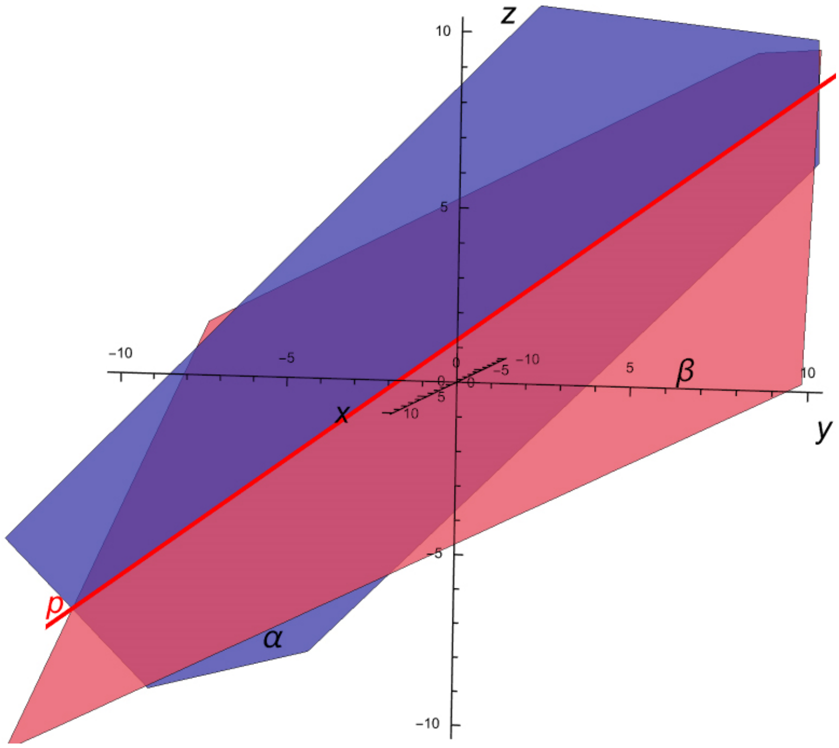
Zadání úlohy

Určete vzájemnou polohu rovin daných obecnými rovnicemi $\alpha: x+2y-2z+3=0$ a $\beta: x-y+2z-2=0$. Jsou-li roviny různoběžné, určete rovnici jejich průsečnice.

Řešení úlohy

Ze zadaných rovnic vypíšeme souřadnice normálových vektorů: $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;-2)$ a $\overrightarrow{n_\beta}=(1;-1;2)$. Jak je patrné, jeden vektor není násobkem druhého, takže jsou tyto vektory různoběžné. Proto jsou různoběžné i zadané roviny. Situace je zobrazena na obr. 1.



obr. 1

Hledat průsečnici zadaných rovin, o kterých jsme právě dokázali, že jsou různoběžné, můžeme nyní dvěma způsoby. První způsob bude více algebraický, druhý více analytický (geometrický).

Pokud budeme chtít vyjádřit rovnici průsečnice p zadaných rovin, je třeba mít na pamětí, že můžeme použít pouze parametrické vyjádření (jiné vyjádření přímka v prostoru nemá). Na průsečnici rovin leží ty body, které leží současně v obou rovinách. A protože obecná rovnice roviny popisuje vztah mezi souřadnicemi libovolných bodů ležících v dané rovině, stačí z algebraického hlediska řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+2y-2z+3&=0 \\ x-y+2z-2&=0 \end{aligned}. \qquad (1)$$

Jedná se o soustavu dvou rovnic o třech neznámých. Ale protože tato soustava řešení mít musí (roviny jsou různoběžné a jejich společné body existují), můžeme jednu neznámou volit jako parametr a ostatní dvě vyjádřit pomocí tohoto parametru. Je rozumné volit za parametr proměnnou *x*, ale není to nutné.

Sečtením rovnic (1) získáme rovnici $2x+y+1=0$, z níž je možné vyjádřit $y=-2x-1$. Po vynásobení druhé rovnice soustavy (1) dvěma a následným sečtením rovnic dostaneme rovnici $3x+2z-1=0$, odkud lze vyjádřit $z=\frac{1-3x}{2}$. Společnými body zadaných rovin jsou tedy body, jejichž souřadnice lze psát ve tvaru

$$\mathrm{P} = \left\{ \left[x; -2x-1; \frac{1-3x}{2} \right]; x \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Bod se souřadnicemi (2) lze psát též ve tvaru $\mathrm{P} = \left\{ \left[0+x; -1-2x; \frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \right]; x \in \mathbb{R} \right\}$, ze kterého bude názorněji patrné vytvoření parametrického vyjádření přímky. Znovu si uvědomme, že body P jsou společné body obou rovin, tedy to jsou body hledané průsečnice p. Proto lze průsečnici p psát v parametrickém vyjádření

$$\begin{aligned} p: x &= t \\ y &= -1-2t; \\ z &= \frac{1}{2}-\frac{3}{2}t; t \in \mathbb{R} \end{aligned} . \tag{3}$$

