojmů a vypočítat řadu údajů, které by zůstaly bez použití limit skryty.

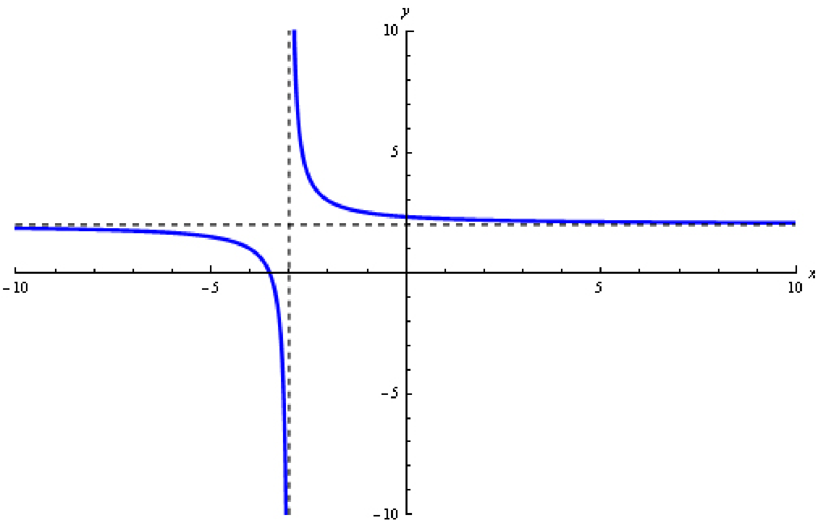
Při vyšetřování limit funkce (a následně i spojitosti funkce - viz odstavec 1.3) budeme vyšetřovat vlastnosti funkce f v určitém konkrétním bodě a z definičního oboru dané funkce, tj. $a \in D(f)$. To ale neznamená jen vypočítat funkční hodnotu v daném bodě (pokud funkční hodnota existuje), ale hlavně zjišťovat, jak se mění funkční hodnoty $f(x)$ v okolí daného bodu *a*.

Tj. jak moc se mění funkční hodnoty, když se budeme k danému bodu blížit zleva a zprava.

Před vyslovením definice prozkoumáme limity intuitivně na konkrétním příkladu.

Je dána funkce $f : y = \frac{1}{x+3} + 2$. Z grafu funkce *f*, který je zobrazen na obr. 1, vyplývá, že:

1. pro velká *x* (patřící do definičního oboru) se funkční hodnoty blíží stále více k hodnotě $y = 2$, ale nikdy jí nedosáhnou (tj. rovnice $\frac{1}{x+3} + 2 = 2$ nemá řešení). Proto se říká, že funkční hodnoty se pro velká *x* *blíží* k číslu 2. Pro velká *x* tedy existuje limita (viz odstavec 1.2.1.4): $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+3} + 2\right) = 2$.
2. pro čísla v okolí bodu $x = -3$, který nepatří do definičního oboru funkce, ale už nedostaneme jednu hodnotu, k níž se blíží funkční hodnoty dané funkce. Budeme-li vyšetřovat ta *x* v okolí bodu -3, která jsou větší než -3, budou funkční hodnoty velká kladná čísla. Podíváme-li se ale na čísla v blízkosti bodu $x = -3$, která jsou menší než -3, budou funkční hodnoty záporné a jejich absolutní hodnoty budou velké. Tj. pro bod $x = -3$ se nepodaří nalézt jednu funkční hodnotu: existují tedy tzv. dvě jednostranné limity (viz odstavec 1.2.1.1.0) $\lim\limits_{x\to -3^+}\left(\frac{1}{x+3} + 2\right) = \infty$ a $\lim\limits_{x\to -3^-}\left(\frac{1}{x+3} + 2\right) = -\infty$, ale neexistuje limita oboustranná.



obr. 1

<u>Ilustrační příklad:</u> Je dána funkce $f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Určete její definiční obor, načrtněte její graf a pokuste se ji „přirozeným způsobem“ dodefinovat v bodech, v nichž není definovaná.

<u>Řešení:</u> Definiční obor funkce je $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Na definičním oboru dané funkce je možné předpis funkce *f* upravit takto: $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$ a získáme tak funkci $g : y = x + 2$. Krácení výrazem $x - 2$ je

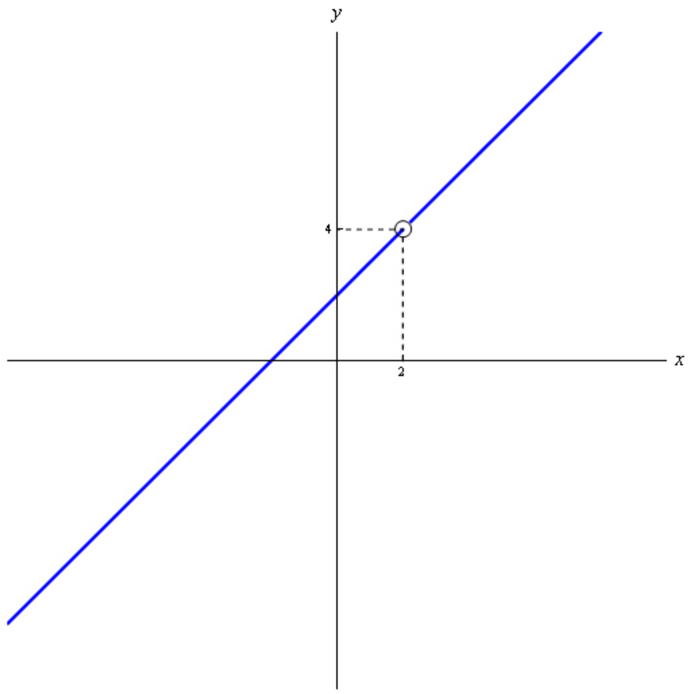
matematicky v pořádku - na základě definičního oboru funkce f totiž víme, že výraz $x-2$ nemůže nikdy nabývat nulové hodnoty.

Funkce g, která vznikla úpravou výrazu z funkce f, má stejný definiční obor jako funkce f, tj. $D(g)=D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. Její graf je znázorněn na obr. 2. Jediným bodem, kde není funkce g definovaná je bod 2. Kdybychom ale nevěděli, že funkce g vznikla úpravou funkce f, mohli bychom jí v bodě $x=2$ dodefinovat velice snadno - prostým dosazením bodu $x=2$ do předpisu funkce g: $g(2)=2+2=4$. Bod o souřadnicích $[2;\,4]$ skutečně leží na grafu funkce g i f, ačkoliv v bodě 2 není funkce f definovaná.

Touto úpravou jsme tedy dodefinovali „přirozeným způsobem“ i funkci f v bodě 2.

Dodefinovat funkci „přirozeným způsobem“ znamená dodefinovat jí tak, pokud je to možné, abychom získali spojitou funkci (viz odstavec 1.3).

Limitu je třeba chápat jako jakousi „náhražku“ funkční hodnoty v daném bodě: nejde-li funkční hodnota spočítat přímo, podíváme se, jak se chovají funkční hodnoty v okolí „problematického bodu“, a dodefinujeme funkční hodnotu tak, aby dodefinovaný bod na grafu funkce „nevyčuhoval“.



obr. 2

1.2.1.1 Limita v bodě

Nyní následuje několik definic, které jsou nezbytné pro matematické zavedení pojmu limita. Na úrovni střední školy nejsou zdaleka všechny potřeba, jsou zde uvedeny pouze pro úplnost.

Okolí bodu a se nazývá otevřený interval $(a-\delta;a+\delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Číslo a se nazývá střed okolí, číslo δ poloměr okolí. Okolí bodu a o poloměru δ se značí $U(a,\delta)$.

Někdy se též používá název δ-okolí bodu a. Do množiny $U(a,\delta)$ patří všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnostem $a-\delta<x<a+\delta$, tj. $|x-a|<\delta$.

Do množiny $U(a,\delta)$ tedy patří všechny body x na reálné ose, jejichž vzdálenost od daného bodu a je menší než δ.

Levé okolí bodu a se nazývá polouzavřený interval $(a-\delta;a\rangle$, kde δ je kladné reálné číslo.

Levé okolí bodu a tvoří tedy všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnostem $a-\delta<x\le a$.

Jsou to tedy všechna reálná čísla x, která leží na reálné ose vlevo od bodu a ve vzdálenosti nejvýše δ.

Pravé okolí bodu a se nazývá polouzavřený interval $\langle a;a+\delta)$, kde δ je kladné reálné číslo.

Pravé okolí bodu a tvoří tedy všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnostem $a\le x<a+\delta$.

Do pravého okolí bodu a tedy patří všechna reálná x ležící vpravo od bodu a ve vzdálenosti nejvýše δ.

Prstencové okolí bodu a se nazývá množina $(a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$, tj. množina $U(a,\delta)-\{a\}$.

Tuto množinu tvoří všechna reálná čísla *x*, která vyhovují nerovnostem $a-\delta < x < a$ nebo $a < x < a+\delta$, tj. $0 < |x-a| < \delta$.

Prstencové okolí daného bodu *a* je tedy „normální" okolí bodu *a*, ze kterého vynecháme bod *a*.

Nyní můžeme definovat limitu funkce v bodě *a*.

Funkce f má v bodě a limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje prstencové okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto prstencového okolí bodu a náleží funkční hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L. Tuto skutečnost zapisujeme výrazem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

S využitím matematické symboliky je možné definici přepsat ve tvaru: Funkce *f* má v bodě *a* limitu *L*, právě tehdy když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a,\delta)-\{a\} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

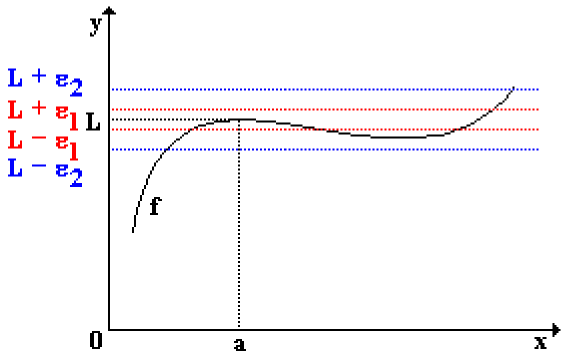
Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ se čte: „limita funkce $f(x)$ pro *x* blížící se k *a* je rovna *L*".

Obsah právě uvedené definice je možné vysvětlit následujícím způsobem. Pokud se podaří uzavřít kolem bodu *L* takový interval (pás), že pro každou jeho šířku najdeme na ose *x* takové okolí bodu *a*, že pro všechny body z tohoto okolí budou jejich funkční hodnoty ležet v intervalu kolem bodu *L*, pak má daná funkce v bodě *a* limitu *L*. Cílem není najít široký pás kolem budu *L*. Naopak: snahou je pokusit se najít pás co možná nejužší, aby bylo hledání intervalu na ose *x* namáhavější. Je-li možné najít libovolně malý pás kolem bodu *L* (jeho šířka je 2ε), k němuž lze najít na ose *x* interval kolem bodu *a* (šířka toho intervalu je 2δ), pak daná funkce má limitu *L* v bodě *a*. Pokud není možné obecně takový pás najít, funkce v daném bodě limitu nemá.

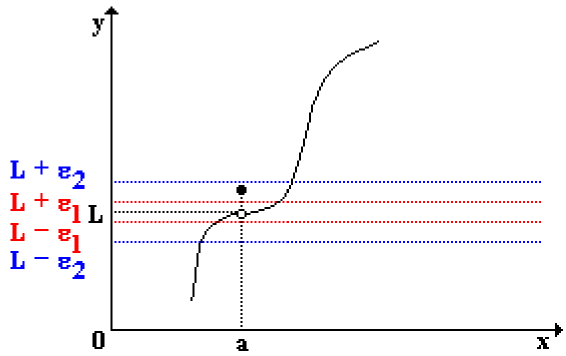
Snaha najít libovolný interval (tedy co nejužší interval, neboť pro široké intervaly jsou podmínky splněné snáze) odpovídá v definici limity předpokladu „k libovolně zvolenému okolí bodu *L*" resp. „pro každé kladné ε".

Jako příklad funkce, která má v bodě *a* limitu *L*, je možné uvést funkci na obr. 3. Pro jakkoliv široký pás v okolí bodu *L* (pro všechna kladná ε) jsme schopni najít interval na ose *x* (existuje kladné číslo δ) takový, že funkční hodnoty všech bodů z okolí bodu *a* (všechna *x* z množiny $(a-\delta; a+\delta)-\{a\}$) leží v předem daném pásu kolem bodu *L* (v intervalu $(L-\varepsilon; L+\varepsilon)$).

Na obr. 4 je příklad funkce, která v bodě *a* sice má limitu, ale ta není rovna funkční hodnotě dané funkce. Tato funkce tedy není v bodě *a* spojitá (viz odstavec 1.3).



obr. 3



obr. 4

Základní vlastnosti limity funkce:

1. Funkce *f* má v bodě *a* nejvýše jednu limitu.
2. $\forall x \in U(a,\delta)-\{a\} : f(x) = g(x) \wedge \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x) : \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$

   (Rovnají-li se dvě funkce v prstencovém okolí bodu *a*, v němž má navíc jedna z funkcí limitu, má limitu i druhá funkce a obě limity se rovnají.)
3. Jestliže pro všechna *x* z množiny $U(a,\delta)-\{a\}$ platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$ a současně $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, potom existuje také limita funkce *g* v bodě *a* a platí $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Je to tzv. věta o dvou policajtech - funkce *f* a *h* „svírají" funkci *g* jako dva policajti - viz obr. 5.

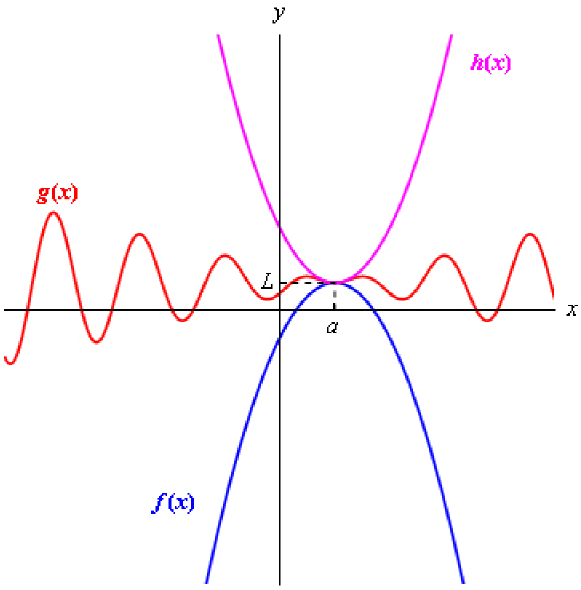
4. Limita součtu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je rovna součtu limit daných funkcí, tj. platí: $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. Limita součinu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je rovna součinu limit daných funkcí, tj. platí: $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x).g(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} f(x).\lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. Limita podílu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$, přičemž $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$, je rovna podílu limit daných funkcí, tj. platí: $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

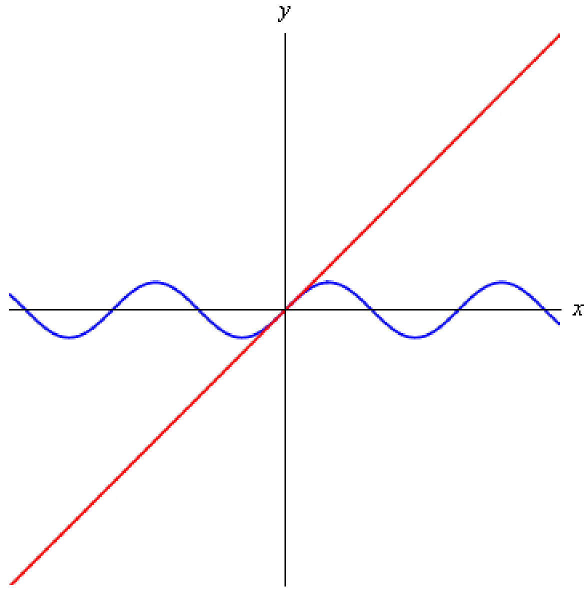
Pro řadu matematických úloh, ale i fyzikálních aplikací, je dobré znát hodnotu této limity: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Vztah $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ lze interpretovat graficky. Do téhož grafu sestrojíme graf funkce $f: y = \sin x$ a graf funkce $g: y = x$. Z grafu na obr. 6 je zřejmé, že pro x v okolí bodu $x = 0$ nabývají obě funkce téměř stejných hodnot.

To znamená, že podíl těchto funkcí v limitě pro *x* jdoucí k nule je roven jedné.



obr. 5



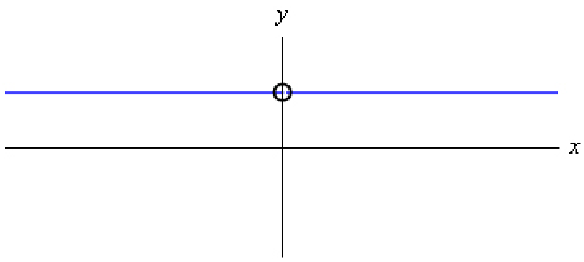
obr. 6

1.2.1.2 Jednostranná limita

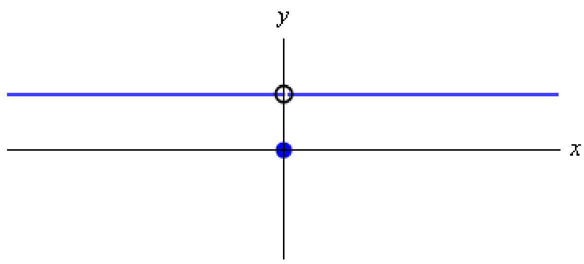
Uvažme grafy následujících funkcí: $f: y = \frac{x}{x}$, $g: y = \left| \operatorname{sgn} x \right|$, $h: y = \frac{|x|}{x}$ a $k: y = \operatorname{sgn} x$. Jejich definiční obory jsou $D(f) = D(h) = \mathbb{R} - \{0\}$ a $D(g) = D(k) = \mathbb{R}$. Jejich grafy jsou zobrazeny na obr. 7 až obr. 10. Tyto grafy jsou velmi podobné, ale liší se definicí a průběhem funkce v bodě $x = 0$. Platí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$, zatímco $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ a $\lim\limits_{x \to 0} k(x)$ neexistují. Nicméně z obrázků je vidět, že i funkce *h* a *k* se v bodě 0 přibližují k nějaké hodnotě - závisí ovšem na tom, z jaké strany se k nule budeme přibližovat: zda zleva nebo zprava.

Na základě toho je potom možné mluvit o jednostranné limitě:

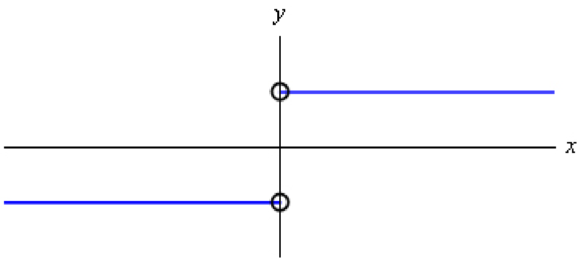
1. funkce *h* (resp. *k*) mají v bodě nule **zleva** jednostrannou limitu, která je rovna -1;
2. funkce *h* (resp. *k*) mají v bodě nule **zprava** jednostrannou limitu, která je rovna 1.



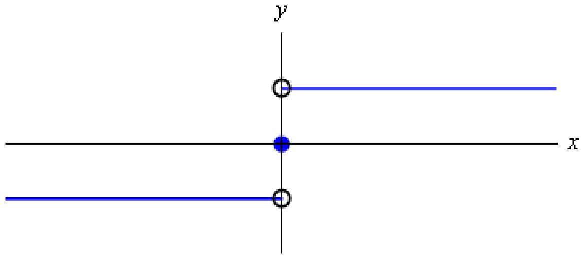
obr. 7



obr. 8



obr. 9



obr. 10

Nyní vyslovíme definice jednostranných limit.

Funkce f má v bodě a limitu L zleva, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje levé okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto levého okolí bodu a náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L. Tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Jedná se tedy o analogii oboustranné limity (viz odstavec 1.2.1.1), ale v tomto případě se zajímáme pouze o body od bodu *a* vlevo. To znamená, že k bodu *a* se blížíme z oblasti čísel, která jsou menší než bod *a*.

Funkce f má v bodě a limitu L zprava, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje pravé okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto pravého okolí bodu a náleží hodnoty $f(x)$ zvolenému okolí bodu L. Tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

S využitím matematické symboliky je možné právě uvedenou definici přepsat ve tvaru: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

V tomto případě se tedy k bodu *a* blížíme zprava, tj. z oblasti čísel, která jsou větší než bod *a*.

Na základě právě uvedených definic je možné určit podmínku pro existenci limity funkce v zadaném bodě:

Limita funkce f v bodě a existuje právě tehdy, když existují v bodě a limita zprava a limita zleva a tyto limity jsou si rovny. Potom se limita funkce f v bodě a rovná společné hodnotě limit zleva a zprava.

Pokud jedna z jednostranných limit zleva nebo zprava neexistuje nebo tyto jednostranné limity jsou navzájem různé, oboustranná limita (tj. „normální limita“) v daném bodě neexistuje.

1.2.1.3 Nevlastní limity funkce v bodě

Až dosud bylo výsledkem počítání limity vždy reálné číslo, tj. číslo z intervalu $(-\infty; \infty)$. Jsou ale funkce, které dosahují v absolutní hodnotě velkých funkčních hodnot a tedy limity v daných bodech budou růst nade všechny meze. Takovým limitám se říká **nevlastní limity**.

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu ∞, jestliže k libovolně zvolenému číslu K existuje prstencové okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto prstencového okolí bodu a je $f(x) > K$. Tuto skutečnost zapisujeme zápisem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\, \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a,\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) > K$.

Příklad: Nevlastní limitu ∞ mají např. funkce: $f: y = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ v bodě 3, $g: y = \dfrac{1}{(x+5)^4}$ v bodě -5, …

Funkce tedy v daném bodě „uteče“ do nekonečna - funkční hodnoty budou při přibližování se k danému bodu stále růst.

Funkce f má v bodě a nevlastní limitu $-\infty$, jestliže k libovolně zvolenému číslu K existuje prstencové okolí bodu a tak, že pro všechna x z

TOHOTO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU a JE $f(x) < K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \forall x \in U(a, \delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) < K$.