Pochopitelně, že toto vyjádření průsečnice p zadaných rovin není jediné možné. Ekvivalentní parametrické vyjádření bychom získali, kdybychom jako parametr zvolili neznámou y nebo neznámou z.

Druhý způsob hledání průsečnice p obou rovin využívá geometrické vlastnosti uvažovaných objektů. Průsečnice p obou rovin leží v obou rovinách. Směrový vektor $\vec{s}$ přímky p je tedy kolmý k oběma normálovým vektorům $\overrightarrow{n_\alpha}$ a $\overrightarrow{n_\beta}$ zadaných rovin. Souřadnice směrového vektoru $\vec{s}$ můžeme tedy najít pomocí vektorového součinu (výsledný vektor je totiž kolmý k oběma vektorově násobeným vektorům). Platí tedy

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = (2; -4; -3). \tag{4}$$

V parametrickém vyjádření přímky p v prvním způsobu řešení úlohy (viz vztahy (3)) je uveden směrový vektor $\vec{s_1} = \left(1; -2; -\frac{3}{2}\right)$. A je zjevné, že platí $\vec{s} = 2\vec{s_1}$, a proto i vektor $\vec{s}$ je směrovým vektorem přímky p.

Nyní musíme znát souřadnice ještě jednoho bodu, kterým přímka p prochází. Těchto bodů je nekonečně mnoho a všechny leží jak na přímce p, tak v obou rovinách. Stačí proto zvolit x-ovou souřadnici tohoto hledaného bodu A např. $x_\mathrm{A} = 0$ a dosadit do rovnic popisujících obě zadané roviny, tj. do soustavy (1). Získáme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2y_\mathrm{A} - 2z_\mathrm{A} + 3 &= 0 \\ -y_\mathrm{A} + 2z_\mathrm{A} - 2 &= 0 \end{aligned} , \tag{5}$$

jejímž kořeny jsou $y_\mathrm{A} = -1$ a $z_\mathrm{A} = \frac{1}{2}$. Můžeme tedy psát parametrické vyjádření přímky p ve tvaru:

$$\begin{aligned} p: x &= 2k \\ y &= -1-4k; \\ z &= \frac{1}{2}-3k; k \in \mathbb{R} \end{aligned} . \tag{6}$$

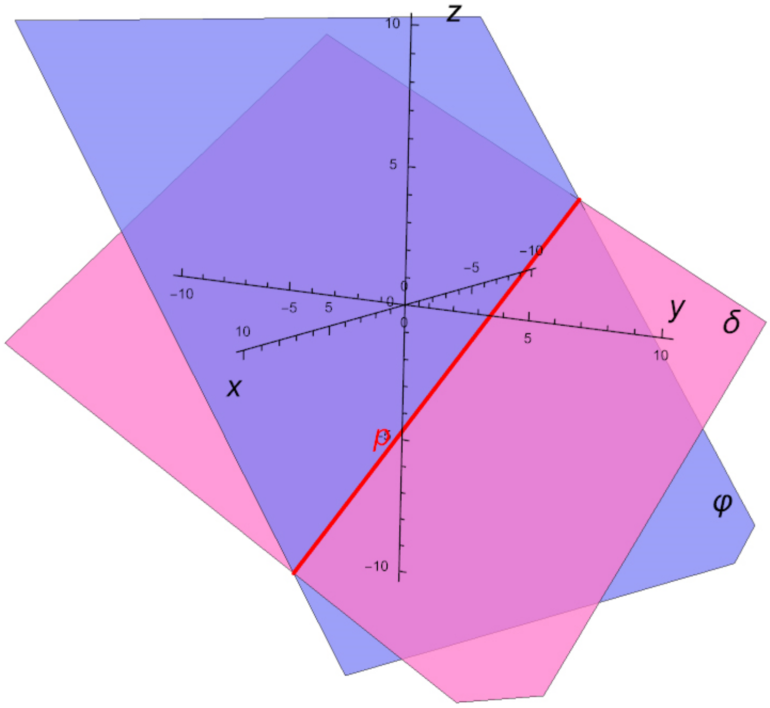
Porovnáním parametrických rovnic (3) a (6) zjišťujeme, že jsou (až na násobek původního směrového vektoru) identické. Kdybychom zvolili za x-ovou souřadnici bodu A jinou hodnotu než 0, získali bychom jiný bod, čímž by se parametrické vyjádření (6) lišilo od parametrického vyjádření (3). Ale obě by i tak stále popisovala stejnou přímku p.