Příklad: Nevlastní limitu $-\infty$ mají např. funkce: $f : y = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ v bodě -1, $g : y = -\dfrac{1}{x^8}$ v bodě 0, $h : y = \ln|x|$ v bodě 0, …

Funkční hodnoty budou při přibližování se k danému bodu tentokráte „utíkat“ do velmi malých hodnot (tj. do záporných hodnot, jejichž absolutní hodnota je velká).

FUNKCE f MÁ V BODĚ a NEVLASTNÍ LIMITU ∞ ZLEVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU K EXISTUJE LEVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU a TAK, ŽE PRO VŠECHNA x Z TOHOTO LEVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU a JE $f(x) > K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > K$.

Příklad: Nevlastní limitu ∞ v daném bodě zleva mají např. funkce: $f : y = -\dfrac{1}{x+4}$ v bodě -4, $g : y = -\log(-x)$ v bodě 0, $h : y = \operatorname{tg} x$ v bodě $\dfrac{\pi}{2}$, …

FUNKCE f MÁ V BODĚ a NEVLASTNÍ LIMITU ∞ ZPRAVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU K EXISTUJE PRAVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU a TAK, ŽE PRO VŠECHNA x Z TOHOTO PRAVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU a JE $f(x) > K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > K$.

Příklad: Nevlastní limitu ∞ v daném bodě zprava mají např. funkce: $f : y = \dfrac{1}{x+4}$ v bodě -4, $f : y = -\log(x-2)$ v bodě 2, $h : y = \operatorname{cotg} x$ v bodě 0, …

FUNKCE f MÁ V BODĚ a NEVLASTNÍ LIMITU $-\infty$ ZLEVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU K EXISTUJE LEVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU a TAK, ŽE PRO VŠECHNA x Z TOHOTO LEVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU a JE $f(x) < K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < K$.

Příklad: Nevlastní limitu $-\infty$ v daném bodě zleva mají např. funkce: $f : y = \dfrac{1}{x+4}$ v bodě -4, $g : y = \log(-x+1)$ v bodě 1, $h : y = \operatorname{cotg} x$ v bodě π, …

FUNKCE f MÁ V BODĚ a NEVLASTNÍ LIMITU $-\infty$ ZPRAVA, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU ČÍSLU K EXISTUJE PRAVÉ PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU a TAK, ŽE PRO VŠECHNA x Z TOHOTO PRAVÉHO PRSTENCOVÉHO OKOLÍ BODU a JE $f(x) < K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < K$.

Příklad: Nevlastní limitu $-\infty$ v daném bodě zprava mají např. funkce: $f : y = -\dfrac{1}{x+4}$ v bodě -4, $g : y = \log(x+3)$ v bodě -3, $h : y = \operatorname{tg} x$ v bodě $\dfrac{3}{2}\pi$, …

1.2.1.4 Limita funkce v nevlastním bodě

Zatím jsme definovali vlastní i nevlastní limity v libovolném bodě a z intervalu $(-\infty; \infty)$. Je možné ale vyšetřovat funkční hodnoty funkce v krajích bodech uvedeného intervalu $(-\infty; \infty)$.

Tj. je možné vyšetřovat i limity v bodech ∞ a $-\infty$.

Takovým limitám říkáme **limita v nevlastním bodě**. Limita v nevlastním bodě přitom může být vlastní i nevlastní.

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ ∞ VLASTNÍ LIMITU L, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU ε EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x > x_0$ PATŘÍ FUNKČNÍ HODNOTY $f(x)$ DO INTERVALU $(L-\varepsilon; L+\varepsilon)$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Příklad: Vlastní limitu v nevlastním bodě ∞ mají např. funkce: $f: y = \frac{1}{x}$ a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $g: y = 2^{-x} + 3$ a $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 3$, …

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ $-\infty$ VLASTNÍ LIMITU L, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU ε EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x < x_0$ PATŘÍ FUNKČNÍ HODNOTY $f(x)$ DO INTERVALU $(L-\varepsilon; L+\varepsilon)$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Příklad: Vlastní limitu v nevlastním bodě $-\infty$ mají např. funkce: $f: y = 2^x - 1$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $g: y = -\frac{1}{x^4}$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, …

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ ∞ NEVLASTNÍ LIMITU ∞, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU K EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x > x_0$ PLATÍ $f(x) > K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) > K$.

Příklad: Nevlastní limitu ∞ v nevlastním bodě ∞ mají např. funkce: $f: y = \ln x$, $g: y = 3x + 1$, …

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ ∞ NEVLASTNÍ LIMITU $-\infty$, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU K EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x > x_0$ PLATÍ $f(x) < K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists x_0 : \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) < K$.

Příklad: Nevlastní limitu $-\infty$ v nevlastním bodě ∞ mají např. funkce: $f: y = -x^3$, $g: y = -2x + 3$, …

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ $-\infty$ NEVLASTNÍ LIMITU ∞, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU K EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x < x_0$ PLATÍ $f(x) > K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Stručný zápis definice: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) > K$.

Příklad: Nevlastní limitu ∞ v nevlastním bodě $-\infty$ mají např. funkce: $f: y = x^2$, $g: y = -x^3$, …

FUNKCE f MÁ V NEVLASTNÍM BODĚ $-\infty$ NEVLASTNÍ LIMITU $-\infty$, JESTLIŽE K LIBOVOLNĚ ZVOLENÉMU KLADNÉMU ČÍSLU K EXISTUJE TAKOVÝ BOD x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x < x_0$ PLATÍ $f(x) < K$. TUTO SKUTEČNOST ZAPISUJEME ZÁPISEM $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Stručný zápis definice: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists x_0 : \forall x < x_0 \Rightarrow f(x) < K$.

Příklad: Nevlastní limitu $-\infty$ v nevlastním bodě $-\infty$ mají např. funkce: $f : y = -x^2$, $g : y = x + 5$, …

1.2.2 Neurčité výrazy

Při výpočtu limit se můžeme často setkat s tzv. **neurčitými výrazy**. Název *neurčitý výraz* zde není zcela přesně na místě, protože limita je definována přesně a korektně a není na ní nic neurčitého. Název je ale natolik vžitý, že nemá smysl ho měnit. Neurčité výrazy, tedy výrazy, které není možné počítat přímým výpočtem, jsou tyto výrazy: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞ , ∞^0 , 0^0 .

Limity, v nichž se vyskytnou neurčité výrazy, je nutné počítat s využitím nějaké fintou (rozšířením, zkrácením problematického členu, ...).

Vlastnosti limit - např. počítání s limitami (limita součtu, limita rozdílu, …), které byly uvedeny pro vlastní limity ve vlastních bodech v odstavci 1.2.1.1, platí i pro nevlastní limity v nevlastních bodech, pouze s výjimkou neurčitých výrazů.

1.2.3 Důležité limity

Některé limity se vyskytují při výpočtu složitějších úloh velmi často a proto je vhodné je umět rychle a správně aplikovat. Hodnoty těchto limit je v některých případech také vyčíst z grafu dané funkce.

Hodnoty limit v nevlastních bodech (tj. limity pro x blížící se k $\pm\infty$) je možné intuitivně uhodnout, pokud dobře známe průběh grafu dané funkce. Místo „x se blíží k $\pm\infty$ “ si lze říct „pro hodně velká x“ resp. „hodně velká záporná x“. Analogicky lze u limit pro x blížící se k nule používat zjednodušení „pro maličká x“.

Důležité limity tedy jsou:

$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\mathrm{n}}} = 0$; $n\in\mathbb{N}$	$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ neexistuje

pro $a \in (0;1)$

$\lim_{x\to-\infty} a^{\mathrm{x}} = \infty$	$\lim_{x\to\infty} a^{\mathrm{x}} = 0$	$\lim_{x\to0^+} \log_{\mathrm{a}} x = \infty$	$\lim_{x\to\infty} \log_{\mathrm{a}} x = -\infty$

pro $a \in (1;\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} a^{\mathrm{x}} = 0$	$\lim_{x\to\infty} a^{\mathrm{x}} = \infty$	$\lim_{x\to0^+} \log_{\mathrm{a}} x = -\infty$	$\lim_{x\to\infty} \log_{\mathrm{a}} x = \infty$

$\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x\to-\infty} \sin x$ neexistuje	$\lim_{x\to\infty} \cos x$ neexistuje	$\lim_{x\to-\infty} \cos x$ neexistuje
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \mathrm{tg}\, x = \infty$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \mathrm{tg}\, x = -\infty$	$\lim_{x\to0^-} \mathrm{cotg}\, x = -\infty$	$\lim_{x\to0^+} \mathrm{cotg}\, x = \infty$
$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{e^{\mathrm{x}}-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Při výpočtu limit je vždy doporučeno postupovat dle následujícího postupu:

1. limita ve vlastním bodě a - vede-li výpočet po dosazení příslušného a k neurčitému výrazu $\frac{0}{0}$, je nutné pomocí algebraických úprav výraz v čitateli i ve jmenovateli vyjádřit jako součin několika činitelů, z nichž jeden je ten, který způsobuje výsledný součin nulový - tj. činitel $x-a$. Krácením zlomku tímto činitelem, obejdeme neurčitý výraz. Skutečnost, že krátit jde, nás nemusí překvapovat. V definici limit se vždy objevuje prstencové okolí příslušného bodu a. **Pozor!** I limita ve vlastním bodě může být nevlastní, tj. může vyjít $\pm\infty$.

Prstencové okolí bodu a znamená, že jsme „strašlivě blízko bodu a, ale nikdy ne přímo v něm“. Proto můžeme činitelem $x-a$ celý zlomek dělit.

2. limita v nevlastním bodě - neobsahuje-li zadání úlohy zlomek, je možné přímo dopočítat danou limitu. Je-li zadání ve formě zlomku, pak se doporučuje v čitateli i jmenovateli vytknout nejvyšší mocninu neznámé (v čitateli a jmenovateli přitom není nutné vytýkat tutéž mocninu). Po vytknutí je možné ve zlomku krátit a poté již opět limitu dopočítat.

V případě výpočtu limit v nevlastním bodě není možné dosazovat přímo znak pro nekonečno, ale je možné dosazovat pouze v hlavě „strašně velká čísla“.

Příklad: Vypočtěte $\lim_{x\to2}\frac{(x^2+x-6)(x^4-16)}{(x^2-4x+4)(x^2-9)}$.

Řešení: Zadaná limita je typu $\frac{0}{0}$, tedy jeden z neurčitých výrazů. Postupnými algebraickými úpravami proto upravíme zadanou limitu do tvaru, do kterého je možné dosadit:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+x-6\right)\left(x^4-16\right)}{\left(x^2-4x+4\right)\left(x^2-9\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{(x-2)^2(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\left(x^2+4\right)}{(x-3)}=\frac{(2+2)\left(2^2+4\right)}{(2-3)}=\frac{4.8}{-1}=-32\,.$$

Dosazovat do zadané funkce konkrétní bod, ve kterém limitu počítáme, je možné až poté, co jsme odstranili neurčité výrazy. Jakmile dosadíme konkrétní bod, nepíšeme již před funkci *lim*.

Příklad: Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-4x-6}{x^4+5x^2+4}$.

Řešení: Přesně podle výše uvedeného návodu dostaneme:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x^2-4x-6}{x^4+5x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}\right)}{x^4\left(1+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^4}\right)}=\frac{1+0-0-0}{\lim\limits_{x\to-\infty}x.(1+0+0)}=0$$

Z tohoto příkladu je vidět, že u výpočtu limity podílu dvou polynomů v nevlastním bodě závisí výsledek pouze na stupni polynomu v čitateli a stupni polynomu ve jmenovateli.

1.2.4 Užití limity funkce

1.2.4.1 Asymptoty grafu funkce

Pojem asymptota byl uveden při probírání učiva o hyperbole, jakožto zvláštní případ přímky, která nemá s hyperbolou žádný společný žádný bod. S asymptotami se ale setkáváme v matematice nejen u hyperbol (což obecně nemusí být funkce), ale i u funkcí: lineárně lomená (rovnoosá hyperbola), exponenciální, logaritmická, funkce tangens a kotangens, … Později uvidíme, že znalost asymptoty funkce je velmi důležitá pro správné sestrojení grafu funkce: vlastnosti funkce v nevlastních bodech a v okolí bodů, v nichž funkce není definovaná, velmi úzce souvisí s asymptotami funkce. Jsou pochopitelně i funkce, které asymptoty nemají (sinus, kosinus, kvadratická funkce, …).

Existují dva druhy asymptot:

1. asymptoty se směrnicí - jsou to přímky, které mají rovnici $y=ax+b$, kde $a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $b\in\mathbb{R}$, a jsou to asymptoty funkce v nevlastních bodech;
2. asymptoty bez směrnice - jsou přímky ve tvaru $x=c$, kde $c\in\mathbb{R}$, a jsou to asymptoty funkce v takových bodech *c*, v nichž není funkce definována.

1.2.4.1.1 ASYMPTOTY SE SMĚRNICÍ

Ilustrační příklad: V analytické geometrii kvadratických útvarů v rovině byla probrána hyperbola. Uvažme nyní hyperbolu $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Jedná se hyperbolu, která má střed v počátku soustavy souřadnic a jejíž hlavní osa je totožná s osou *y* (viz obr. 11). Na základě znalosti z analytické geometrie víme, že tato hyperbola má dvě asymptoty dané rovnicemi: $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Jde tedy o příklad asymptot se směrnicí, přestože **UVEDENÁ HYPERBOLA NENÍ FUNKCE**.

PŘÍMKA $y=ax+b$ SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA SE SMĚRNICÍ GRAFU FUNKCE f, JESTLIŽE

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0 \tag{1}$$

RESP.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0\,. \tag{2}$$

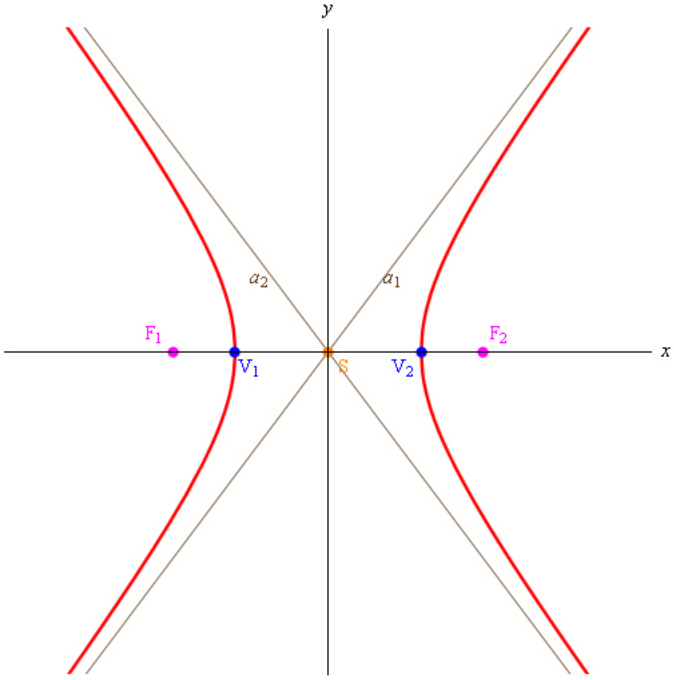
Definice plně odpovídá intuitivní představě, že asymptota je přímka, která nemá s grafem funkce společný žádný bod, pouze se ke grafu „přimykává a dotkne se ho až v nekonečnu“.

Představíme-li si pohyb dvou mravenců, z nichž jeden půjde do nekonečna po hyperbole zobrazené na obr. 11 a druhý půjde do nekonečně po její asymptotě, půjdou od jistého bodu téměř po stejné čáře - po asymptotě.

Výpočet koeficientů a a b, které určují příslušnou asymptotu, je možné provést na základě definice asymptoty a úpravou definičního vztahu např. (1). Pokud totiž platí vztah (1), tím spíše bude platit

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0\,. \qquad (3)$$

Vydělíme-li velkým číslem výraz, který se rovnal nule, bude výsledek opět nulový.



obr. 11

Vztah (3) je možné dále upravit: $0=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-a-0\,.$

Odtud snadnou algebraickou úpravou získáme

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,. \qquad (4)$$

Podobným způsobem je možné nyní odvodit ze vtahu (1) vztah pro výpočet koeficientu b:

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right). \qquad (5)$$

Analogicky lze odvodit příslušné vztahy pro koeficienty a a b asymptoty z definičního vztahu (2) asymptoty.

Vyjdou analogické vztahy jen místo limity v nevlastním bodě ∞ budeme počítat tytéž vztahy v nevlastním bodě $-\infty$.

Asymptota vycházející z definičního vztahu (1) a asymptota vycházející z definičního vztahu (2) nejsou obecně stejné asymptoty.

<u>VĚTA:</u> PŘÍMKA POPSANÁ ROVNICÍ $y=ax+b$ JE ASYMPTOTOU SE SMĚRNICÍ GRAFU FUNKCE f PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ EXISTUJÍ LIMITY $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ A $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$ RESP. $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ A $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)$.

Asymptota není obecně přímka, která se pouze „přibližuje“ ke grafu funkce, ale nikde jí neprotne. Asymptota může graf funkce protnout ve vlastním bodě - pro asymptotu je důležité, jak „se chová“ v nevlastních bodech.

1.2.4.1.2 <u>ASYMPTOTY BEZ SMĚRNICE</u>

Asymptoty bez směrnice jsou přímky rovnoběžné s osou y, které neprotínají graf funkce.

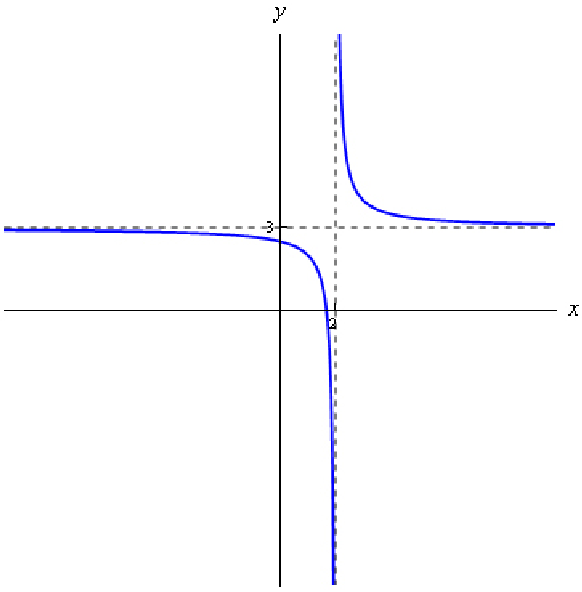
Pokud by asymptota bez směrnice protínala křivku v grafu, pak by tato křivka nebyla grafickým vyjádřením funkce.

Asymptota bez směrnice **NESMÍ PROTNOUT GRAF FUNKCE V ŽÁDNÉM BODĚ**. Asymptota se směrnicí (viz odstavec 1.2.4.1.1) může graf funkce protnout ve vlastním bodě - v nevlastním bodě $\pm\infty$ se k němu pak jen přibližuje.

NECHŤ JE FUNKCE f DEFINOVÁNA V PRSTENCOVÉM OKOLÍ BODU c (TJ. V MNOŽINĚ $U(c,\delta)-\{c\}$). PŘÍMKA DANÁ ROVNICÍ $x=c$ SE NAZÝVÁ ASYMPTOTA BEZ SMĚRNICE GRAFU FUNKCE f, PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ MÁ FUNKCE f V BODĚ c ASPOŇ JEDNU JEDNOSTRANNOU NEVLASTNÍ LIMITU.

Ve shodě s definicí hledáme asymptoty bez směrnice u funkcí, u kterých existují body, v nichž není daná funkce definovaná. V jiných bodech asymptota bez směrnice neexistuje. Proto stačí vyšetřovat jednostranné limity pouze v bodech, v nichž není daná funkce definována.

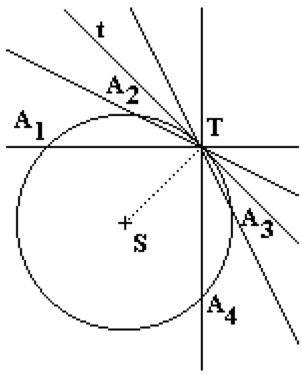
Asymptotu bez směrnice má např. funkce $f: y=\dfrac{1}{x-2}+3$ v bodě $x=2$. Asymptotou se směrnicí (která je v tomto případě rovna nule) je přímka $y=3$ - viz obr. 12.



obr. 12

1.2.4.2 <u>Tečna grafu funkce</u>

V analytické geometrii byla probrána kružnice a její vzájemná poloha s přímkou. Jednou z možných poloh přímky a kružnice byla tečna ke kružnici, která byla definována jako přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod (bod dotyku *T*) a která je kolmá na spojnici středu a tohoto dotykového bodu *T*. Prochází-li přímka dvěma různými body *T* a *A* kružnice, jedná se o sečnu. Čím blíže zvolíme bod *A* k bodu *T*, tím méně se liší poloha sečny *TA* od tečny *t* kružnice v bodě *T*. Říkáme, že tečna *t* je mezní (limitní) polohou sečny *TA*, blíží-li se bod *A* po kružnici k bodu *T* (viz obr. 13).



obr. 13

Při hledání tečny v daném bodě funkce *f* bude postup analogický s tím, že využijeme znalost limit pro nalezení mezního případu sečny grafu funkce, tj. nalezení tečny.

Vyšetřování tečny k dané křivce (resp. ke grafu funkce *f*) má velké použití v aplikačních předmětech (fyzika, mechanika, elektrotechnika, …): pomocí tečny lze linearizovat takové průběhy závislostí fyzikálních veličin, které podle teorie lineární být mají. Při měření pak vznikají vždy různé chyby, které linearitu závislosti porušují. Přesto je ale vhodné nalézt lineární průběh takových závislostí. A při hledání této linearizované závislosti je občas výše uvedený postup vhodný.

Pokud chceme napsat rovnici tečny *t* ve tvaru

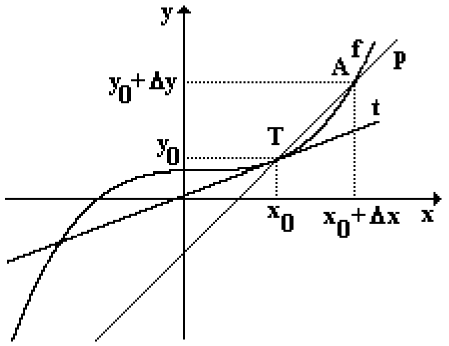
$$y = kx + q \tag{6}$$

v bodě $T = [x_0; y_0]$ funkce *f*, zvolíme na grafu funkce *f* ještě jeden bod $A = [x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y]$ (viz obr. 14). Body *A* a *T* je určena přímka *p*, která je sečnou grafu funkce *f*. Chceme-li napsat tečnu grafu funkce v bodě *T*, stačí si uvědomit, že pro zmenšující se přírůstek *x*-ové souřadnice Δx (tj. pro případ $\Delta x \to 0$) se bod *A* přibližuje k bodu *T* a tudíž se sečna *p* blíží tečně *t*.

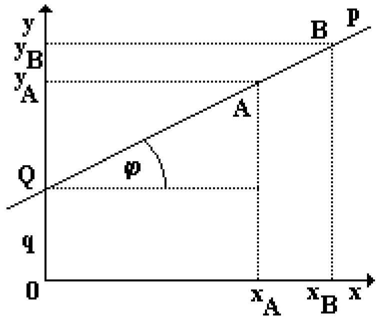
Při výkladu směrnice přímky (analytická geometrie lineárních útvarů v rovině), jsme zjistili, že směrnici *k* přímky lze vypočítat na základě následující úvahy: Nechť dva různé body $A = [x_A; y_A]$ a $B = [x_B; y_B]$ leží na přímce *p*, jejíž rovnice má směrnicový tvar (6) (viz obr. 15). Pro souřadnice uvedených bodů podle rovnice (6) platí: $y_A = kx_A + q$ a $y_B = kx_B + q$. Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic pro neznámé *k* a *q*. Po provedených úpravách pro směrnici *k* dostáváme:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (7)$$

Směrnici *k* jsme tedy vyjádřili pomocí rozdílu souřadnic dvou bodů, které na dané přímce leží.



obr. 14



obr. 15

Analogicky je možné postupovat v případě, že chceme nalézt směrnici tečny grafu funkce na obr. 14. Směrnici k_t tečny *t* tedy můžeme určit jako limitní případ směrnice k_s sečny (přímka *p*), tj. musí platit:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s. \qquad (8)$$

Přitom na základě právě připomenuté znalosti o směrnici přímky je možné směrnici k_s psát ve tvaru podle vztahu (7): $k_s = \frac{y_0 + \Delta y - y_0}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dostaneme tedy:

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (9)$$

Přeznačíme-li souřadnice bodů *T* a *A* z obr. 14 na souřadnice $T = [x_0; f(x_0)]$ a $A = [x; f(x)]$, je možné psát vztah (9) ve tvaru

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (10)$$

Nyní je už možné napsat rovnici tečny v bodě $T = [x_0; y_0]$, neboť máme k dispozici její směrnici k_t a víme, že na této tečně leží kromě bodu *T* ještě libovolný bod $X = [x; y]$, jehož souřadnice musí splňovat vztah

$$k_t = \frac{y - y_0}{x - x_0}. \qquad (11)$$

Rovnici tečny *t* tedy můžeme psát ve tvaru $y - y_0 = k_t(x - x_0)$ a tedy

$$y = k_t(x - x_0) + y_0. \qquad (12)$$

Je-li křivka grafem funkce $y = f(x)$ a existuje-li v bodě x_0 vlastní limita (10), pak tečna křivky v bodě $T = [x_0; y_0]$ je přímka daná rovnicí (12).

S využitím derivace funkce lze napsat rovnici tečny ke grafu dané funkce pohodlněji (viz odstavec 1.4.2).

1.3 <u>Spojitost funkce</u>

Mezi všemi funkcemi, s nimiž se postupně seznamujeme, mají velký význam funkce spojité. Zhruba řečeno, spojitá funkce je funkce, jejíž graf lze nakreslit jedním tahem.

Při kreslení dané funkce na jejím definičním oboru tedy nesmíme zvednout tužku od papíru (křídu resp. fixu od tabule, …) - musíme graf nakreslit jedním tahem.

Toto intuitivní tvrzení se ale opírá o geometrickou představu, která není u všech funkcí přístupná resp. použitelná. Proto je třeba tento intuitivní náhled zpřesnit tak, jak se o to snažili matematikové během historického vývoje matematiky.

1.3.1 Spojitost v bodě a v intervalu

FUNKCE f SE NAZÝVÁ SPOJITÁ V BODĚ a, JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:

1. FUNKCE f JE V BODĚ a DEFINOVANÁ;

2. EXISTUJE VLASTNÍ LIMITA $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;

3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ a JE ROVNA VLASTNÍ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, TJ. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Bod 2 v uvedené definici mluví o existenci limity, tedy v daném bodě a musí existovat oboustranná vlastní limita.

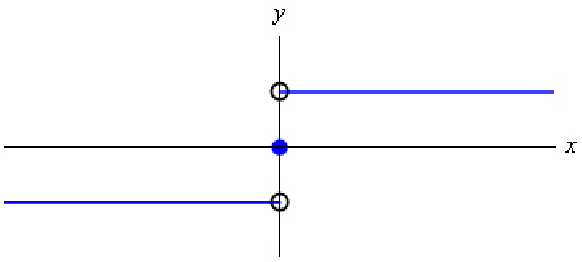
Tak jako jednostranné limity (viz odstavec 1.2.1.2) překračují většinou běžné učivo středoškolské matematiky, tak i následující definice spojitosti funkce v daném bodě zprava resp. zleva nejsou předmětem běžného středoškolského kurzu matematiky.

FUNKCE f SE NAZÝVÁ SPOJITÁ ZPRAVA (RESP. ZLEVA) V BODĚ a, JESTLIŽE JSOU SOUČASNĚ SPLNĚNY TYTO PODMÍNKY:

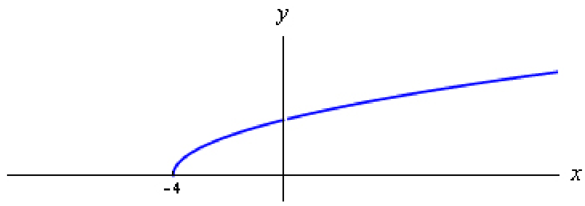
1. FUNKCE f JE V BODĚ a DEFINOVANÁ;

2. EXISTUJE VLASTNÍ JEDNOSTRANNÁ LIMITA $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (RESP. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$);

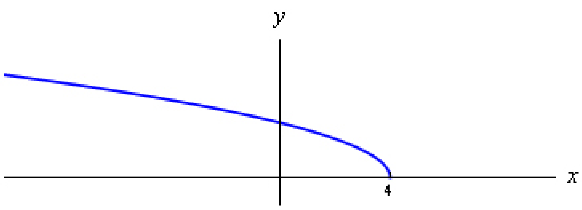
3. FUNKČNÍ HODNOTA V BODĚ a JE ROVNA VLASTNÍ JEDNOSTRANNÉ LIMITĚ V TOMTO BODĚ, TJ. $f(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (RESP. $f(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$).



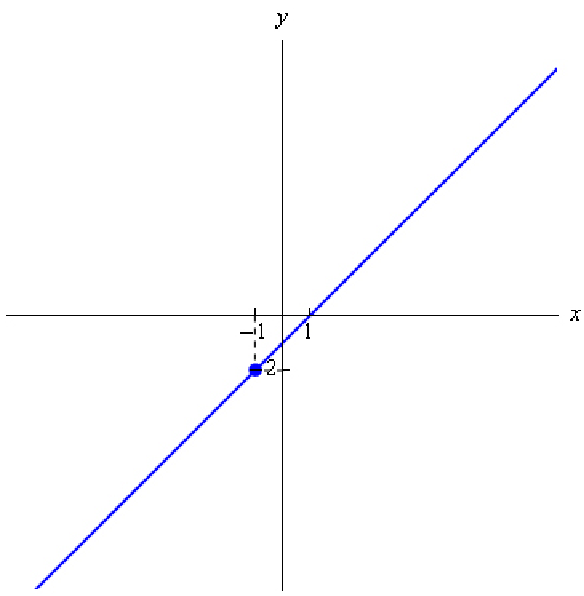
obr. 16



obr. 17



obr. 18



obr. 19

Máme-li nadefinovanou spojitost funkce v bodě, můžeme definici rozšířit na otevřený interval.

FUNKCE f JE SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU $(a; b)$, JE-LI SPOJITÁ V KAŽDÉM BODĚ TOHOTO INTERVALU.

V uzavřeném intervalu lze spojitost funkce definovat také.

FUNKCE f JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b\rangle$, JE-LI SPOJITÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU $(a; b)$ A V BODĚ a JE SPOJITÁ ZPRAVA A V BODĚ b JE SPOJITÁ ZLEVA.

Na obr. 16 je znázorněn graf funkce $f: y = \operatorname{sgn} x$, která je příkladem funkce nespojité v jednom bodě - v bodě $x = 0$. Funkce $g: y = \sqrt{x+4}$, jejíž graf je zobrazen na obr. 17, má definiční obor $D(g) = \langle -4; \infty)$ a je tedy spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu $(-4; \infty)$. V bodě $x = -4$ je spojitá pouze zprava, neboť v levém okolí bodu $x = -4$ není funkce g definována. Analogická je situace u funkce $h: y = \sqrt{-x+4}$, jejíž definiční obor je $D(h) = (-\infty; 4\rangle$ a jejíž graf je zobrazen na obr. 18. Tato funkce je spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu $(-\infty; 4)$ a v bodě $x = 4$ je spojitá jen zleva.

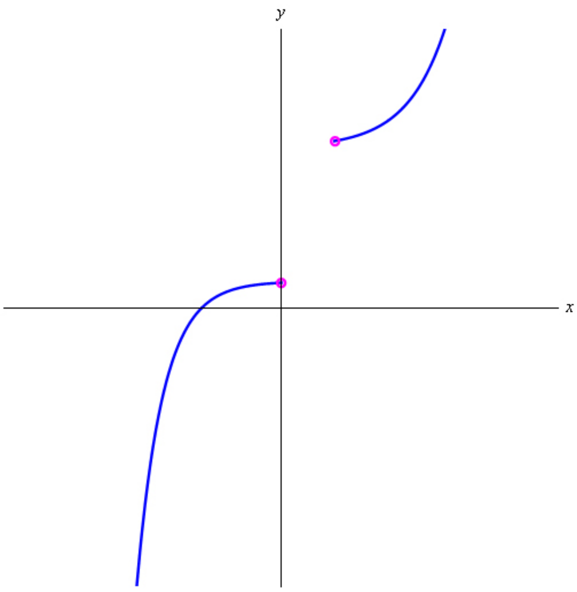
Funkce, které nejsou spojité, nemají ale body nespojitosti vždy stejného druhu. Existují funkce, které nejsou v určitém bodě spojité (protože v daném bodě např. nejsou definovány), ale které je možné dodefinovat tak, aby v daném bodě a tedy i na svém definičním oboru (resp. na množině reálných čísel) spojité byly. Takovou funkcí je např. funkce $m: y = \frac{x^2-1}{x+1}$, jejíž definiční obor je $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Na tomto definičním oboru je možné ale předpis funkce m upravit do tvaru: $\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$. Získaná funkce $n: y = x-1$ má sice stejný definiční obor jako funkce *m*, ale je možné ji v kritickém bodě $x = -1$ dodefinovat přirozeným způsobem: $n(-1) = -1-1 = -2$. Získali jsme tak spojitou funkci, jejíž graf je na obr. 19.

Na rozdíl od toho např. funkci $f: y = \operatorname{sgn} x$ (jejíž graf je na obr. 16) nelze žádným způsobem dodefinovat tak, aby byla spojitá.

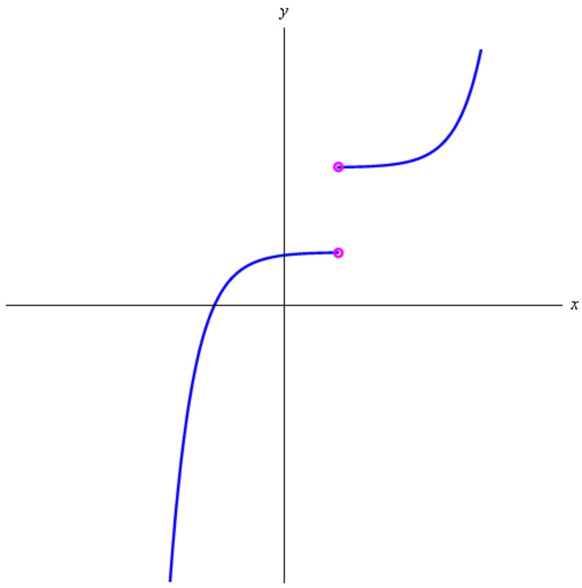
Další příklady funkcí, které nelze dodefinovat v bodech nespojitosti tak, aby byly v těchto bodech spojité, jsou zobrazeny na obr. 20 a obr. 21.

<u>**VĚTA:**</u> **VŠECHNY ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ VE SVÝCH DEFINIČNÍCH OBORECH.**

To znamená, že jsou spojité polynomické funkce, goniometrické funkce, exponenciální funkce, mocninné funkce, logaritmické funkce, … (viz odstavec 1.1).



obr. 20



obr. 21

1.3.2 <u>Spojité funkce na uzavřených intervalech</u>

Zvláštní pozornost je věnována v matematické analýze spojitým funkcím na uzavřených intervalech. Spojité funkce totiž mají takové vlastnosti, na základě kterých se s nimi snáze pracuje. Pokud se omezíme na uzavřený interval, mají spojité funkce na tomto intervalu maximum a minimum, což je výhodné zejména pro aplikace matematiky.

<u>**WEIERSTRASSOVA VĚTA:**</u> **JE-LI FUNKCE f SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b\rangle$, EXISTUJE ALESPOŇ JEDEN TAKOVÝ BOD $x_1 \in \langle a; b\rangle$, ŽE $\forall x \in \langle a; b\rangle : f(x) \le f(x_1)$, A ALESPOŇ JEDEN TAKOVÝ BOD $x_2 \in \langle a; b\rangle$, ŽE $\forall x \in \langle a; b\rangle : f(x) \ge f(x_2)$.**

Uvedenou větu lze formulovat také tak, že funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ nabývá v tomto intervalu alespoň v jednom bodě svého maxima a alespoň v jednom bodě minima.

I kdyby se jednalo např. o lineární funkci, která na svém definičním oboru (reálná čísla) nemá maximum ani minimum, na uzavřeném intervalu extrémy má. V tomto případě by maximum a minimum funkce bylo v krajních bodech uvažovaného intervalu. Proto je důležité, aby se jednalo o **UZAVŘENÝ** interval, do nějž krajní body patří. Pro otevřený interval uvedená věta neplatí.

Stejně tak je důležitý předpoklad o spojitosti funkce. Maximum a minimum např. funkce $f: y = \frac{1}{x}$ na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ neexistuje, protože v bodě 0 má funkce *f* jednostranné nevlastní limity (viz odstavec 1.2.1.3) - tj. funkční hodnoty „utíkají do nekonečna" a neexistuje tedy nejvyšší resp. nejnižší funkční hodnota.

<u>VĚTA:</u> FUNKCE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b \rangle$ JE V TOMTO INTERVALU OMEZENÁ.

<u>Příklad:</u> Omezené funkce jsou např. funkce: $f: y = \cos x$ v intervalu $\left\langle -\frac{3}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi \right\rangle$, $g: y = x^2$ v intervalu $\langle -3; 2 \rangle$, …

Ačkoliv je funkce *g* omezená jen zdola, pokud omezíme její vyšetřování na uzavřený interval, omezíme tím i její průběh. Proto je funkce *g* na uzavřeném intervalu omezená - přes nejvyšší funkční hodnotu na daném intervalu (v tomto případě přes hodnotu $g(-3) = 9$) nás chování funkce prostě nezajímá.

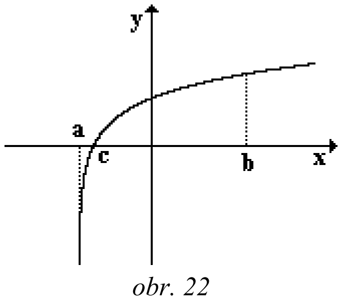
<u>BOLZANOVA - WEIERSTRASSOVA VĚTA:</u> JE-LI FUNKCE f SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b \rangle$ A JE-LI $f(a) \neq f(b)$, POTOM KE KAŽDÉMU ČÍSLU K, KTERÉ LEŽÍ MEZI ČÍSLY $f(a)$ A $f(b)$, EXISTUJE ALESPOŇ JEDEN TAKOVÝ BOD $c \in (a; b)$, ŽE PLATÍ $f(c) = K$.

Uvedené větě se někdy též říká věta o nabývání mezihodnot, protože podle ní funkce *f* nabývá všech hodnot mezi funkčními hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. **<u>Pozor!</u>** Tato věta platí pouze pro spojité funkce.

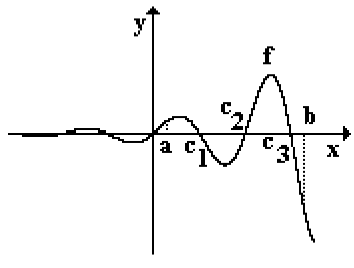
Pro praktické použití je ale důležitý důsledek právě uvedené věty, na základě něhož je možné řešit řadu problémů z oblasti rovnic a nerovnic.

<u>DŮSLEDEK BOLZANOVY - WEIERSTRASSOVY VĚTY:</u> JE-LI FUNKCE f SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b \rangle$ A MAJÍ-LI ČÍSLA $f(a)$ A $f(b)$ RŮZNÁ ZNAMÉNKA (TJ. PLATÍ-LI $f(a).f(b) < 0$), POTOM EXISTUJE ALESPOŇ JEDEN TAKOVÝ BOD $c \in (a; b)$, PRO KTERÝ PLATÍ $f(c) = 0$.

Věta hovoří o existenci alespoň jednoho bodu, který má dané vlastnosti. To znamená, že tento bod může být jeden (viz obr. 22) nebo takových bodů může být více (viz obr. 23). Z obrázků (i z uvedené věty) je patrné, že funkce *f* mění v okolí bodu *c* znaménko, čehož se využívá při přibližném řešení rovnic a nerovnic.



obr. 22



obr. 23

1.4 <u>Derivace funkce</u>

Derivace funkce patří spolu s limitami k nejdůležitějším závěrům infinitezimálního počtu. Na základě derivace funkce je možné vyšetřovat nejen průběh funkcí v matematice (viz odstavec 1.7), ale i řešit řadu příkladů z technické praxe. Derivace totiž umožňuje popsat průběh veličin, které se mění v závislosti na jiných veličinách (např. uražená dráha v závislosti na čase - viz odstavec 1.4.1).

1.4.1 <u>Fyzikální význam derivace</u>

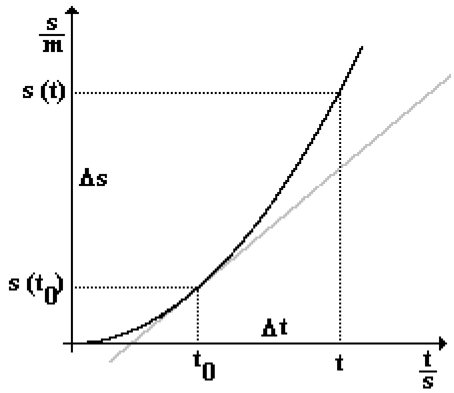
V odstavci 1.2.4.2 jsme v souvislosti s určením rovnice tečny grafu funkce v jejím bodě $T = [x_0; y_0]$ vyšetřovali limitu (10). Tuto limitu jsme psali ve tvaru

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{13}$$

Tato limita má geometrickou interpretaci: udává směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě $T = [x_0; y_0]$.

S limitou ve tvaru (13) je možné se setkat nejen v matematice, ale i ve fyzice. Uvažujme pohyb hmotného bodu, u kterého budeme měřit čas *t* jeho pohybu a zároveň sledovat závislost $s(t)$ uražené dráhy od okamžiku začátku měření, tj. od okamžiku $t = 0\ s$. Graf závislosti uražené dráhy na čase je zobrazen na obr. 24. Za čas $\Delta t = t - t_0$ urazil hmotný bod dráhu délky $\Delta s = s(t) - s(t_0)$. Na základě těchto údajů je možné určit **velikost průměrné rychlosti** v_p v uvažovaném časovém intervalu $\langle t_0; t_0 + \Delta t\rangle$. Dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \qquad (14)$$



obr. 24

Velikost průměrné rychlosti bude vypovídat o velikosti rychlosti v čase t_0 tím přesněji, čím menší bude přírůstek času Δt, na kterém pohyb hmotného bodu vyšetřujeme. Na základě znalostí limit tedy můžeme **velikost okamžité rychlosti** *v* v čase t_0 definovat vztahem

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \qquad (15)$$

Velikost okamžité rychlosti, kterou udává např. tachometr v automobilu nebo cyklocomputer při jízdě na kole, je vlastně velikost průměrné rychlosti měřené na velmi malém časovém (a tedy i dráhovém) intervalu. U cyklocomputeru je to přímo vidět: velikost okamžité rychlosti je velikost průměrné rychlosti na dráze rovné obvodu předního kola, v jehož výpletu je umístěn snímač měřící velikost rychlosti.

Ve shodě s odstavcem 1.2.4.2 tedy můžeme říci, že velikost okamžité rychlosti pohybu hmotného bodu v daném čase t_0 získáme jako směrnici tečny, kterou bychom v příslušném bodě vedli ke grafu závislosti uražené dráhy na čase.

Srovnáme-li totiž vztahy (13) a (15), je zřejmé, že jsou formálně stejné - liší se jen v názvech použitých funkcí a proměnných.

Jak je vidět, v právě uvedeném příkladu jsme pracovali s limitou typu $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, tj. s limitou podílu přírůstku funkce a přírůstku nezávislé proměnné. Tato limita a postup z právě uvedeného příkladu o pohybu hmotného bodu mají v matematice zásadní význam. Proto má limita $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ své vlastní označení a název: derivace funkce (viz odstavec 1.4.2).

1.4.2 Definice derivace

Nechť funkce f je definovaná v jistém okolí bodu x_0. Existuje-li limita $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0. Značí se $f'(x_0)$.

V definici se nemluví o tom, jestli musí existovat vlastní nebo nevlastní limita. Důležité je, aby limita vůbec existovala. Derivace pak může být vlastní i nevlastní, i když s nevlastní derivací se příliš často ve středoškolské matematice nesetkáme.