Zadání úlohy

Určete vzájemnou polohu rovin daných obecnými rovnicemi $\varphi: x+3y+2z-2=0$ a $\delta: x+y+2z+2=0$. Jsou-li roviny různoběžné, určete rovnici jejich průsečnice.

Řešení úlohy

Ze zadaných rovnic vypíšeme souřadnice normálových vektorů: $\overrightarrow{n_\varphi}=(1;3;2)$ a $\overrightarrow{n_\delta}=(1;1;2)$. Jak je patrné, jeden vektor není násobkem druhého, takže normálové vektory jsou různoběžné. Proto jsou různoběžné i zadané roviny. Situace je zobrazena na obr. 2.



obr. 2

Průsečnici rovin můžeme opět najít řešením soustavy rovnic, které tvoří zadané obecné rovnice rovin. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x+3y+2z-2&=0 \\ x+y+2z+2&=0 \end{aligned}, \tag{7}$$

v níž opět zvolíme neznámou x jako parametr, v závislosti na kterém vyjádříme ostatní proměnné.

Po vynásobení druhé rovnice mínus jedničkou a sečtení rovnic (7) dostaneme rovnici $2y-4=0$, odkud vyjádříme $y=2$. Po vynásobení druhé rovnice soustavy (7) mínus třemi a sečtení obou rovnic získáme rovnici $-2x-4z-8=0$, odkud vyjádříme $z=-\frac{1}{2}x-2$.

Společnými body zadaných rovin jsou tedy body, jejichž souřadnice lze psát ve tvaru

$$\mathrm{P}=\left\{\left[x;\,2;\,-\frac{1}{2}x-2\right];\,x\in\mathbb{R}\right\}. \tag{8}$$

Na základě souřadnic bodů P, které leží na hledané průsečnici p, lze psát parametrické vyjádření průsečnice ve tvaru

$$\begin{aligned} p: x&=t \\ y&=2; \\ z&=-2-\frac{1}{2}t;\,t\in\mathbb{R} \end{aligned}. \tag{9}$$

Parametrické vyjádření průsečnice (9) není jediné možné.

Jak je patrné z y-ové souřadnice parametrického vyjádření přímky p, tak směrový vektor přímky p má nulovou právě tuto y-ovou souřadnici. To znamená, že přímka p je kolmá právě k ose y.

Pro úplnost uvedeme ještě druhý způsob hledání průsečnice obou zadaných rovin založený na geometrickém pohledu.

Přímka p leží v obou rovinách a je tedy kolmá na jejich normálové vektory $\overrightarrow{n_\varphi}$ a $\overrightarrow{n_\delta}$. Proto je i směrový vektor $\vec{s}$ průsečnice p kolmý na oba normálové vektory zadaných rovin. Proto můžeme psát

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_\varphi} \times \overrightarrow{n_\delta} = (4;\, 0;\, -2)\,. \tag{10}$$

Směrový vektor přímky p tedy bude vektor $\overrightarrow{s_0} = (2;\, 0;\, -1)$, který je s právě vypočteným vektorem rovnoběžný.

Bod B, který na přímce p leží, nechť má např. x-ovou souřadnici rovnou 1. Ostatní souřadnice bodu B získáme řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 1 + 3y_\mathrm{B} + 2z_\mathrm{B} - 2 &= 0 \\ 1 + y_\mathrm{B} + 2z_\mathrm{B} + 2 &= 0 \end{aligned}\,. \tag{11}$$

Řešením této soustavy jsou hodnoty: $y_\mathrm{B} = 2$ a $z_\mathrm{B} = -\dfrac{5}{2}$, a proto parametrické vyjádření přímky p můžeme psát ve tvaru:

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + 2l \\ y &= 2; \\ z &= -\frac{5}{2} - l;\, l \in \mathbb{R} \end{aligned}\,. \tag{12}$$

Ačkoliv je toto parametrické vyjádření jiné než vyjádření popsané vztahy (9), jedná o parametrické vyjádření téže přímky.