Vzhledem k tomu, že $\Delta x = x - x_0$ je možné derivaci funkce *f* psát ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (16)$$

Symbolem $f'(x_0)$ resp. symbolem $y'(x_0)$ se značí derivace funkce *f* podle proměnné *x*.

Vzhledem k tomu, že teorie funkcí v matematice pracuje téměř výhradně s proměnnou *x*, nebylo by nutné další značení zavádět. Ale protože derivace je velmi důležitá operace s funkcemi pro aplikační předměty, je nutné si uvědomit, znát a chápat další způsoby značení derivace funkce. Naprosto exaktně správně by se měla derivace funkce *f* v bodě x_0 podle proměnné *x* značit symbolem $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ (resp. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$), který připomíná souvislost derivace s podílem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ podle vztahu (16).

Podrobnější vysvětlení je uvedeno v odstavci 1.5, v němž je definován diferenciál funkce.

Ve fyzice a dalších aplikačních předmětech se velmi často vyšetřují průběhy fyzikálních veličin v závislosti na čase (viz motivační příklad v odstavci 1.4.1). Proto se používá pro derivaci dané fyzikální závislosti *y* pode času *t* zvláštní označení: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}$ (nad příslušnou funkci se dělá tečka).

Shrnuto: čárkou nad názvem funkce se značí vždy derivace podle proměnné *x*, tečkou nad názvem funkce se značí vždy derivace podle času *t*. V ostatních případech (derivace funkce *f* podle náboje *Q*, podle elektrického proudu *I*, …) je nutné použít značení pomocí „zlomku“ (tj. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}Q}$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}I}$, …).

Srovnáme-li definiční vztah derivace, tj. vztah (16), se vztahem (10) pro směrnici tečny grafu funkce v jejím bodě $T = [x_0; y_0]$ z odstavce 1.2.4.2, zjistíme, že oba výrazy jsou totožné. Na základě toho je tedy možné říci, že **derivace funkce v bodě** $T = [x_0; y_0]$ **je směrnicí tečny** grafu funkce v uvedeném bodě. Rovnici tečny grafu funkce v jejím bodě $T = [x_0; y_0]$ je možné na základě právě uvedeného psát ve tvaru

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0), \qquad (17)$$

který je totožný se vztahem (12). Vztah (17) je ale pro praktické použití výhodnější, neboť dává návod na výpočet směrnice tečny.

Směrnici tečny v daném bodě určíme tak, že zadanou funkci zderivujeme a do zderivovaného vztahu dosadíme za *x* konkrétní bod x_0, v němž tečnu máme nalézt.

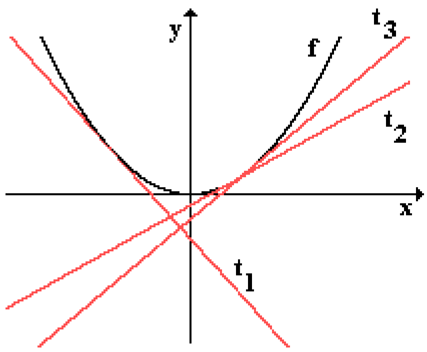
Výpočet derivace lze provádět přímo s využitím definice derivace, tj. s využitím vztahu (16).

Příklad: Vypočtěte derivaci funkce $f: y = x^2$ v bodě $x_0 \in D(f)$.

Řešení: Vzhledem k tomu, že $D(f) = \mathbb{R}$, budeme hledat derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Na základě definice derivace (vztah (16)) je možné psát:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Za x_0 je možné volit libovolný bod z definičního oboru, čímž dostaneme hodnoty derivace v různých bodech. To znamená, že tečny sestrojené v různých bodech grafu funkce $f: y = x^2$ mají různou směrnici (viz obr. 25).



obr. 25

Podobným způsobem je možné odvodit ze znalostí výpočtu limit derivace libovolné funkce. V rámci urychlení a přehlednosti výpočtů ale existuje tabulka předem vypočítaných derivací elementárních funkcí (viz odstavec 1.4.5).

1.4.3 Derivace vyšších řádů

V příkladu na konci odstavce 1.4.2 byla vypočtena na základě definice derivace funkce (šlo o funkci $f: y = x^2$) v bodě $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$. Pokud ale nemáme na mysli konkrétní bod, v němž derivaci vyšetřujeme, je možné vyjádřit derivaci v libovolném bodě $x \in D(f)$ a psát (v tomto konkrétním případě) $f'(x) = 2x$. Na derivaci funkce v tomto tvaru lze tedy nahlížet jako na funkci proměnné *x*. Bude-li mít funkce $y' = f'(x)$ opět derivaci (viz definice v odstavci 1.4.2), označíme ji y'' (resp. $y''(x)$ resp. $f''(x)$ resp. $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$) a nazýváme ji **druhou derivací funkce** $y = f(x)$.

Pozor! Symbol $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ je skutečně napsán dobře a dvojky jsou „umístěné“ na správných místech.

Analogicky lze zavést třetí derivaci funkce, čtvrtou derivaci funkce, pátou derivaci funkce, … Pro praktické účely (vyšetřování průběhů funkcí, fyzikální a technické aplikace, …) však většinou vystačíme se druhou derivací funkce.

1.4.4 Vlastnosti derivace

Derivaci v bodě (viz odstavec) lze rozšířit i na derivaci na otevřeném intervalu.

FUNKCE f MÁ V OTEVŘENÉM INTERVALU $(a;b)$ DERIVACI, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM VNITŘNÍM BODĚ TOHOTO INTERVALU, TJ. V LIBOVOLNÉM BODĚ $x \in (a;b)$.

Definovat derivaci v uzavřeném intervalu není nyní možné: v krajních bodech uzavřeného intervalu neexistuje limita (oboustranná limita), protože s bodem do daného intervalu nepatří i jeho okolí. Bylo by možné mluvit o pravém okolí počátečního bodu intervalu resp. levém okolí koncového bodu intervalu a v těchto bodech uvažovat jednostranné limity a jednostranné derivace.

Spojitost funkce (viz odstavec 1.3) souvisí s limitou funkce (viz odstavec 1.2) a derivace byla definována pomocí limit, proto spolu souvisí derivace funkce a spojitost funkce. O tom mluví důležitá věta matematické analýzy.

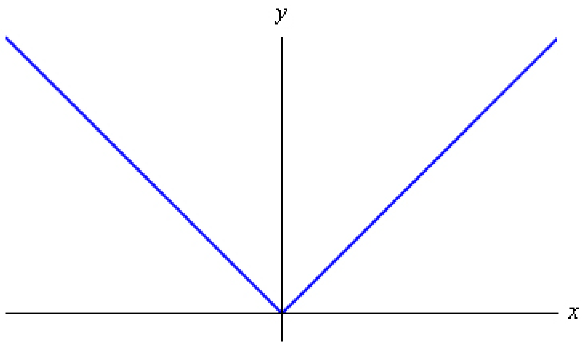
<u>VĚTA:</u> MÁ-LI FUNKCE f V BODĚ $x_0 \in D(f)$ DERIVACI, JE V TOMTO BODĚ SPOJITÁ.

<u>Pozor!!!</u> Obrácená věta neplatí. Tedy je-li funkce *f* v bodě $x_0 \in D(f)$ spojitá, nemusí mít v bodě x_0 derivaci. Jako příklad právě uvedeného tvrzení poslouží funkce $f: y = |x|$. Její definiční obor je $D(f) = \mathbb{R}$ a tato funkce je ve svém definičním oboru spojitá. V bodě $x_0 = 0$ ale nemá derivaci. Podle definice derivace pomocí vztahu (16) (viz odstavec 1.4.2) pro derivaci v bodě $x_0 = 0$ platí $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Tato limita ale neexistuje, protože limita zleva a limita zprava se nerovnají. Pro limitu zleva totiž platí $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$ a pro limitu v tomtéž bodě zprava platí $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

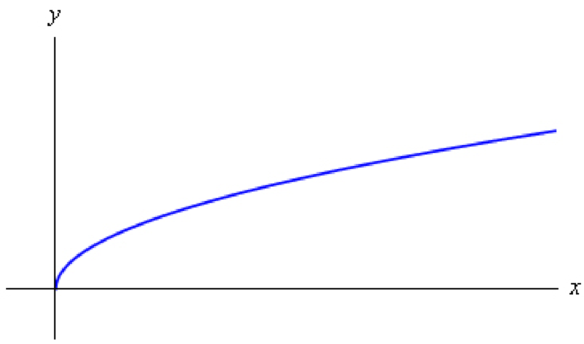
Neexistence derivace v daném bodě znamená i to, že v daném bodě nelze sestrojit tečnu k danému grafu funkce.

Tečna je přímka, která nahrazuje v okolí daného bodu graf funkce (tečna je přímka „přilepená v daném bodě ke grafu funkce“). V bodě 0 na grafu funkce $f: y = |x|$ (viz obr. 26) je ale „špička“ a tudíž tečnu nelze „dobře přilepit“ (na grafu funkce „se viklá“). Obecně tedy tečna (a tedy i derivace) neexistuje v těch bodech grafu funkce *f*, v nichž je sice funkce spojitá, ale graf tvoří v daném bodě „špičku“. A to je případ hlavně nulových bodů absolutních hodnot, které se vyskytnou v předpisu konkrétní funkce.

Dále je nutné dávat pozor na nulové body argumentů odmocnin - v nich je derivace také „problematická“.



obr. 26



obr. 27

Proto se zavádí (analogicky jako u limit) jednostranné derivace.

NECHŤ FUNKCE f JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU x_0. EXISTUJE-LI LIMITA $\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, NAZÝVÁME JI DERIVACÍ FUNKCE f V BODĚ x_0 ZLEVA. TATO DERIVACE SE ZNAČÍ $f'_-(x_0)$.

NECHŤ FUNKCE f JE DEFINOVANÁ V JISTÉM OKOLÍ BODU x_0. EXISTUJE-LI LIMITA $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, NAZÝVÁME JI DERIVACÍ FUNKCE f V BODĚ x_0 ZPRAVA. TATO DERIVACE SE ZNAČÍ $f'_+(x_0)$.

Definice jednostranných derivací (stejně jako definice derivace v odstavci 1.4.2) požaduje pouze existenci jednostranné limity. Nepožaduje, zda má být limita vlastní či nevlastní.

Podle toho pak bude i příslušná derivace funkce vlastní nebo nevlastní. Nevlastní jednostrannou derivaci má např. graf funkce $g: y = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 0$ (viz obr. 27): tečna grafu v tomto bodě je kolmá na osu x. Její směrnice je tedy nekonečná.

Na základě jednostranných derivací je možné zavést derivaci v uzavřeném intervalu (resp. v polouzavřeném intervalu či v polootevřeném intervalu).

FUNKCE f MÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b \rangle$ DERIVACI, JESTLIŽE MÁ DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ $x \in (a; b)$ A V BODĚ a MÁ DERIVACI ZPRAVA A V BODĚ b MÁ DERIVACI ZLEVA.

1.4.5 Derivace elementárních a složených funkcí

Jedním z předpokladů pro správné (a rychlé) využívání metod infinitezimálního počtu při řešení praktických úloh je dobrá znalost derivace elementárních funkcí a základní pravidla pro počítání derivací. K tomu slouží následující přehled funkcí a jejich derivací (viz tab. 1) a základních pravidel pro počítání s derivacemi, které je možné odvodit na základě definice derivace (viz vztah (16) v odstavci 1.4.2).

V tab. 1 jsou uvedeny elementární funkce, které mají derivace ve svých definičních oborech. V tabulce jsou též u daných funkcí uvedeny jejich primitivní funkce, které jsou zavedeny a vysvětleny v odstavci 2.2.

Funkce	**Derivace funkce**	**Primitivní funkce**
$y = k$; $k \in \mathbb{R}$	$y' = 0$	$F(x) = kx + C$; $C \in \mathbb{R}$
$y = x^{n}$ (x závisí na volbě n)	$y' = nx^{n-1}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $n \neq -1$; $C \in \mathbb{R}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$F(x) = -\cos x + C$; $C \in \mathbb{R}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$F(x) = \sin x + C$; $C \in \mathbb{R}$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$y = e^{x}$	$y' = e^{x}$	$F(x) = e^{x} + C$; $C \in \mathbb{R}$
$y = a^{x}$	$y' = a^{x}.\ln a$	$F(x) = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$; $C \in \mathbb{R}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log_{a} x$	$y' = \frac{1}{x.\ln a}$	

tab. 1

Hodnoty primitivních funkcí, které nejsou v tab. 1 uvedeny, lze dopočítat se znalostmi z integrálního počtu (viz odstavec 2.2.3) a je tedy zbytečné se je učit zpaměti.

Na základě jistých pravidel (která je možné odvodit pomocí definice derivace nebo pomocí vlastností limit) je možné též zavést derivaci součtu dvou funkcí, derivaci rozdílu dvou funkcí, derivaci součinu dvou funkcí a derivaci podílu dvou funkcí.

<u>VĚTA:</u> JESTLIŽE FUNKCE $u(x)$ A $v(x)$ MAJÍ DERIVACI V BODĚ x_0, MÁ V BODĚ x_0 DERIVACI I SOUČET, ROZDÍL A SOUČIN FUNKCÍ $u(x)$, $v(x)$ A PRO $v(x) \neq 0$ TAKÉ PODÍL $\frac{u(x)}{v(x)}$ A PLATÍ:

$$\left[u(x)+v(x)\right]' = u'(x)+v'(x), \tag{18}$$

$$\left[u(x)-v(x)\right]' = u'(x)-v'(x), \tag{19}$$

$$\left[u(x).v(x)\right]' = u'(x).v(x)+u(x).v'(x) \tag{20}$$

A

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}. \tag{21}$$

Dále je možné zavést derivaci složené funkce (viz odstavec 1.1).

<u>VĚTA:</u> JESTLIŽE FUNKCE $z = g(x)$ MÁ DERIVACI V BODĚ x_0 A JESTLIŽE FUNKCE $y = f(z)$ MÁ DERIVACI V BODĚ $z_0 = g(x_0)$, MÁ SLOŽENÁ FUNKCE $y = f(g(x))$ DERIVACI V BODĚ x_0 A PLATÍ

$$\left[f(g(x_0))\right]' = f'(g(x_0)).g'(x_0). \tag{22}$$

Na první pohled vypadá návod na derivaci složené funkce nepřehledně a složitě, ale složená funkce se derivuje tak, že se zderivuje funkce vnitřní a násobí se derivací funkce vnější. Stejným způsobem se postupuje, je-li funkce složena z více funkcí.

Pro názornost konkrétní příklad.

<u>Příklad:</u> Určete derivaci funkce $h: y = \sin^3 2x$.

<u>Řešení:</u> Podle vztahu (22) můžeme psát: $\left(\sin^3 2x\right)' = \underbrace{3\sin^2 2x}_{\text{derivace } \alpha^3}.\underbrace{\cos 2x}_{\text{derivace } \sin\beta}.\underbrace{2}_{\text{derivace } 2x} = 6\sin^2 2x.\cos 2x$.

*1.5 <u>***Diferenciál funkce</u>*

Předpokládejme, že máme funkci *f*, jejíž graf je na obr. 28. Otázkou je, jak se změní hodnota funkce, přejdeme-li z bodu a do bodu $a+h$. Pokusíme se zjistit, zda přírůstek funkce $f(a+h)-f(a)$ není pro malé hodnoty *h* přibližně úměrný číslu *h*. Jinými slovy, zda existuje číslo *A* (nezávislé na *h*) takové, aby chyba, které se dopustíme, nahradíme-li rozdíl $f(a+h)-f(a)$ číslem $A.h$, byla malá. Malá chyba přitom znamená, aby chyba byla pro malé hodnoty *h* (resp. $|h|$) podstatně menší než *h* (resp. $|h|$).

Pro přírůstek funkce *f* v bodech a a $a+h$ má tedy platit $f(a+h)-f(a) = A.h+\tau(h)$, kde $\tau(h)$ je chyba, které se při výpočtu dopouštíme.

To znamená, že funkční hodnotu v bodě $a+h$ nahrazujeme hodnotou určenou pomocí tečny *t* sestrojené ke grafu funkce *f* v bodě *a* (viz obr. 28).

ŘEKNEME, ŽE FUNKCE f MÁ V BODĚ a TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL, POKUD EXISTUJE $A \in \mathbb{R}$ TAK, ŽE

$$f(a+h) = f(a)+A.h+\tau(h) \tag{23}$$

A PŘITOM

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tau(h)}{h} = 0. \tag{24}$$

Pokud takové číslo A existuje, nazývá se výraz $A.h$ **totální diferenciál**.

Limita $\lim_{h\to 0}\frac{\tau(h)}{h} = 0$ vyjadřuje fakt, že chyba určení funkční hodnoty v bodě $a+h$ pomocí tečny *t* (viz obr. 28) je malá.

Je otázkou, kdy totální diferenciál ve zvoleném bodě *a* existuje. Lze vyjít z definice (23) a (24) totálního diferenciálu. Dosadíme-li do limity (24) z výrazu (23), dostaneme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-A.h}{h}=0$ a po úpravě máme $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A=0$. Odtud vyjádříme

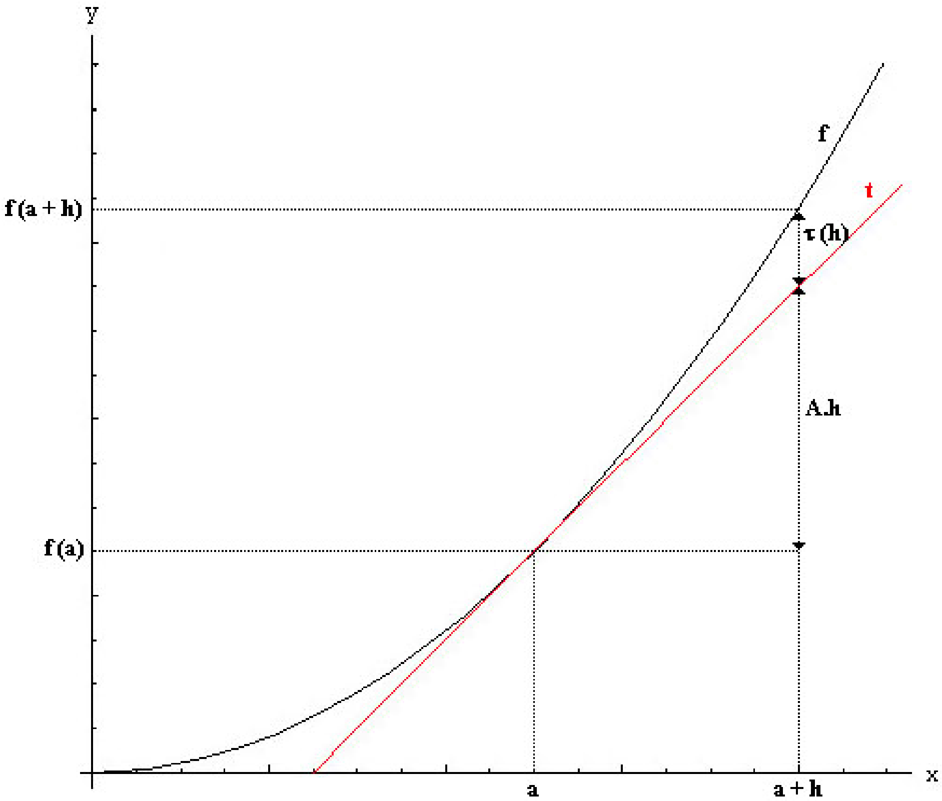
$$A=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{25}$$

Limita ve výrazu (25) je analogická jako limita ve výrazu (16), pomocí něhož je v odstavci 1.4.2 definována derivace funkce. Proto můžeme psát

$$A=f'(a). \tag{26}$$

Vzhledem k tomu, že $A\in\mathbb{R}$, musí být derivace funkce v daném bodě vlastní, aby v tomto bodě existoval diferenciál.

Do množiny reálných čísel totiž nevlastní čísla $\pm\infty$ nepatří.



obr. 28

VĚTA: **FUNKCE f MÁ V BODĚ a TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ MÁ FUNKCE f V BODĚ a VLASTNÍ DERIVACI.**

Diferenciál funkce *f* v bodě *a* je tedy výraz $f'(a).h$.

V libovolném bodě *x* funkce *f* bude diferenciál roven $f'(x).h$ a značí se $\mathrm{d}f(x)$. Lze tedy psát

$$\mathrm{d}f(x)=f'(x).h, \tag{27}$$

má-li výraz na pravé straně smysl.

Výraz na pravé straně uvedené rovnosti nebude mít smysl, pokud bude derivace nevlastní nebo bude výpočet vycházet z neurčitých výrazů (viz odstavec 1.2.2).

Pro funkci $f(x)=x$ je $f'(x)=1$ a proto $\mathrm{d}f(x)=\mathrm{d}x=1.h=h$. Výraz $\mathrm{d}x$ se nazývá **diferenciál nezávislé proměnné**. Pro diferenciál libovolné funkce tak lze psát $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$. Odtud je zřejmé, že derivaci funkce lze chápat jako podíl diferenciálu funkce a diferenciálu nezávislé proměnné, tj.

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{28}$$

Pojem diferenciál funkce hraje podstatnou roli zejména u funkcí více proměnných.

1.6 l´Hospitalovo pravidlo

Francouzský matematik G. F. A. l´Hospital (1661 - 1704) je autorem pravidla, které s využitím derivací funkcí umožňuje počítat některé limity, které běžným způsobem výpočtu vedou na některý z neurčitých výrazů (viz odstavec 1.2.2). Jeho závěry lze vyslovit v této větě.

VĚTA: **NECHŤ** $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ **NEBO** $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$ **A NECHŤ** $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, **KDE** $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. **POTOM** $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Číslo A tedy může být reálné a nebo to může být jedno z čísel $\pm\infty$.

Pozor! Funkce v čitateli i jmenovateli zlomku se v případě l´Hospitalova pravidla derivují každá zvlášť a ne podle pravidla pro derivaci podílu!

Jméno l´Hospital se čte *lopital*.

Lze dokázat (ale my to dělat nebudeme), že tento způsob výpočtu limit (jsou-li splněny předpoklady věty) lze použít i na výpočet jednostranných limit nebo limit v nevlastních bodech.

V následujících příkladech nebudeme zdůrazňovat, že jsou splněny počáteční předpoklady uvedené věty. Před každým výpočtem je ale nutné tyto předpoklady ověřit.

Příklad: Určete $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

L´Hospitalovo pravidlo lze při řešení jednoho příkladu použít i několikrát. Musí být ale stále splněny předpoklady uvedené věty.

Příklad: Určete $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\sin' x}{x'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$.

Další příklady již nebudeme tak podrobně rozepisovat.

Příklad: Určete $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 + x^3 - 12x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 2}$.

Řešení: $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 + x^3 - 12x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{24x^3 + 3x^2 - 24x}{8x^3 - 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{72x^2 + 6x - 24}{24x^2 - 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{144x + 6}{48x} = \lim_{x\to\infty} \frac{144}{48} = 3$.

A ještě jeden příklad na použití l´Hospitalova pravidla:

Příklad: Určete $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

Řešení: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{a\sin ax}{\cos ax}}{-\frac{b\sin bx}{\cos bx}} = \lim_{x\to 0} \frac{a\,\mathrm{tg}\,ax}{b\,\mathrm{tg}\,bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^2}{\cos ax}}{\frac{b^2}{\cos bx}} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2\cos bx}{b^2\cos ax} = \frac{a^2}{b^2}$.

L´Hospitalovo pravidlo je užitečné, ale bohužel u zkoušek z matematiky na vysokých školách řada úloh na výpočet limit začíná slovy „Bez užití l´Hospitalova pravidla určete limitu …“. Ale je alespoň šance si ověřit získaný výsledek.

1.7 Průběh funkce

Vyšetřování průběhu funkce patří k základním úlohám diferenciálního počtu a tyto úlohy mají i velmi mnoho praktických aplikací. Je pravda, že v současné době je možné s využitím řady počítačových programů (které lze instalovat i do kapesních kalkulátorů či mobilních telefonů) průběh funkce zobrazit velmi rychle. Nicméně rutinní výpočet bez užití právě zmíněných pomůcek je i zde velmi důležité zvládnout. U řady praktických úloh může počítačový program vykreslit velmi pochybné grafy, neuvědomí-li si uživatel, co vlastně od programu vykreslit chce.

Dříve než ale přistoupíme k vlastnímu vyšetřování průběhu funkce (viz odstavec 1.7.8), je třeba se seznámit s dalšími vlastnostmi funkcí, které jsou k vyšetřování jejich průběhu nezbytně nutné.

1.7.1 Věty o spojitosti

<u>ROLLEOVA VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA FUNKCE f, KTERÁ MÁ TYTO VLASTNOSTI:

1. JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b\rangle$;

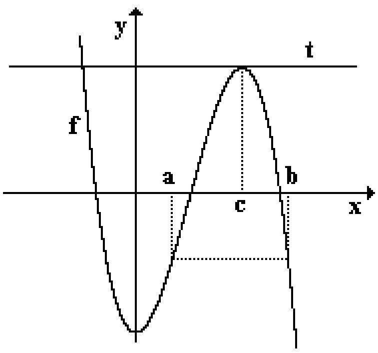
2. V KAŽDÉM BODĚ OTEVŘENÉHO INTERVALU $(a; b)$ MÁ DERIVACI;

3. $f(a) = f(b)$.

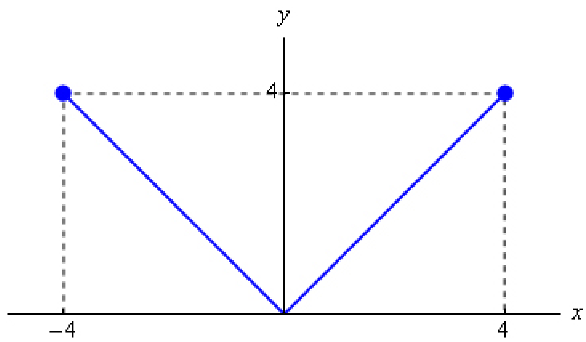
POTOM EXISTUJE V OTEVŘENÉM INTERVALU $(a; b)$ ALESPOŇ JEDEN BOD c, V NĚMŽ PLATÍ $f'(c) = 0$.

Větu přibližuje obr. 29, na němž je nakreslena funkce *f*, která je spojitá v intervalu $\langle a; b\rangle$ a pro $f(a)$ a $f(b)$ platí $f(a) = f(b)$. Graf funkce *f* má v každém bodě tečnu, tj. ve všech bodech otevřeného intervalu $(a; b)$ existuje derivace funkce *f*. Funkce tedy splňuje předpoklady Rolleovy věty, z níž vyplývá, že mezi všemi tečnami sestrojenými k dané funkci na uvažovaném intervalu bude alespoň jedna, která je rovnoběžná s osou *x* (tj. její směrnice je nulová).

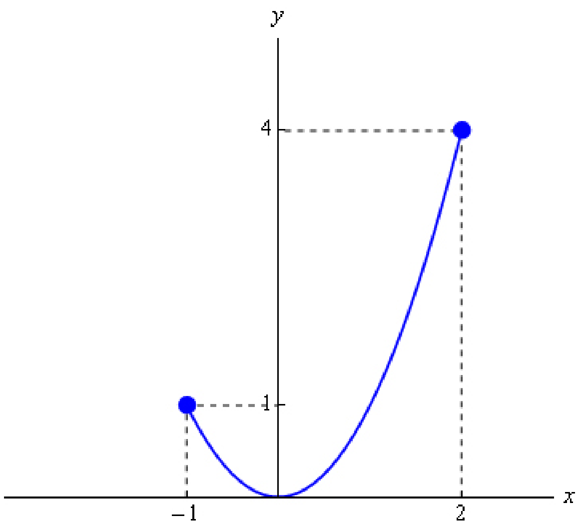
Nejsou-li splněny všechny předpoklady Rolleovy věty, nemusí být její závěr platný. Takovým příkladem může být např. funkce $f: y = |x|$ na intervalu $\langle -4; 4\rangle$. Zde není splněn předpoklad o existenci derivace ve všech bodech intervalu $(-4; 4)$: v bodě $x_0 = 0$ totiž neexistuje derivace (viz obr. 30). Proto neexistuje bod, v němž by byla tečna sestrojená k dané funkci rovnoběžná s osou *x*. Naproti tomu funkce $f: y = x^2$ na intervalu $\langle -1; 2\rangle$ sice nesplňuje podmínku o rovnosti funkčních hodnot v koncových bodech uvažovaného intervalu, ale přesto existuje bod, v němž je tečna rovnoběžná s osou *x* (viz obr. 31).



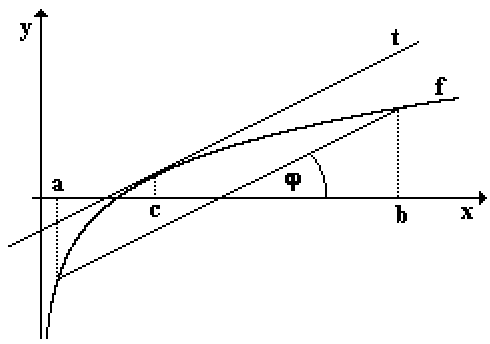
obr. 29



obr. 30



obr. 31



obr. 32

Významnou větou je Lagrangeova věta o střední hodnotě.

<u>LAGRANGEOVA VĚTA O STŘEDNÍ HODNOTĚ:</u> NECHŤ JE DÁNA FUNKCE f, KTERÁ MÁ TYTO VLASTNOSTI:

1. JE SPOJITÁ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b\rangle$;

2. V KAŽDÉM BODĚ OTEVŘENÉHO INTERVALU $(a; b)$ MÁ DERIVACI.

POTOM EXISTUJE V OTEVŘENÉM INTERVALU $(a;b)$ ALESPOŇ JEDEN BOD c, PRO KTERÝ PLATÍ: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Graf funkce, která splňuje podmínky Lagrangeovy věty, je zobrazen na obr. 32. Funkce má v každém bodě $x\in(a;b)$ derivaci a tedy je možné v každém bodě tohoto intervalu sestrojit tečnu. Tětiva spojující body $A=[a;f(a)]$ a $B=[b;f(b)]$ grafu této funkce má směrnici $k=\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Podle Lagrangeovy věty pak existuje alespoň jedna tečna *t*, která má stejnou směrnici jako uvažovaná tětiva, tj. je s danou tětivou rovnoběžná.

1.7.2 Monotónnost funkce a derivace

Z učiva o funkcích víme, že funkce, která je buď rostoucí nebo klesající, se označuje názvem **monotónní**. Na základě Lagrangeovy věty (viz odstavec 1.7.1) je možné určit zda se jedná o funkci rostoucí nebo klesající na základě první derivace funkce.

VĚTA: MÁ-LI FUNKCE f V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU $(a;b)$ KLADNOU DERIVACI, JE V TOMTO INTERVALU ROSTOUCÍ. MÁ-LI FUNKCE f V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU $(a;b)$ ZÁPORNOU DERIVACI, JE V TOMTO INTERVALU KLESAJÍCÍ.

Intervaly, v nichž je funkce rostoucí nebo klesající (tedy monotónní), se nazývají **intervaly monotónnosti**.

1.7.3 Extrémy funkce a derivace

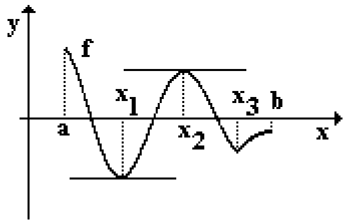
K určení přesného průběhu funkce je nutná také znalost **extrémů funkce**. Pojem extrém funkce je souhrnné označení pro maximum funkce nebo minimum funkce. Termínem **extrém funkce na množině** se označuje největší funkční hodnota nebo nejmenší funkční hodnota funkce na dané množině. Touto množinou je většinou celý definiční obor nebo uzavřený interval patřící do definičního oboru dané funkce.

Na obr. 33 je zobrazen graf spojité funkce *f*, o které je možné (z hlediska jejích extrémů) říci:

1. v bodě *a* nabývá funkce největší hodnoty;
2. v bodě x_1 nabývá funkce nejmenší hodnoty;
3. v bodech x_2 a x_3 nabývá v jistém smyslu extrémní hodnoty - jedná se o **lokální extrémy**, které nemusí představovat největší (resp. nejmenší) hodnoty funkce v uvažovaném intervalu.

Lokální extrémy jsou „místní extrémy“. Extrémem České republiky z hlediska nadmořské výšky je hora Sněžka v Krkonoších. Pro obyvatele Jeseníků je místní nejvyšší horou Praděd. Praděd je tedy pro obyvatele Jeseníků lokálním extrémem, ačkoliv extrémem (globálním extrémem) je Sněžka v Krkonoších. Pro obyvatele Krkonoš je Sněžka lokálním extrémem (místní nejvyšší hora), ale je to zároveň i globální extrém - nejvyšší hora České republiky.

Globální extrém (resp. extrém - velmi často se totiž přívlastek *globální* vynechává) je tedy zároveň i lokálním extrémem v určitém okolí.



obr. 33

FUNKCE f MÁ V BODĚ x_0 LOKÁLNÍ MAXIMUM, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ $U(x_0)$ BODU x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x\in U(x_0)\cap D(f)$ PLATÍ: $f(x)\le f(x_0)$.

FUNKCE f MÁ V BODĚ x_0 LOKÁLNÍ MINIMUM, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ $U(x_0)$ BODU x_0, ŽE PRO VŠECHNA $x\in U(x_0)\cap D(f)$ PLATÍ: $f(x)\ge f(x_0)$.

Platí-li v uvedených nerovnostech rovnost jen pro $x=x_0$, říkáme, že funkce *f* má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**, resp. **ostré lokální minimum**.

To znamená, že takový bod je skutečně nejvyšším resp. nejnižším v daném okolí. Funkce v tom případě není v okolí lokálního extrému konstantní.

V analogii krajiny je ostré lokální maximum špička hory a ostré lokální minimum úzká rokle. V žádném případě ostrým lokálním maximem není náhorní plošina.

Z obr. 33, na němž je znázorněn graf spojité funkce *f*, je vidět, že v bodech $\left[x_1; f(x_1)\right]$ a $\left[x_2; f(x_2)\right]$ má graf funkce tečnu a zároveň je zde ostré lokální minimum resp. maximum. Tečny v těchto bodech (tj. tečny v lokálních extrémech) jsou rovnoběžné s osou *x* a mají tedy nulovou směrnici. Z toho vyplývá, že i (první) derivace funkce *f* v těchto dvou bodech je nulová. V bodě $\left[x_3; f(x_3)\right]$ je sice také ostré lokální minimum, ale tečna v tomto bodě neexistuje.

V bodě $\left[x_3; f(x_3)\right]$ je na grafu funkce „špička“ a tečnu tedy není možné dobře „přitisknout“ ke grafu funkce *f*.

Funkce tedy může mít lokální extrém jen v těch bodech, v nichž je její derivace nulová nebo derivace neexistuje.

Následující věta dává do souvislosti extrémy funkce s její derivací.

<u>VĚTA:</u> MÁ-LI FUNKCE f V BODĚ x_0 LOKÁLNÍ EXTRÉM A EXISTUJE-LI V TOMTO BODĚ DERIVACE $f'(x_0)$ FUNKCE f, PAK PLATÍ: $f'(x_0) = 0$.

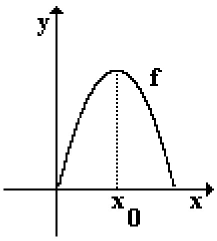
<u>Pozor!</u> Obrácená věta neplatí. Pokud platí $f'(x_0) = 0$, nemusí mít funkce *f* v bodě x_0 lokální extrém. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce $f: y = x^3$. Platí $f'(0) = 0$, ale v bodě 0 nemá funkce *f* lokální extrém. Je zde pouze tzv. stacionární bod (viz odstavec 1.7.4).

1.7.4 <u>Stacionární body</u>

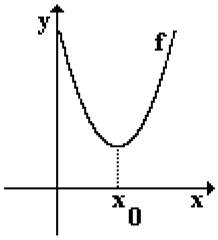
Zjistíme-li, že v bodě x_0 pro derivaci funkce *f* platí $f'(x_0) = 0$, neznamená to nutně, že funkce *f* má v bodě x_0 lokální extrém. Přesto určení bodů, v nichž nabývá první derivace funkce nulové hodnoty, je prvním krokem k vyhledání lokálních extrémů.

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, pak se bod x_0 nazývá nulovým bodem první derivace nebo též **stacionárním bodem**. Tyto stacionární body jsou tedy řešením rovnice $f'(x) = 0$ a extrém funkce v nich může, ale také nemusí být.

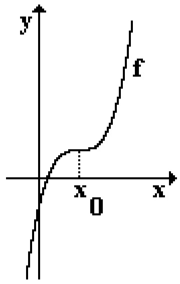
Stacionární body jsou tedy pouze body „podezřelé z extrému“.



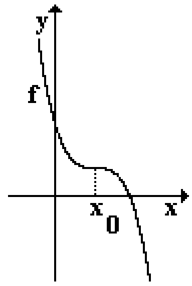
obr. 34



obr. 35



obr. 36



obr. 37

Dále je možné postupovat podle následující věty:

<u>VĚTA:</u> NECHŤ $f'(x_0) = 0$. JESTLIŽE EXISTUJE TAKOVÉ OKOLÍ $U(x_0, \delta)$ BODU x_0, ŽE V INTERVALECH $(x_0 - \delta; x_0)$ A $(x_0; x_0 + \delta)$ MÁ PRVNÍ DERIVACE $f'(x)$ FUNKCE f RŮZNÁ ZNAMÉNKA, MÁ FUNKCE f V TOMTO BODĚ x_0 OSTRÝ LOKÁLNÍ EXTRÉM. MĚNÍ-LI SE ZNAMÉNKO DERIVACE Z PLUS NA MÍNUS, MÁ FUNKCE f V BODĚ x_0 LOKÁLNÍ MAXIMUM (VIZ OBR. 34), MĚNÍ-LI SE ZNAMÉNKO DERIVACE Z MÍNUS NA PLUS, MÁ FUNKCE f V BODĚ x_0 LOKÁLNÍ MINIMUM (VIZ OBR. 35).

Pokud funkce *f* ve stacionárním bodě x_0 (resp. v intervalech $(x_0 - \delta; x_0)$ a $(x_0; x_0 + \delta)$) znaménko nemění, lokální extrém v daném bodě neexistuje (viz obr. 36 a obr. 37).

Na první pohled je toto zjišťování poněkud komplikovanější a na přesné dokazování náročnější. Uvědomíme-li si ovšem, že pomocí první derivace funkce můžeme určit poměrně snadno intervaly monotónnosti funkce (viz odstavec 1.7.2), můžeme z těchto intervalů monotónnosti funkce vyjít při určování lokálního extrému v nalezeném stacionárním bodě.

Přechází-li funkce ve stacionárním bodě z rostoucí na klesající, je v daném bodě lokální maximum. Přechází-li funkce v nalezeném stacionárním bodě z klesající na rostoucí, má v daném bodě lokální minimum. Je to vlastně jinými slovy popsaná naposledy uvedená věta, ale pro běžné výpočty je tento přístup praktičtější.

1.7.5 <u>Extrémy funkce a druhá derivace</u>

Zjišťování změny znaménka první derivace může být u některých funkcí problematické nebo nepříjemné. Proto si ukážeme, jakým způsobem je možné určit lokální extrém na základě druhé derivace funkce. To je výhodné za předpokladu, že výpočet druhé derivace funkce je jednodušší než určování znaménkových změn první derivace.

Navíc tento postup je téměř „chybám vzdorný“ a není potřeba u něj prokazovat takový vhled do problematiky, jako u postupu popsaného na konci odstavce 1.7.4.

V<u>ĚTA:</u> NECHŤ $f'(x_0)=0$ A NECHŤ EXISTUJE V BODĚ x_0 DRUHÁ DERIVACE FUNKCE f:

1. JE-LI $f''(x_0)<0$, MÁ FUNKCE f V BODĚ x_0 OSTRÉ LOKÁLNÍ MAXIMUM;

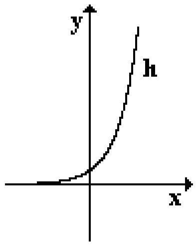
2. JE-LI $f''(x_0)>0$, MÁ FUNKCE f V BODĚ x_0 OSTRÉ LOKÁLNÍ MINIMUM.

Pokud je $f''(x_0)=0$, není možné o existenci lokálního extrému funkce f v bodě x_0 rozhodnout.

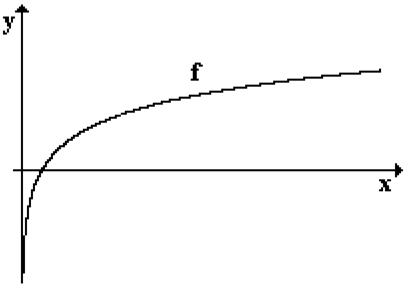
Není možné rozhodnout podle této věty. Pořád je v záloze metoda popsaná na konci odstavce 1.7.4.

1.7.6 Konvexnost a konkávnost funkce

Uvažujme nyní grafy dvou funkcí: $h: y=e^x$ (viz obr. 38) a $f: y=\ln x$ (viz obr. 39). Kdybychom k těmto grafům sestrojovali tečny v libovolných jejich bodech, zjistili bychom, že u funkce *h* leží vždy graf funkce „nad tečnou“ sestrojenou v daném bodě a u funkce *f* leží graf funkce vždy „pod tečnou“ sestrojenou v daném bodě. Tato skutečnost pomůže určit další vlastnosti funkce: konvexnost a konkávnost. Kdybychom totiž neznali přesný průběh funkcí a věděli jen, že obě jsou rostoucí na svém definiční oboru, nemohli bychom jejich graf sestrojit.



obr. 38

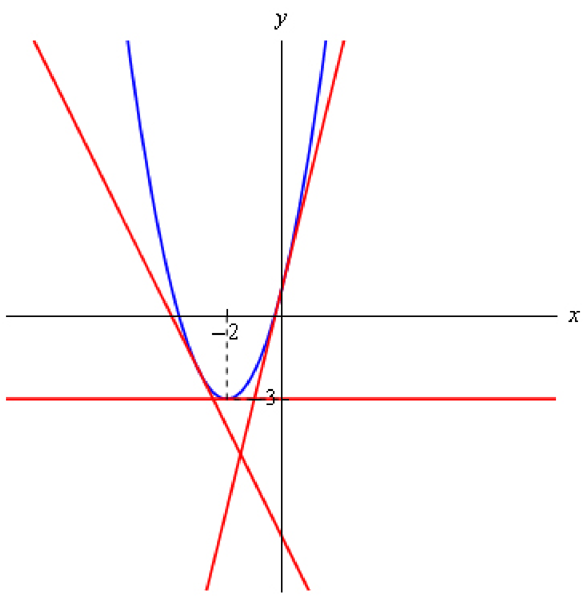


obr. 39

Obě funkce jsou totiž rostoucí, ale každá z nich je jinak „prohnutá“. A právě „průhyb funkce“ popisuje konkávnost resp. konvexnost funkce.

FUNKCE f, KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ x_0, JE V BODĚ $[x_0; f(x_0)]$ KONVEXNÍ, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ $U(x_0,\delta)$ BODU x_0, ŽE PRO VŠECHNA x Z MNOŽINY $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE f „NAD TEČNOU“ SESTROJENOU V BODĚ $[x_0; f(x_0)]$.

Množina $U(x_0,\delta)-\{x_0\}$ je prstencové okolí $P(x_0,\delta)$ bodu x_0 (viz odstavec 1.2.1.1).



obr. 40

FUNKCE f, KTERÁ MÁ DERIVACI V BODĚ x_0, JE V BODĚ $[x_0; f(x_0)]$ KONKÁVNÍ, EXISTUJE-LI TAKOVÉ OKOLÍ $U(x_0, \delta)$ BODU x_0, ŽE PRO VŠECHNA x Z MNOŽINY $U(x_0, \delta) - \{x_0\}$ LEŽÍ BODY GRAFU FUNKCE f „POD TEČNOU" SESTROJENOU V BODĚ $[x_0; f(x_0)]$.

Tuto vlastnost funkce je možné rozšířit i na celý interval.

VĚTA: **JE-LI FUNKCE f KONVEXNÍ (RESP. KONKÁVNÍ) V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU I, ŘÍKÁME, ŽE JE KONVEXNÍ (RESP. KONKÁVNÍ) V INTERVALU I.**

Z grafu kvadratické funkce $f: y = x^2 + 4x + 1$ (viz obr. 40) je vidět, že daná funkce je konvexní (graf funkce leží vždy „nad tečnou" sestrojenou v daném bodě). Na základě druhé derivace funkce *f* ($f'(x) = 2x + 4$ a $f''(x) = 2$), která je kladná, si lze pamatovat jak poznáme, konvexní resp. konkávní funkcí.

VĚTA: **JE-LI $f''(x_0) > 0$, PAK JE FUNKCE f V BODĚ x_0 KONVEXNÍ.**

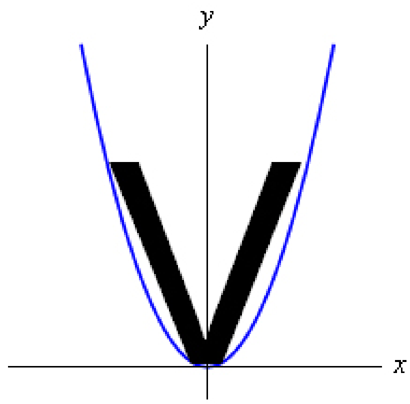
VĚTA: **JE-LI $f''(x_0) < 0$, PAK JE FUNKCE f V BODĚ x_0 KONKÁVNÍ.**

Tyto poznatky platí obecně i pro celý interval, v němž platí uvedené nerovnosti:

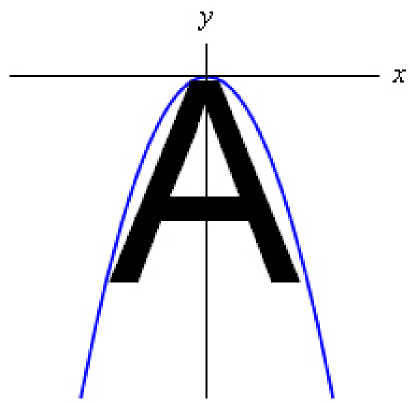
VĚTA: **JESTLIŽE V KAŽDÉM BODĚ INTERVALU I PLATÍ:**

1. **$f''(x_0) > 0$, PAK JE FUNKCE f V INTERVALU I KONVEXNÍ;**
2. **$f''(x_0) < 0$, PAK JE FUNKCE f V INTERVALU I KONKÁVNÍ.**

Existuje relativně jednoduchá mnemotechnická pomůcka, jak si zapamatovat, která funkce je konvexní a která konkávní. Parabolu jako graf kvadratické funkce $f: y = x^2$ známe dobře. Druhou derivaci určíme také snadno: $f''(x) = 2$. Tato hodnota je kladná na celém definičním oboru funkce a tedy (podle výše uvedené věty) je funkce kon**V**exní - do grafu této kvadratické funkce lze vepsat písmeno **V** (viz obr. 41). Funkce, do jejíhož grafu lze vepsat písmeno **A**, je konk**Á**vní (viz obr. 42, na kterém je graf funkce $g: y = -x^2$, jejíž druhá derivace je na celém jejím definičním oboru záporná).



obr. 41



obr. 42

1.7.7 Inflexní body

Na obr. 36 a obr. 37 jsou znázorněny funkce, které mají v bodě x_0 nulovou první derivaci a přesto v nich není lokální extrém (jde o stacionární bod). Na základě znalostí z odstavce 1.7.6 lze říci, že v uvažovaném bodě přechází funkce z funkce konkávní na funkci konvexní (obr. 36) resp. z funkce konvexní na funkci konkávní (obr. 37). Funkce mění v uvažovaném bodě výrazně svůj průběh, proto má daný bod i svůj název.

NECHŤ FUNKCE f MÁ V BODĚ x_0 DERIVACI. PŘECHÁZÍ-LI V TOMTO BODĚ GRAF FUNKCE f Z POLOHY „NAD TEČNOU" DO POLOHY „POD TEČNOU" NEBO Z POLOHY „POD TEČNOU" DO POLOHY „NAD TEČNOU", NAZÝVÁME BOD x_0 INFLEXNÍ BOD FUNKCE f.

Z toho, co víme o konvexní funkci a konkávní funkci (viz odstavec 1.7.6) vyplývá, že v okolí inflexního bodu mění funkce $f''(x)$ znaménko. Hodnota druhé derivace funkce *f* v inflexním bodě tedy bude nulová.

Druhá derivace $f''(x)$ je obecně také funkce - její hodnota závisí na konkrétním zvoleném bodu *x*.

VĚTA: **JE-LI BOD x_0 INFLEXNÍM BODEM FUNKCE f A MÁ-LI FUNKCE f V TOMTO BODĚ DRUHOU DERIVACI, PAK $f''(x_0) = 0$.**

Pozor! Obrácená věta neplatí. Pokud platí $f''(x_0) = 0$, nemusí mít funkce *f* v bodě x_0 inflexní bod. Příkladem neplatnosti této obrácené věty je např. funkce $f: y = x^4$. Platí $f''(0) = 0$, ale bod 0 není inflexním bodem funkce *f* - funkce je na celém svém definičním oboru konvexní.

Situace je podobná jako při určování lokálních extrémů funkce (viz odstavec 1.7.4): řešením rovnice $f''(x) = 0$ získáme pouze body, v nichž může, ale také nemusí inflexní bod být.

Získáme tedy body „podezřelé z inflexe“.

Jistotu získáme až po zjištění znaménkových změn druhé derivace v okolí těchto bodů.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ FUNKCE f MÁ DRUHOU DERIVACI V KAŽDÉM BODĚ Z δ-OKOLÍ BODU x_0 A NECHŤ TATO DRUHÁ DERIVACE $f''(x)$ MÁ V INTERVALECH $(x_0 - \delta; x_0)$ A $(x_0; x_0 + \delta)$ RŮZNÁ ZNAMÉNKA. PAK BOD x_0 JE INFLEXNÍM BODEM FUNKCE f.

1.7.8 <u>Vyšetřování průběhu funkce</u>

Po výkladu limit (viz odstavec 1.2), derivací (viz odstavec 1.1.1) a souvislosti derivací funkce s dalšími vlastnostmi funkce (viz odstavce 1.7.1 až 1.7.6.0), je možné začít vyšetřovat průběh libovolné funkce. Hlavním úkolem při vyšetřování průběhu funkce je určení jejích základních vlastností a nakreslení správného grafu funkce (ve smyslu rostoucí - klesající funkce, konkávní - konvexní funkce, asymptoty, limity v krajních bodech definičního oboru, …).

Při vyšetřování vlastností a průběhu funkce je vhodné postupovat v tomto pořadí:

1. určit definiční obor funkce;
2. určit, zda je funkce sudá, lichá nebo periodická;

Má-li totiž funkce jednu z uvedených vlastností, zjednoduší to vyšetřování jejího průběhu - můžeme se pak omezit jen na část definičního oboru a nalezené důležité body (extrémy funkce, inflexní body funkce, …) vhodně „překopírovat“.

3. určit průsečíky s osami kartézského systému souřadnic;
4. vypočítat limity v krajních bodech definičního oboru funkce;
5. vypočítat první derivace funkce, určit stacionární body a body, v nichž není první derivace definována;

V této souvislosti jsou problematické některé body funkcí lineárně lomených, odmocnin, absolutních hodnot, … - derivace v těchto bodech neexistuje (většinou proto, že neexistuje oboustranná limita v těchto bodech).

6. určit intervaly monotónnosti;
7. určit lokální extrémy funkce;
8. vypočítat druhou derivaci funkce, určit nulové body druhé derivace a body, v nichž není druhá derivace funkce definována;
9. určit intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce;
10. najít inflexní body funkce;
11. najít asymptoty funkce;
12. určit obor hodnot funkce;
13. nakreslit graf funkce.

Jak již bylo řečeno: s využitím výpočetní techniky je možné vyšetřování průběhu funkce výrazně urychlit, ale přesto je nutné tyto základní postupy znát.

1.8 <u>Užití diferenciálního počtu</u>

Užití diferenciálního počtu je velmi široké a zasahuje jak do matematiky, tak do jejích aplikací - fyziky, elektrotechniky, chemie, … V přírodních vědách se řeší problémy, které se týkají nalezení extrémů určitých veličin, okamžitých změn některých veličin (dráha, rychlost, …).

Při řešení uvedených úloh je třeba vždy najít vhodné vyjádření funkce, jejíž extrém nebo průběh potom budeme hledat. Některé úlohy z matematiky, fyziky, elektroniky, … je možné řešit i na základě logické úvahy, tj. bez užití diferenciálního počtu.

2. INTEGRÁLNÍ POČET

Základními pojmy této kapitoly jsou primitivní funkce (viz odstavec 2.2) a určitý integrál (viz odstavec 2.3), základní dovedností pak je určení primitivní funkce k dané funkci na daném intervalu. Tato dovednost velice úzce souvisí s derivováním, je ale náročnější. Stejně jako diferenciální počet, má i integrální počet velký význam při studiu přírodních a technických věd.

2.1 Historický úvod

O rozvoj integrálního počtu se zasloužil anglický fyzik Isaac Newton (1642 - 1727) a německý matematik Bernhard Riemann (1826 - 1866). Na základě toho se často hovoří o Newtonově integrálu a Riemannově integrálu. Tyto dva druhy integrálů se liší pouze přístupem obou vědců k nalezení základních integračních pravidel a ke stanovení podmínek, za kterých je daná funkce integrovatelná:

1. Newtonův integrál - vychází z definice primitivní funkce pomocí derivace funkce (viz odstavec 2.2.1). S tímto přístupem se integrály lépe počítají.
2. Riemannův integrál - vychází z konkrétní aplikace integrálu: výpočet obsahu plochy, která je omezená grafem funkce. Z toho je zřejmé, že se jedná o integrál určitý (viz odstavec 2.3), i když Riemann tímto způsobem studoval i integrály neurčité (integrál jakožto funkce jedné z mezí - horní meze nebo dolní meze). Riemannův přístup má tu výhodu, že je názorný a okamžitě jsou zřejmé aplikace integrálního počtu.

Na základě současných znalostí matematické analýzy je možné dokázat, že pro spojité funkce, které mají ve všech svých bodech derivaci, získáme pomocí Newtonova integrálu i Riemannova integrálu stejné výsledky. Přesto se najdou funkce (které jsou ovšem velmi specifické, a proto se s nimi v rámci středoškolské matematiky nesetkáme), které lze řešit jen jedním z uvedených postupů. Takové funkce tedy buď mají Newtonův integrál a nemají Riemannův integrál nebo naopak.

2.2 Primitivní funkce

2.2.1 Zavedení primitivní funkce

MĚJME DÁNY FUNKCE F A f DEFINOVANÉ V OTEVŘENÉM INTERVALU I. JESTLIŽE PRO VŠECHNA $x \in I$ PLATÍ

$$F'(x) = f(x), \tag{29}$$

ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE F JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI f V INTERVALU I.

Nebude-li řečeno jinak, budeme intervalem *I* rozumět vždy interval otevřený.

Na otevřeném intervalu totiž nejsou žádné problémy s derivací funkce - viz odstavec 1.4. Každý bod tohoto intervalu do něj patří i se svým okolím.

Primitivní funkce k dané funkci se tedy definuje pomocí derivace (viz vztah (29)). Jinými slovy: derivováním primitivní funkce *F* dostaneme původní funkci *f*.

Pomocí toho je možné ověřit veškeré výsledky příkladů, v nichž je třeba nalézt primitivní funkci k dané funkci: stačí výslednou funkci zderivovat. Pokud se dostaneme k funkci ze zadání příkladu, počítali jsme správně. Pokud najdeme primitivní funkci, kterou nechceme derivovat kvůli ověření našeho výsledku, je možné podívat se do výsledků sbírky, z níž byl příklad převzat. Zde se ale může objevit jedna nesrovnalost. Výsledek se může od našeho lišit a přitom jsme mohli počítat dobře.

Známe-li v intervalu *I* k dané funkci *f* jednu primitivní funkci, známe jich nekonečně mnoho. Je-li totiž *F* primitivní funkce k funkci *f*, pak také každá funkce tvaru $F(x)+C$, kde *C* je libovolné reálné číslo, je primitivní funkcí k funkci *f*, protože

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x). \tag{30}$$

Výrazem $F(x)+C$ jsou vyčerpány všechny možnosti a žádné jiné primitivní funkce k funkci f neexistují.

VĚTA: JE-LI FUNKCE F V INTERVALU I PRIMITIVNÍ FUNKCÍ K FUNKCI f, PAK KAŽDÁ PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI f JE FUNKCE VE TVARU $F(x)+C$, KDE C JE REÁLNÁ KONSTANTA.

Známe-li graf jedné primitivní funkce *F* k funkci *f* v intervalu *I*, pak grafy všech primitivních funkcí k funkci *f* v intervalu *I* získáme posunutím grafu funkce *F* po ose *y* (viz obr. 43).

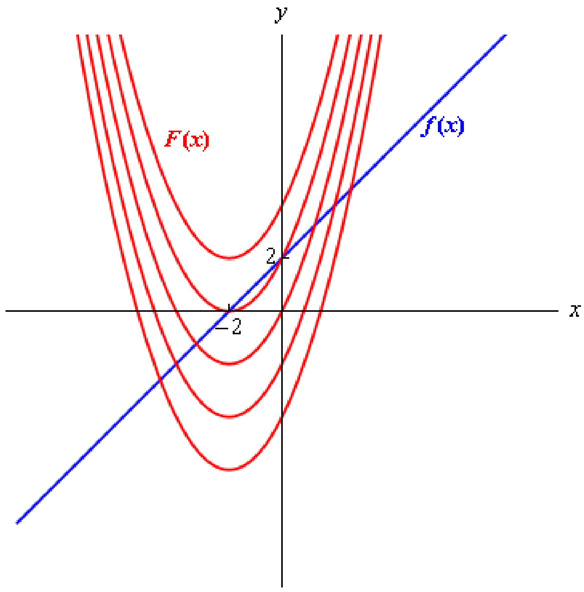
VĚTA: KE KAŽDÉ FUNKCI SPOJITÉ V INTERVALU EXISTUJE V TOMTO INTERVALU PRIMITIVNÍ FUNKCE.

Vzhledem k tomu, že pojem primitivní funkce úzce souvisí s pojmem určitý integrál, používá se pro označení primitivní funkce také zápis:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,, \tag{31}$$

kde $x \in I$. V této souvislosti se funkce *f* nazývá **integrand**, *x* **integrační proměnná**, symbol $\int$ **integrační znak** a *C* **integrační konstanta**. Symbol $\mathrm{d}x$ slouží k odlišení integrační proměnné od případných parametrů nebo konstant vystupujících v zápisu funkce *f*.

Symbol $\mathrm{d}x$ má hlubší význam - souvisí s totálním diferenciálem funkce (viz odstavec 1.5).



obr. 43

Postup, kterým se určuje primitivní funkce $F(x)+C$ k dané funkci *f*, se nazývá **integrování** funkce *f* (**integrace** funkce *f*).

Integrování je vlastně opačný proces k derivování (tak jako spolu souvisí sčítání - odčítání, umocňování - odmocňování, …). Intuitivní náhled na to, „odkud se vzalo $\mathrm{d}x$“, je možné získat ze zápisu derivace. Pro derivaci funkce *F* podle proměnné *x* platí $F'(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$, což vyplývá ze vztahu (29). Odtud dostáváme $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ („kousíček“ funkce *F* je roven součinu funkce *f* a „kousíčku“ proměnné *x*) a tedy $F(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Matematicky není toto „odvození“ zcela v pořádku, ale pro základní představu stačí.

2.2.2 Primitivní funkce elementárních funkcí

Základní pravidla pro derivování (ale i hledání primitivních funkcí) elementárních funkcí jsou uvedena v odstavci 1.4.5 v tab. 1.

Nyní uvedeme pravidla pro hledání primitivních funkcí k součtu dvou funkcí a rozdílu dvou funkcí.

EXISTUJÍ-LI V OTEVŘENÉM INTERVALU I PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCÍM $f_1(x)$ A $f_2(x)$ A JSOU-LI c_1 A c_2 LIBOVOLNÉ REÁLNÉ KONSTANTY, EXISTUJE PRIMITIVNÍ FUNKCE TAKÉ K FUNKCI $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ A PLATÍ

$$\int \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right]\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{32}$$

Z právě uvedené věty vyplývají následující vztahy pro primitivní funkce:

$$\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{33}$$

Konstantu, která je nezávislá na proměnné, podle níž integrujeme, můžeme vytknout před integrál.

$$\int \left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{34}$$

Integrál součtu dvou funkcí je roven součtu integrálu daných funkcí.

$$\int \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x - \int g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{35}$$

Integrál rozdílu dvou funkcí je roven rozdílu integrálů těchto dvou funkcí.

2.2.3 Integrační metody

Pro výpočet složitějších integrálů existuje řada doporučených metod, které je ovšem možné použít pouze na určitý typ funkcí.

V tomto ohledu jsou integrály horší než derivace: pro derivace máme několik vztahů (viz odstavec 1.4.5 a v něm tab. 1) a s nimi spočítáme derivace libovolně komplikovaných funkcí. V případě integrálů můžeme dostat úlohu, ve které jsou „známé jednoduché“ funkce, a přesto se ukáže, že tento integrál není vůbec analyticky (tj. bez počítače) řešitelný.

Uvedeme pouze základní integrační metody. V teoretické matematice a praxi (fyzika, elektrotechnika, stavitelství, …) se používá celá řada dalších metod. Většinou se jedná o substituce, které jsou vytvořeny speciálně pro daný typ úloh. Zde se seznámíme s používáním těchto metod obecně.

2.2.3.1 Per partes

Metoda integrování per partes (integrování *po částech*) je založena na vztahu (20) pro derivaci součinu dvou funkcí $u=u(x)$ a $v=v(x)$. Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit jeden ze součinů na pravé straně vztahu. Tedy např. $u'(x).v(x)=\left[u(x).v(x)\right]'-u(x).v'(x)$. Odtud vychází i věta pro integrování metodou per partes.

VĚTA: MAJÍ-LI FUNKCE $u=u(x)$ A $v=v(x)$ V INTERVALU $(a;b)$ SPOJITÉ DERIVACE, PAK V INTERVALU $(a;b)$ PLATÍ

$$\int u(x).v'(x)\mathrm{d}x=u(x).v(x)-\int u'(x).v(x)\mathrm{d}x. \tag{36}$$

Vztah (36) si lze pamatovat tak, že na jeho pravé straně je součin nederivovaných funkcí, od kterého je odečten integrál nově spočítaných funkcí (na základě funkcí v původním integrálu, který je na levé straně vztahu (36)).

Metodou per partes je úloha vždy řešitelná (tj. lze nalézt primitivní funkci k zadané funkci), pokud zadaná funkce je ve tvaru součinu polynomu s funkcí sinus, kosinus nebo funkcí exponenciální. V některých případech je ale nutné použít metodu per partes během výpočtu vícekrát.

Nyní uvedeme dva příklady, na kterých zároveň ukážeme způsob zápisu používané metody.

Příklad: Vypočtěte: $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

Řešení: K nalezení primitivní funkce ze zadání použijeme metodu per paretes. Je zvykem během výpočtu si připravit a označit derivace daných funkcí, aby bylo možné snadněji aplikovat metodu per partes:

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=\cos x & v=\sin x\end{vmatrix}=x\sin x-\int 1.\sin x\mathrm{d}x=x\sin x-\int \sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C$$

Symbol $\begin{vmatrix} u=x & u'=1 \\ v'=\cos x & v=\sin x\end{vmatrix}$ v tomto případě neznačí matici! Jedná se pouze o oddělení označení funkcí od zbytku úlohy.

Příklad: Vypočtěte: $\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x$.

Řešení: Opět i tento příklad rozepíšeme. V tomto případě nezávisí na tom, kterou funkci ze součinu v zadání budeme integrovat a kterou budeme derivovat. Funkce e^{x} se ani jednou z uvedených operací nemění, a funkce $\sin x$ a $\cos x$ přecházejí během integrování resp. derivování jedna na druhou (až na znaménko).

$$\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=e^{x} & u'=e^{x} \\ v'=\sin x & v=-\cos x\end{vmatrix}=-e^{x}\cos x+\int e^{x}.\cos x\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=e^{x} & u'=e^{x} \\ v'=\cos x & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x-\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x$. Nyní jsme získali rovnost, na jejíchž obou stranách máme tentýž člen $\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x$, ale s opačným znaménkem. Převedeme-li nyní tento člen na levou stranu rovnosti, neodečte se s tím původním, který na levé straně je.

Převedením na levou stranu rovnosti tedy získáme: $2\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x=-e^{x}\cos x+e^{x}\sin x$. Získali jsme tedy rovnici o jedné neznámé $\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x$. Snadnou úpravou získáme: $\int e^{x}.\sin x\mathrm{d}x=\frac{e^{x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

I tento způsob úpravy se občas v integrálním počtu vyskytne. Tímto způsobem lze vyřešit zadanou úlohu, pokud na pravé straně získáme stejný výraz jako ten, s nímž jsme začínali počítat, s libovolným koeficientem vyjma +1. V tom případě by se totiž oba výrazy navzájem odečetly a bylo by nutné zvolit jinou metodu řešení dané úlohy.

2.2.3.2 Substituční metoda

Substituční metoda umožňuje zavedením nové proměnné převést integrovanou funkci na funkci, kterou lze již integrovat snadněji. Substituční metoda vychází v podstatě z věty o derivování složené funkce (viz vztah (22) v odstavci 1.4.5).

Z věty o derivaci složené funkce a z definice primitivní funkce vyplývá následující úvaha: Nechť existuje k funkci $y = f(t)$ na intervalu $(\alpha; \beta)$ primitivní funkce $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$, tedy pro každé $t \in (\alpha; \beta)$ platí: $F'(t) = f(t)$. Nechť dále funkce $t = g(x)$ má derivaci pro každé $x \in (a; b)$ a pro každé $x \in (a; b)$ nechť je $g(x) \in (\alpha; \beta)$. Dosadíme-li do funkce $F(t)$ za t hodnotu $g(x)$, dostaneme složenou funkci $F\left(g(x)\right)$. Pro derivaci této funkce pro všechna $x \in (a; b)$ platí: $\left[F\left(g(x)\right)\right]' = F'(t).g'(x) = f(t).g'(x) = f\left(g(x)\right).g'(x)$.

To ale znamená, že funkce $F\left(g(x)\right)$ je primitivní funkce k funkci $f\left(g(x)\right).g'(x)$ a lze tedy psát $\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,\mathrm{d}x = F\left(g(x)\right) + C$ v intervalu $(a; b)$.

Vzhledem k tomu, že $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ a že $t = g(x)$, je možné psát $\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$.

<u>VĚTA (O SUBSTITUCI):</u> NECHŤ FUNKCE $F(t)$ JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI $f(t)$ V INTERVALU $(\alpha; \beta)$. NECHŤ FUNKCE $t = g(x)$ MÁ DERIVACI $g'(x)$ V INTERVALU $(a; b)$. PRO KAŽDÉ $x \in (a; b)$ NECHŤ HODNOTA $g(x)$ PATŘÍ DO INTERVALU $(\alpha; \beta)$. PAK V INTERVALU $(a; b)$ JE FUNKCE $F\left(g(x)\right)$ PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI $f\left(g(x)\right).g'(x)$, TJ. PLATÍ

$$\int f\left(g(x)\right).g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{37}$$

KDE $t = g(x)$.

Větu o substituci je možné použít k výpočtu primitivní funkce, podaří-li se funkci, kterou máme integrovat, rozložit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné x s vnitřní funkcí $g(x)$ a druhý je derivací této funkce g.

<u>Příklad:</u> Vypočtěte: $\int x^2 \cos\left(2 - x^3\right)\mathrm{d}x$

<u>Řešení:</u> Postup řešení, které bude uvedeno, není matematicky nejčistší, nicméně je použitelný v každém případě. Ve většině případů je možné postupovat přesně podle uvedené věty a derivaci vnitřní funkce „vidět“ rovnou.

$$\int x^2 \cos\left(2 - x^3\right)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2 - x^3 \\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -3x^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{-3x^2} \end{array} \right| = \int x^2 \cos t \frac{\mathrm{d}t}{-3x^2} = -\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\sin t = -\frac{1}{3}\sin\left(2 - x^3\right) + C$$

Po vyřešení příkladu je nutné se vrátit zpět k proměnným, v nichž byl příklad zadán. V našem případě se tedy vrátit zpět od proměnné t k proměnné x.

Korektnější varianta, která odpovídá přesně substituci podle vztahu (37), spočívá v nalezení derivace funkce přímo v zadání. Zadání je součin dvou funkcí: funkce $h: y = x^2$ a funkce $f: y = \cos\left(2 - x^3\right)$. Je zřejmé, že funkce f je funkce složená - její vnitřní funkce je $g: y = 2 - x^3$. Derivace funkce g (vnitřní funkce funkce f) je $g'(x) = -3x^2$ a ta je až na konstantu -3 rovna funkci h. To znamená, že zadání úlohy upravíme tak, aby bylo identické jako původní zadání, ale přitom tak, aby v něm bylo lépe vidět použití vztahu (37): $\underbrace{-\frac{1}{3}}_{\text{oprava vyplývající z derivace funkce } g(x)} \int \underbrace{\cos\left(2 - x^3\right)}_{f(g(x))}\underbrace{\left(-3x^2\right)}_{g'(x)}\mathrm{d}x$. Podle vztahu (37) a celé věty můžeme tedy psát:

$-\frac{1}{3}\int \cos\left(2 - x^3\right)\left(-3x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\sin t = -\frac{1}{3}\sin\left(2 - x^3\right) + C$. Získali jsme tedy stejný výsledek jako u prvního postupu řešení.

Označení funkcí bylo (ač to vypadá na první pohled nestandardně) zvoleno tak, aby korespondovalo se vztahem (37).

2.3 <u>Určitý integrál</u>

Pojem primitivní funkce (viz odstavec 2.2) velmi úzce souvisí s celou řadou konkrétních úloh, které se týkají výpočtu obsahu rovinných obrazců (viz odstavec 2.4.1), objemu rotačních těles (viz odstavec 2.4.2), … Tyto úlohy jsou založeny na pojmu určitý integrál, který se definuje pomocí primitivní funkce.

Vzhledem k tomu, že primitivní funkce byla definována na otevřeném intervalu a vzhledem k tomu, že určitý integrál je vhodné definovat na intervalu uzavřeném, je nutné pojem primitivní funkce nejdříve rozšířit.

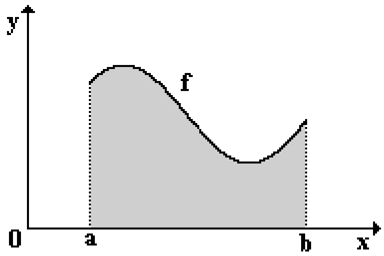
MĚJME DÁNY FUNKCE F A f DEFINOVANÉ NA UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a;b\rangle$. JESTLIŽE PRO KAŽDÉ $x\in\langle a;b\rangle$ PLATÍ $F'(x)=f(x)$, PŘIČEMŽ DERIVACÍ FUNKCE F V BODĚ a ROZUMÍME DERIVACI V BODĚ a ZPRAVA A DERIVACÍ FUNKCE F V BODĚ b ROZUMÍME DERIVACI FUNKCE F V BODĚ b ZLEVA, ŘÍKÁME, ŽE FUNKCE F JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI f NA UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a;b\rangle$.

2.3.1 <u>Pojem určitý integrál</u>

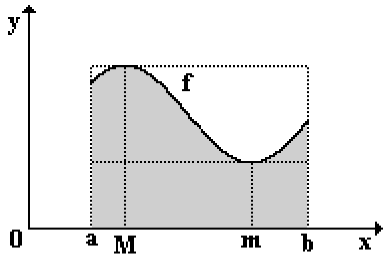
Na obr. 44 je zobrazen graf funkce $y=f(x)$ pro $x\in\langle a;b\rangle$. Funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a;b\rangle$ spojitá a nezáporná. Graf funkce $y=f(x)$ pro $x\in\langle a;b\rangle$, přímky $x=a$, $x=b$ a osa *x* (tj. přímka $y=0$) omezují jistý rovinný útvar. Tento útvar se většinou značí $U=U(a,b,f)$.

Do značení se promítá funkce, která daný útvar omezuje, a meze na ose *x*, kterými je obrazec též omezen.

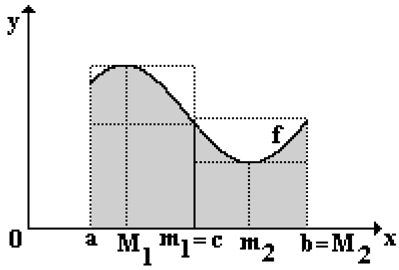
Cílem nyní bude určit obsah tohoto útvaru, tj. určit číslo $S=S(U)$.



obr. 44



obr. 45



obr. 46

Pro první přiblížení hrubého odhadu čísla $S=S(U)$ vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce *f* si označíme její minimum *m* a maximum *M*. Číslo $m(b-a)$ udává plochu obdélníka, který je danému útvaru *U* vepsán, zatímco číslo $M(b-a)$ označuje plochu obdélníka, který je danému útvaru *U* opsán (viz obr. 45). Proto platí i nerovnost: $m(b-a)\le S(U)\le M(b-a)$.

Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval $\langle a;b\rangle$ postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, … částí. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 46 je zobrazeno dělení intervalu $\langle a;b\rangle$ na dvě části, tj. $c-a=b-c$. Na interval $\langle a;c\rangle$ aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum $m_1=c$ a maximum M_1 a vypočteme obsah $m_1(c-a)$ vepsaného obdélníka a obsah $M_1(c-a)$ opsaného obdélníka dané části útvaru *U*. Totéž provedeme na intervalu $\langle c;b\rangle$ a najdeme obsah $m_2(b-c)$ vepsaného obdélníka a obsah opsaného obdélníka $M_2(b-c)$ dané části útvaru *U*.

Pro obsah útvaru *U* tedy v tomto případě platí nerovnost $m_1(c-a)+m_2(b-c)\le S(U)\le M_1(c-a)+M_2(b-c)$.

I ze srovnání obr. 45 a obr. 46 je zřejmé, že rozdělením intervalu $\langle a;b\rangle$ na dvě části se skutečnému obsahu obrazce *U* přiblížíme více.

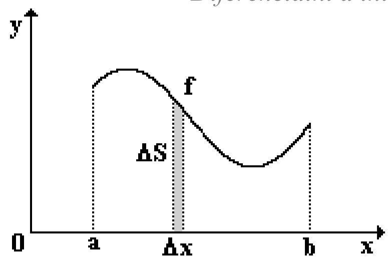
Výše uvedeným postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval $\langle a;b\rangle$, poroste přesnost určení obsahu $S(U)$ útvaru *U*.

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval $\langle a;b\rangle$ na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum i minimum splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 47).

Vyjádřeno matematicky, hledáme takové rozdělení intervalu $\langle a;b\rangle$, pro které platí

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta S}{\Delta x}=f(x), \tag{38}$$

kde Δx je šířka částí, na něž byl rozdělen interval $\langle a;b\rangle$.



obr. 47

Vzhledem k tomu, že Δx má význam délky (resp. šířky dělení intervalu $\langle a; b\rangle$) je $\Delta x > 0$. Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (38).

Limita (38) je podle vztahu (16) derivace funkce *S* podle proměnné *x* v bodě *x* zprava. Můžeme tedy psát $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}(= S')$. S využitím limity (38) získáme $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = f(x)$, odkud dostaneme $\mathrm{d}S = f(x).\mathrm{d}x$.

Poslední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu je postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek plochy na základě přírůstku *x*-ové souřadnice“.

Nyní je možné již pro plochu útvaru *U* psát $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2.3.2 Definice určitého integrálu

NECHŤ F JE PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI f V INTERVALU I. ROZDÍL $F(b) - F(a)$ FUNKČNÍCH HODNOT V LIBOVOLNÝCH BODECH a A b TOHOTO INTERVALU SE NAZÝVÁ URČITÝ INTEGRÁL FUNKCE f V MEZÍCH OD a DO b A ZNAČÍ SE $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

V právě uvedené definici se proměnná *x* nazývá **integrační proměnná**, číslo *a* **dolní mez integrálu**, číslo *b* **horní mezi integrálu**. Funkce *f* se nazývá **integrand**. Z definice plyne, že určitý integrál je reálné číslo, které je jednoznačně určené funkcí *f* a mezemi *a* a *b*.

Při výpočtu integrálu je vhodné zapsat primitivní funkci *F* ještě před dosazením mezí. Používá se tento zápis

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a). \tag{39}$$

Pro čísla *a* a *b* přitom může platit jedna z nerovností $a < b$, $a > b$ nebo rovnost $a = b$.

Geometrická interpretace určitého integrálu má smysl pouze pro $a < b$ a pro funkci *f*, která je v intervalu $\langle a; b\rangle$ spojitá a nezáporná. Za těchto podmínek lze s využitím určitého integrálu určit obsah útvaru *U*, který je ohraničen grafem funkce *f*, osou *x* a přímkami $x = a$ a $x = b$.

<u>VĚTA:</u> KE KAŽDÉ SPOJITÉ FUNKCI V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a; b\rangle$ EXISTUJE V TOMTO INTERVALU PRIMITIVNÍ FUNKCE.

2.3.3 Výpočty určitých integrálů

Při výpočtu určitých integrálů se využívá znalostí některých vět, které (podobně jako u derivací) usnadní výpočet určitého integrálu.

Důležité je uvědomit si, že výsledem určitého integrálu je **<u>číslo</u>**, tedy ve výsledku se **<u>nesmí</u>** objevit integrační proměnná. Ve výsledku neurčitého integrálu (primitivní funkce) se objevit mohla, protože výsledkem neurčitého integrálu (primitivní funkce) je **<u>funkce</u>**.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ f_1 A f_2 JSOU V INTERVALU I SPOJITÉ FUNKCE, a A b NECHŤ JSOU LIBOVOLNÉ BODY Z INTERVALU I A c_1 A c_2 LIBOVOLNÉ REÁLNÉ KONSTANTY. POTOM PLATÍ

$$\int\limits_a^b \left(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right)\mathrm{d}x = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$

Vztah (40) je analogický vztahu (32), který platí pro výpočet primitivních funkcí.

VĚTA: JE-LI f FUNKCE SPOJITÁ A NEZÁPORNÁ V INTERVALU $\langle a;b\rangle$, PAK $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

VĚTA: JSOU-LI f A g FUNKCE SPOJITÉ V INTERVALU $\langle a;b\rangle$ A JE-LI $f(x)\geq g(x)$, PAK $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Určitý integrál je možné vypočítat i v případě, kdy je dolní mez integrálu větší než mez horní mez integrálu. Platí věta o záměně mezí určitého integrálu.

V tomto případě ale integrál nemá fyzikální aplikaci nebo geometrickou aplikaci.

VĚTA: PŘI ZÁMĚNĚ MEZÍ URČITÉHO INTEGRÁLU SE MĚNÍ ZNAMÉNKO, TJ. PLATÍ

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x. \qquad (41)$$

VĚTA (O ADITIVNOSTI URČITÉHO INTEGRÁLU): JE-LI FUNKCE f SPOJITÁ V INTERVALU I, KTERÝ OBSAHUJE LIBOVOLNĚ POLOŽENÉ BODY a, b A c, PAK PLATÍ

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (42)$$

V předchozí větě je uvedeno, že body a, b a c mohou být v intervalu umístěné libovolně. Nezávisí tedy na tom, které z čísel bude větší a které menší. Na základě vztahu (41) totiž umíme počítat i integrál, jehož horní mez je menší než dolní mez.

V případě, že zadaný integrál není možné vypočítat elementárními metodami (tj. právě uvedenými metodami), většinou stačí jeho výsledek odhadnout. K tomu slouží následující věta.

VĚTA: JE-LI f FUNKCE SPOJITÁ V INTERVALU $\langle a;b\rangle$ A PLATÍ-LI V INTERVALU $\langle a;b\rangle$ NEROVNOSTI $m \leq f(x) \leq M$, POTOM PLATÍ

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a). \qquad (43)$$

Používat správně vztah (43) znamená dobře se orientovat ve výpočtech primitivních funkcí a určitých integrálů a mít vhled do problematiky, kterou pomocí vztahu (43) řešíme (vědět, co lze případně v rámci dané aplikace zanedbat a co již ne, mít řádovou představu o hledaném řešení, …). Proto se s touto metodou řešení integrálů ve středoškolské matematice příliš často nesetkáme.

Existují i další metody řešení určitých integrálů, které jsou analogické jako metody hledání primitivních funkcí (viz odstavec 2.2.3).

2.3.3.1 Substituce v určitém integrálu

Substituční metodu, která se používá k výpočtu primitivní funkce (viz odstavec 2.2.3.2), je možné použít i pro výpočet určitých integrálů, pokud bude dodrženo jedno z následujících pravidel. V případě zavedení nové proměnné se podle zvolené substituce také změní meze určitého integrálu. Pokud přepočet mezí bude náročný, je možné při integraci s nově zavedenou substituční proměnnou použít obecné meze (např. α a β) a po zintegrování dané funkce se vrátit zpět k původní proměnné a tedy i k původním mezím.

VĚTA: JSOU-LI FUNKCE $t = g(x)$ A JEJÍ DERIVACE $g'(x)$ SPOJITÉ V UZAVŘENÉM INTERVALU $\langle a;b\rangle$ A JE-LI ZÁROVEŇ SPOJITÁ I FUNKCE $f(t)$ PRO VŠECHNA $t = g(x)$, KDE $x \in \langle a;b\rangle$, PAK PLATÍ

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t. \qquad (44)$$

Přepočet mezí vyplývá z porovnání horních mezí a dolních mezí v integrálu na levé straně vztahu (44) a integrálu na jeho pravé straně.

Použití této věty ukážeme na příkladu.

Příklad: Vypočtěte: $\int_{-\pi}^{2\pi} 4\sin x.\cos x\mathrm{d}x$.

Řešení: Ukážeme tři způsoby řešení daného příkladu (ve všech případech budou meze při substituci přepočteny):

a) metoda použití goniometrického vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4\sin x.\cos x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{2\pi} 2\sin 2x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2} \end{array} \right| = \int_{-2\pi}^{4\pi} 2\sin t \frac{\mathrm{d}t}{2} = \int_{-2\pi}^{4\pi} \sin t\mathrm{d}t = \left[-\cos t\right]_{-2\pi}^{4\pi} =$$

$$= -\cos 4\pi - \left(-\cos\left(-2\pi\right)\right) = -\cos 4\pi - \left(-\cos 2\pi\right) = -1 + 1 = 0\ ;$$

b) metoda přímé integrace bez použití goniometrických vztahů:

$$\int_{-\pi}^{2\pi} 4\sin x.\cos x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sin x} \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} 4\sin x.t\left(-\frac{\mathrm{d}t}{\sin x}\right) = -4\int_{-1}^{1} t\mathrm{d}t = -4\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = -2\left[t^2\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -2\left(1 - \left(-1\right)^2\right) = 0\ ;$$

c) metoda přímé integrace přesně podle vztahu (44):

Zadání je napsáno ve formě součinu dvou funkcí: $g: y = \sin x$ a $h: y = \cos x$. Pro funkci *f*, která vystupuje ve vztahu (44), platí $f: y = 1$. Je zřejmé, že funkce *h* je derivací funkce *f*, takže s ohledem na vztah (44) můžeme zadání psát ve tvaru: $4\int_{-\pi}^{2\pi} \underbrace{\sin x}_{f(g(x))} . \underbrace{\cos x}_{g'(x)}\mathrm{d}x$. Dalšími úpravami dostaneme:

$$4\int_{-\pi}^{2\pi} \sin x.\cos x\mathrm{d}x = \left|t = \sin x\right| = 4\int_{0}^{0} t\mathrm{d}t = 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^0 = 2\left[t^2\right]_0^0 = 2.\left(0 - 0\right) = 0\ .$$

Výpočet posledního integrálu by mohl být rychlejší vzhledem k tomu, že horní mez i dolní mez jsou stejné, ale pro názornost byl dopočítán běžným způsobem.

Při řešení tohoto příkladu si můžeme všimnout i toho, že dvěma různými metodami (část a) a b)) jsme získali dvě různé primitivní funkce k zadané funkci $f: y = 4\sin x.\cos x$ a to: $F_{\mathrm{a})}: y = -\cos 2x$ a $F_{\mathrm{b})}: y = -2\cos^2 x$. Otázkou je, zda se obě funkce liší o konstantu, tak jak odpovídá definici primitivní funkce podle vztahu (29) resp. (30). To je možné zjistit jednoduchou úpravou s využitím goniometrických vztahů:

$$F_{\mathrm{a})} - F_{\mathrm{b})} = -\cos 2x - \left(-2\cos^2 x\right) = -\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 2\cos^2 x = -\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1\ .$$

Rozdíl obou primitivních funkcí je konstantní, což je v souladu s definicí primitivní funkce.

2.3.3.2 Metoda per partes v určitém integrálu

Stejně jako pro výpočet primitivní funkce bylo možné použít metodu per partes (viz odstavec 2.2.3.1), je možné tuto metodu použít i u určitého integrálu.

VĚTA: MAJÍ-LI FUNKCE $u = u\left(x\right)$ A $v = v\left(x\right)$ V INTERVALU $\langle a; b\rangle$ SPOJITÉ DERIVACE, PAK PLATÍ

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} u\left(x\right).v'\left(x\right)\mathrm{d}x = \left[u\left(x\right).v\left(x\right)\right]_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} - \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} u'\left(x\right).v\left(x\right)\mathrm{d}x\ . \qquad (45)$$

Vztah (45) popisující metodu per partes u určitého integrálu je analogický vztahu (36), který popisuje tutéž metodu u neurčitého integrálu (tj. při hledání primitivních funkcí k zadaným funkcím).

Příklad: Vypočtěte: $\int_{1}^{2\mathrm{e}} \frac{1}{2}\ln x\mathrm{d}x$

Řešení: Tento příklad uvádíme proto, aby nikoho nepřekvapilo, že je možné integrovat přirozený logaritmus, ačkoliv v tabulce tab. 1 v odstavci 1.4.5 není uveden. A to metodou per partes. Během výpočtu je třeba dávat pozor na to, že se jedná o integrál určitý a psát tedy důsledně integrační meze:

$$\int_{1}^{2\mathrm{e}} \frac{1}{2}\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{2\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{1}^{2\mathrm{e}} 1.\ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \frac{1}{2}\left(\left[x\ln x\right]_1^{2\mathrm{e}} - \int_{1}^{2\mathrm{e}} x.\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\left[x\ln x\right]_1^{2\mathrm{e}} - \int_{1}^{2\mathrm{e}} \mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[x\ln x\right]_1^{2\mathrm{e}} - \left[x\right]_1^{2\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{2}\left(2e\ln 2e - 1.\ln 1 - \left(2e - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(2e\ln 2e - 1.0 - 2e + 1\right) =$$

$$= e(\ln 2e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + \ln e - 1) + \frac{1}{2} = e(\ln 2 + 1 - 1) + \frac{1}{2} = e\ln 2 + \frac{1}{2}$$

2.4 Užití integrálního počtu

Užití integrálního počtu je velmi široké: výpočty obsahů rovinných útvarů, objemů a povrchů rotačních těles, délek rovinných křivek, řešení úloh z fyziky, elektrotechniky, mechaniky, …

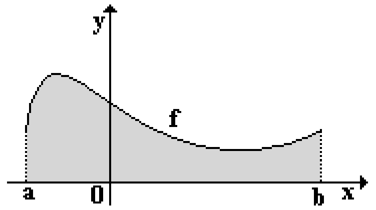
2.4.1 Obsah rovinného obrazce

2.4.1.1 Útvar omezený grafem jedné funkce

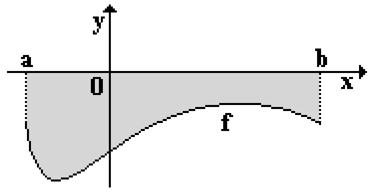
Rovinný útvar $U = U(a, b, f)$ je (jak bylo uvedeno již v odstavci 2.3.1) omezen grafem spojité nezáporné funkce $y = f(x)$ pro $x \in \langle a; b\rangle$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou *x* (tj. přímkou $y = 0$). Příklad takového útvaru je znázorněn na obr. 48. Pro jeho obsah pak platí: $S(U) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Může se ale stát, že integrovaná funkce *f* nenabývá jen kladných hodnot (viz obr. 49). Pro příslušný integrál pak platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le 0$. V tomto případě určíme obsah daného útvaru tak, že vypočítáme absolutní hodnotu příslušného určitého integrálu; tedy platí: $S(U) = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$.

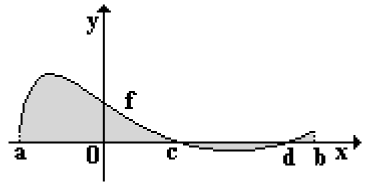
Je-li totiž $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le 0$, pak $-\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.



obr. 48



obr. 49



obr. 50

Obecně se ovšem může stát, že daná funkce *f* nabývá v uvažovaném intervalu $\langle a; b\rangle$ jak kladných funkčních hodnot, tak i záporných funkčních hodnot. V tomto případě interval $\langle a; b\rangle$ rozdělíme na intervaly, v nichž funkce nabývá nekladných funkčních hodnot (resp. nezáporných funkčních hodnot), a příslušné integrály vypočteme podle výše uvedených vztahů. Pro obrazec na obr. 50 tedy bude platit vztah vyplývající z aditivnosti určitého integrálu (vztah (42)) $S(U) = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

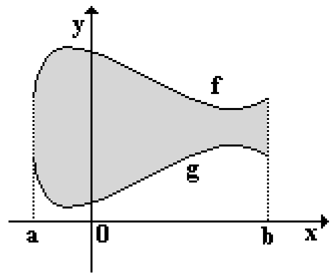
V každém případě musí být obsah jakékoliv plochy (ať už je nad osou *x* nebo pod osou *x*) kladný (nebo nulový).

2.4.1.2 Útvar omezený grafy více funkcí

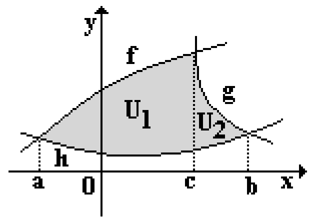
Na obr. 51 je znázorněn útvar $U = U(a, b, f, g)$, který je omezen grafem spojitých funkcí *f* a *g* a přímkami $x = a$ a $x = b$. Pro všechna $x \in \langle a; b\rangle$ platí $f(x) \ge g(x)$ a obě funkce jsou v uvažovaném intervalu nezáporné. Označíme-li $S(U_1) = S(U(a, b, f))$ a $S(U_2) = S(U(a, b, g))$, pak pro obsah útvaru *U* platí: $S(U) = S(U_1) - S(U_2)$, tj.

$$S(U) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{46}$$

Pomocí integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ totiž vypočteme obsah plochy ohraničené grafem funkce *f*, osou *x* a přímkami $x = a$ a $x = b$. To je ale víc, než je obsah vyšrafovaného obrazce na obr. 51. Proto musíme odečíst tu část plochy, která leží pod grafem funkce *g* (až k ose *x*) ve stejných mezích.



obr. 51



obr. 52

Vztah (46) platí i v případě, kdy alespoň jedna z funkcí nabývá v intervalu $\langle a; b\rangle$ také záporných hodnot. Posunutím obou grafů po ose *y* tak, aby obě funkce byly nezáporné, převedeme tento případ na předchozí. Posunem obou křivek se obsah daného útvaru nezmění.

Na obr. 52 je znázorněn případ útvaru, který je na intervalu $\langle a; b\rangle$ ohraničen třemi křivkami. V tomto případě platí $S(U) = S(U_1) + S(U_2)$, přičemž průnikem útvarů U_1 a U_2 je hraniční úsečka. Plochu útvaru *U* pak vypočítáme na základě vztahu

$$S(U) = \int_a^c \left[f(x) - h(x)\right]\mathrm{d}x + \int_c^b \left[g(x) - h(x)\right]\mathrm{d}x\,. \tag{47}$$

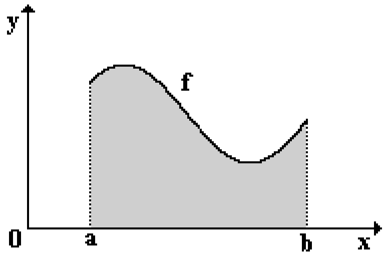
Vztahy (46) a (47) jsou podobné - liší se počtem funkcí, které ohraničují daný plošný útvar *U*. Není nutné se učit tyto vztahy nazpaměť. Je důležité chápat význam určitého integrálu a jeho souvislost s obsahem plochy pod grafem dané funkce. U konkrétní úlohy pak „správný vzorec“ vymyslíme snadno.

Ani v tomto případě nezávisí na znaménkách funkčních hodnot funkcí *f*, *g* a *h* v intervalu $\langle a; b\rangle$.

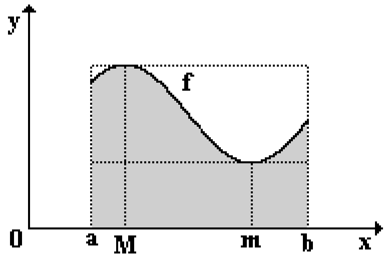
2.4.2 Objem rotačního tělesa

Nyní se budeme zabývat výpočtem objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru $U = U(a, b, f)$ kolem osy *x*. Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 2.3.1).

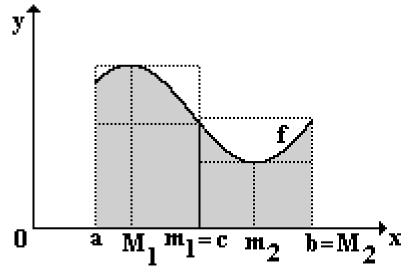
Na obr. 53 je zobrazen rovinný útvar, jehož rotací kolem osy *x* vznikne rotační těleso. Jeho objem označíme *V*.



obr. 53



obr. 54



obr. 55

Pro první přiblížení hrubého odhadu objemu *V* vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce *f* si označíme minimum funkce *m* a maximum funkce *M*. Číslo *m* označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo *M* označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 54, který znázorňuje rovinný útvar rotující kolem osy *x*). Pro hledaný objem rotačního tělesa platí tedy nerovnost: $\pi m^2 (b-a) \le V \le \pi M^2 (b-a)$.

Při rotaci vyšrafovaného útvaru z obr. 53 se každý bod daného útvaru pohybuje po kružnici, jejíž střed leží na ose *x* a jejíž poloměr je roven vzdálenosti tohoto bodu od osy *x*. Např. obdélník o rozměrech *M* a $b-a$ z obr. 54 při rotaci kolem osy *x* tedy vytvoří válec o poloměru *M* a výšce $b-a$.

Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval $\langle a; b\rangle$ postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, … části. Na každou takto vytvořenou část znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 55 je zobrazeno dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ na dvě části tj. platí $c-a = b-c$. Na interval $\langle a; c\rangle$ aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum funkce $m_1 = c$ a maximum funkce M_1 a vypočteme objem $\pi m_1^2 (c-a)$ vepsaného válce dané části rotačního tělesa a objem $\pi M_1^2 (c-a)$ opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu $\langle c; b\rangle$ a najdeme objem $\pi m_2^2 (b-c)$ vepsaného válce dané části rotačního tělesa a objem $\pi M_2^2 (b-c)$ opsaného válce dané části rotačního tělesa.

Pro objem *V* rotačního tělesa tedy platí nerovnost $\pi m_1^2 (c-a) + \pi m_2^2 (b-c) \le V \le \pi M_1^2 (c-a) + \pi M_2^2 (b-c)$.

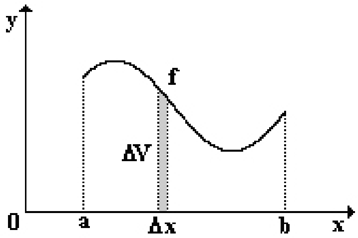
Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval $\langle a; b \rangle$, poroste přesnost určení objemu rotačního tělesa, které vzniklo rotací útvaru *U* kolem osy *x*.

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval $\langle a; b \rangle$ na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum funkce na daném intervalu splývá s minimem funkce na tomtéž intervalu. Jinými slovy, že šířka jedné takové části je skoro nulová (viz obr. 56).

Hledáme tedy takové rozdělení intervalu $\langle a; b \rangle$, pro které platí

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \pi f^2(x), \tag{48}$$

kde Δx je šířka částí, na něž byl rozdělen interval $\langle a; b \rangle$.



obr. 56

Vzhledem k tomu, že Δx má význam délky (resp. šířky dělení intervalu $\langle a; b \rangle$) je $\Delta x > 0$. Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (48).

Limita (48) je ovšem (dle vztahu (16)) derivace funkce *V* podle proměnné *x* v bodě *x* zprava. Můžeme tedy psát $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \left(= V'\right)$. S využitím limity (48) pak dostaneme: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \pi f^2(x)$, odkud získáme $\mathrm{d}V = \pi f^2(x)\mathrm{d}x$.

Poslední provedená úprava není matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu je postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek objemu na základě přírůstku *x*-ové souřadnice".

Závěry tedy můžeme shrnout do následující věty.

VĚTA: OBJEM V ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ ÚTVARU $U = U(a, b, f)$ KOLEM OSY x, JE DÁN VZTAHEM

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{49}$$

Analogicky bychom postupovali v případě, že těleso vznikne rotací rovinného útvaru $U = U(a, b, f)$ kolem osy *y*. V tomto případě by bylo nutné místo funkce $f = f(x)$, která útvar ohraničuje, vyjádřit funkci inverzní, tj. funkci $g = g(y)$. Dále by bylo nutné přepočítat meze, kterými je dané těleso ohraničeno.

Tyto meze vstupují pak do určitého integrálu, pomocí kterého určujeme objem daného rotačního tělesa. Tyto meze v tomto případě hledáme na ose *y*.

VĚTA: OBJEM V ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ ÚTVARU $U = U(a, b, f)$ KOLEM OSY y, JE DÁN VZTAHEM

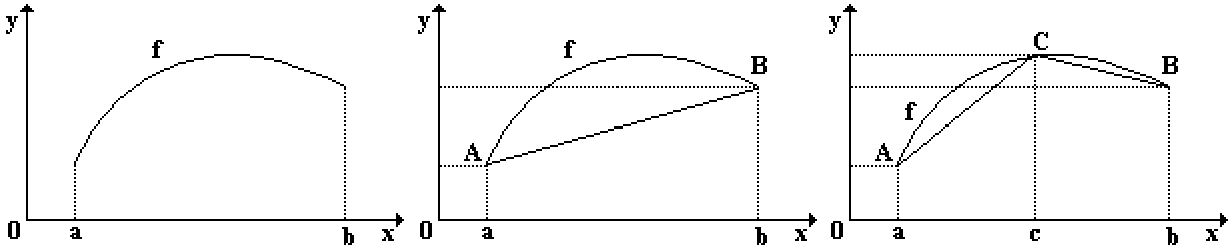
$$V = \pi \int_{y_1}^{y_2} g^2(y)\mathrm{d}y. \tag{50}$$

Vztahy (49) a (50) jsou formálně stejné, liší se jen osou, kolem které zadaný útvar rotuje a na které tedy pak hledáme meze vymezující rotující útvar.

2.4.3 Délka křivky

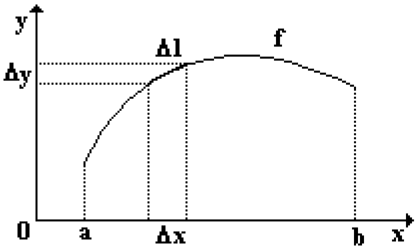
Pro výpočet délky křivky provedeme podobné úvahy, jako při odvozování obsahu plošného útvaru ohraničeného grafem funkce (viz odstavec 2.4.1) nebo při odvozování objemu rotačního tělesa (viz odstavec 2.4.2).

Na obr. 57 je zobrazena spojitá funkce *f*, jejíž graf představuje určitou křivku. Její délku *l* v intervalu $\langle a; b \rangle$ chceme nyní určit. Jako první odhad délky poslouží délka úsečky *AB* spojující krajní body dané křivky na zadaném intervalu (viz obr. 58). Lepší odhad ostaneme, pokud interval $\langle a; b\rangle$ rozdělíme na více částí (viz obr. 59): zde délku křivky (grafu funkce *f*) aproximujeme délkou lomené čáry *ACB*.



obr. 57 *obr. 58* *obr. 59*

Právě uvedeným postupem je možné pokračovat dále. S rostoucím počtem úseků lomené čáry, která nahradí uvažovanou křivku, bude očekávaný výsledek (tj. délka lomené čáry *A*...*B*) přesnější a bude se stále více blížit délce skutečné křivky. Ideální by bylo, kdybychom interval $\langle a; b\rangle$ rozdělili na velké množství částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že lomená čára je přesně stejná, jako délka křivky na zvolené části intervalu $\langle a; b\rangle$. Jinými slovy hledáme takové rozdělení intervalu $\langle a; b\rangle$, při němž se délka jedné části intervalu $\langle a; b\rangle$ blíží nule, tj. $\Delta x \to 0$ (viz obr. 60).



obr. 60

Na základě obr. 60 je možné pro element Δl délky křivky l podle Pythagorovy věty psát $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Tento vztah je možné dále upravit na tvar $\Delta l = \Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Vzhledem k tomu, že požadujeme, aby se délka Δx jedné části intervalu $\langle a; b\rangle$ limitně blížila nule, bude se limitně blížit nule i přírůstek délky křivky Δl. Můžeme tedy psát

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\Delta l}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,. \tag{51}$$

Vzhledem k tomu, že Δx má význam délky (resp. šířky dělení intervalu $\langle a; b\rangle$) je $\Delta x > 0$. Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (51).

Limita (51) ale je derivace funkce *l* podle proměnné *x* v bodě *x* zprava (viz vztah (16)). Můžeme tedy psát $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta l}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}$. Analogicky můžeme pro podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ v součtu pod odmocninou psát $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$.

S využitím limity (51) a právě uvedeného vztahu dostáváme $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$, odkud lze vyjádřit $\mathrm{d}l = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

Poslední provedené úpravy nejsou matematicky zcela v pořádku, nicméně pro získání správné představy základů integrálního počtu jsou postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) je úprava naprosto v pořádku, protože umožňuje vypočítat „kousek délky křivky na základě přírůstku *x*-ové souřadnice“.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA FUNKCE f, KTERÁ JE SPOJITÁ V INTERVALU $\langle a; b\rangle$ A KTERÁ MÁ VE VŠECH JEHO VNITŘNÍCH BODECH DERIVACI. DÉLKA l KŘIVKY, KTERÁ JE GRAFEM TÉTO FUNKCE f NA INTERVALU $\langle a; b\rangle$, JE DÁNA VZTAHEM

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{52}$$

U řady funkcí je velmi obtížné vypočítat tento integrál, protože obsahuje odmocninu z výrazu, v němž vystupuje kvadrát derivace funkce. Pro výpočet délky křivky na daném intervalu je tedy nutné volit některé speciální substituce, které výpočet zjednoduší.

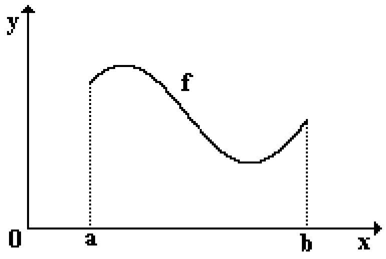
2.4.4 Povrch rotačního tělesa

Nyní se budeme zabývat výpočtem povrchu rotační plochy, která vznikne rotací grafu spojité funkce f kolem osy x.

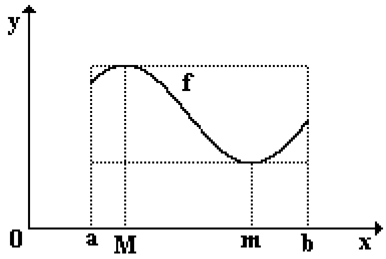
Bude nás zajímat jen povrch rotační plochy, tj. obsah pláště rotačního tělesa - nebudeme tedy uvažovat podstavy rotačního tělesa. Vzhledem k tomu, že bude rotovat jen graf funkce (tj. „čára“), bude těleso duté. Analogicky by ale bylo možné postupovat i tehdy, když by rotoval nějaký útvar, který je grafem funkce f ohraničený.

Úvahy, pomocí nichž dospějeme k výslednému vztahu, budou podobné jako úvahy, které vedly k definici určitého integrálu (viz odstavec 2.3.1).

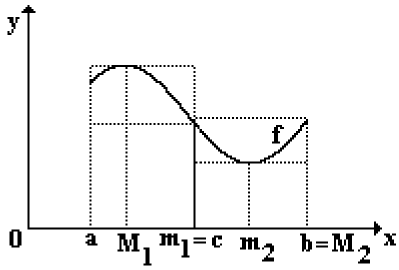
Na obr. 61 je zobrazen graf spojité funkce f definované na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, jehož rotací kolem osy x vznikne rotační plocha (resp. rotační těleso). Povrch této rotační plochy označíme S.



obr. 61



obr. 62



obr. 63

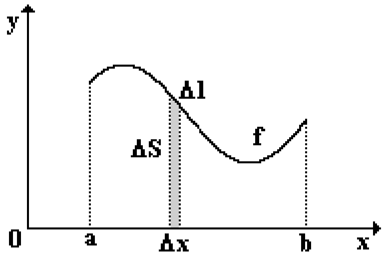
Pro první přiblížení hrubého odhadu povrchu S vzniklého tělesa vyjdeme z následující úvahy: V grafu funkce f si označíme její minimum m a její maximum M. Číslo m označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu vepsán, zatímco číslo M označuje poloměr válce, který je rotačnímu tělesu opsán (viz obr. 62, který znázorňuje graf funkce f rotující kolem osy x). Pro hledaný povrch rotačního tělesa platí tedy nerovnost: $2\pi m(b-a) \leq S \leq 2\pi M(b-a)$.

Tento odhad je pouze orientační a je možné ho dále zpřesnit tak, že budeme interval $\langle a; b\rangle$ postupně dělit na dvě, tři, čtyři, pět, … části. Na každé takto vytvořené části znovu zopakujeme předcházející úvahu. Na obr. 63 je zobrazeno dělení intervalu $\langle a; b\rangle$ na dvě části, přičemž platí $c-a=b-c$. Na interval $\langle a; c\rangle$ aplikujeme výše uvedenou úvahu: najdeme minimum funkce $m_1 = c$ a maximum funkce M_1 a vypočteme povrch $2\pi m_1(c-a)$ vepsaného válce dané části rotačního tělesa a povrch $2\pi M_1(c-a)$ opsaného válce dané části rotačního tělesa. Totéž provedeme na intervalu $\langle c; b\rangle$ a najdeme povrch $2\pi m_2(b-c)$ vepsaného válce této části rotačního tělesa a povrch $2\pi M_2(b-c)$ opsaného válce dané části rotačního tělesa.

Pro povrch S pláště rotačního tělesa tedy platí nerovnost $2\pi m_1(c-a)+2\pi m_2(b-c) \leq S \leq 2\pi M_1(c-a)+2\pi M_2(b-c)$.

Tímto postupem bychom mohli pokračovat dále. S rostoucím počtem dílů, na něž rozdělíme interval $\langle a; b\rangle$, poroste přesnost určení povrchu rotačního tělesa, které vzniklo rotací grafu funkce f kolem osy x.

Nejpřesnější výsledek dostaneme, pokud by se nám povedlo rozdělit interval $\langle a; b\rangle$ na velké množství velmi úzkých částí, u nichž bychom mohli předpokládat, že jsou natolik úzké, že maximum funkce i minimum funkce téměř splývají. Jinými slovy, že šířka jedné takové části se limitně blíží nule (viz obr. 64).



obr. 64

Hledáme tedy takové rozdělení intervalu $\langle a; b\rangle$, pro které platí

$$\lim_{\Delta l\to 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = 2\pi f(x), \tag{53}$$

kde Δl je délka části grafu funkce f, která odpovídá části Δx intervalu $\langle a; b\rangle$.

Element délky Δl grafu funkce f představuje výšku elementárníhoválečku, který na části Δx intervalu $\langle a; b\rangle$ nahrazuje rotační těleso.

Vzhledem k tomu, že Δl má význam délky části křivky grafu funkce *f* je $\Delta l > 0$. Proto jsme uvažovali pouze jednostrannou limitu (53).

Limita (53) je (podle vztahu (16)) derivace funkce *S* podle proměnné *l* v bodě *l* zprava. Můžeme tedy psát $\lim\limits_{\Delta l \to 0^+} \frac{\Delta S}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}l}$. Na základě limity (53) pak dostaneme: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}l} = 2\pi f(x)$, odkud získáme $\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\,\mathrm{d}l$.

Element $\mathrm{d}l$ délky grafu funkce *f* je možné napsat podle odvození z odstavce 2.4.3 ve tvaru: $\mathrm{d}l = \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$. Pro element $\mathrm{d}S$ povrchu uvažovaného rotačního tělesa pak lze tedy psát: $\mathrm{d}S = 2\pi f(x)\,\mathrm{d}l = 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$. Odtud pak dostáváme $S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

Poslední provedené úpravy, jak už víme, nejsou matematicky zcela v pořádku. Nicméně pro získání základní představy „odvození" vztahu pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa jsou postačující. Z fyzikálního hlediska (nebo geometrického hlediska) jsou úpravy v pořádku, protože umožňují vypočítat „kousek povrchu pláště rotačního tělesa na základě přírůstku *x*-ové souřadnice (resp. délky křivky)". Odvození na úrovni vysoké školy je náročnější, i když jednodušší. Jednodušší proto, že okamžitě vyplývá z jistých matematických vět týkajících se výpočtů určitých integrálů, náročnější proto, že dokázat a pochopit tyto věty není na úrovni střední školy zcela triviální.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA FUNKCE f, KTERÁ JE SPOJITÁ V INTERVALU $\langle a;b\rangle$ A KTERÁ MÁ VE VŠECH JEHO VNITŘNÍCH BODECH DERIVACI. POVRCH S PLÁŠTĚ ROTAČNÍHO TĚLESA, KTERÉ VZNIKNE ROTACÍ GRAFU TÉTO FUNKCE f KOLEM OSY x, JE DÁN VZTAHEM

$$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{54}$$

Výpočet tohoto integrálu není triviální - viz poznámka na konci odstavce 2.4.3.

Analogicky bychom definovali vztah pro výpočet povrchu pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce kolem osy *y*.