Převod mezi parametrickým vyjádřením přímky a obecnou rovnicí přímky v rovině

Převody mezi výše uvedenými tvary rovnic přímky jsou jednoduché, ale je nutné chápat podstatu problematiky. Oba typy převodů ukážeme na konkrétní úloze.

Zadání: Napište obecnou rovnici přímky q, která je dána parametrickým vyjádřením

$$q: x = -2 + 3t; \quad y = 1 + 4t; t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Řešení: Při řešení úlohy můžeme postupovat dvojím způsobem. První způsob je založen na geometrické interpretaci parametrického vyjádření přímky, druhý způsob je čistě algebraický. Oba způsoby jsou přitom matematicky správné.

První způsob řešení spočívá v určení vlastností přímky q. Tato přímka (na základě vyjádření (1)) je dána bodem $A = [-2; 1]$ a směrovým vektorem $\vec{s_q} = (3; 4)$ - tj. vektorem rovnoběžným s danou přímkou. Na základě směrového vektoru můžeme určit souřadnice normálového vektoru (tj. vektoru, který je k dané přímce kolmý). Souřadnice normálového vektoru určíme pomocí skalárního součinu: skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů musí být nulový. Proto má normálový vektor přímky q souřadnice $\vec{n_q} = (4; -3)$.

Druhá varianta, jak psát normálový vektor přímky q, je: $\vec{n'_q} = (-4; 3)$.

Obecná rovnice přímky je dána rovnicí

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0, \qquad (2)$$

kde a a b jsou souřadnice normálového vektoru dané přímky, a proto alespoň jedno z čísel a a b je nenulové.

V případě zadané přímky q tedy můžeme psát rovnici (2) ve tvaru

$$4x - 3y + c = 0. \qquad (3)$$

Vzhledem k tomu, že bod A leží na přímce q, můžeme souřadnice bodu A dosadit do rovnice (3). Dostaneme tak rovnici $4 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + c = 0$ s neznámou c. Řešením této rovnice je $c = 11$. Obecná rovnice přímky q má tedy tvar

$$4x - 3y + 11 = 0. \qquad (4)$$

Druhý způsob řešení zadané úlohy je algebraický. Z parametrického vyjádření (1) přímky q potřebujeme vyloučit parametr t. To lze provést např. tak, že na parametrické vyjádření přímky budeme nahlížet jako na soustavu dvou rovnic, z nichž potřebujeme vyloučit členy s parametrem t. Proto první rovnici vynásobíme čtyřmi a druhou mínus třemi. Dostaneme tak dvě rovnice

$$4x = -8 + 12t; \quad -3y = -3 - 12t. \qquad (5)$$

Tyto rovnice nyní sečteme a získáme rovnici $4x - 3y = -11$, kterou můžeme přepsat do tvaru

$$4x - 3y + 11 = 0. \qquad (6)$$

Porovnáme-li rovnice (4) a (6), zjistíme, že jsou totožné.

Nyní ukážeme opačný převod, tj. převod z obecné rovnice přímky na parametrické vyjádření přímky.

Zadání: Napište parametrické vyjádření přímky r, která je dána obecnou rovnicí

$$2x + y - 4 = 0. \qquad (7)$$

Řešení: Řešení této úlohy je nutné provést s využitím geometrické interpretace obecné rovnice přímky. Z rovnice (7) můžeme určit souřadnice normálového vektoru přímky r: $\vec{n_r} = (2; 1)$. Pro parametrické vyjádření přímky r potřebujeme znát souřadnice směrového vektoru, tj. vektoru, který je s přímkou r rovnoběžný. Na základě faktu, že směrový vektor a normálový vektor téže přímky jsou na sebe kolmé, je skalární součin obou vektorů nulový. Proto $\vec{s_r} = (1; -2)$.

Druhá varianta, jak napsat souřadnice směrového vektoru přímky r, je $\vec{s'_r} = (-1; 2)$.

Kromě směrového vektoru je nutné ještě znát souřadnice libovolného bodu, který leží na přímce r. Jinými slovy: hledáme souřadnice libovolného bodu, jehož x-ová a y-ová souřadnice splňují rovnici (7). Pokud si uvědomíme, že proměnné x a y v rovnici (7) reprezentují x-ovou a y-ovou souřadnici libovolného bodu, který na přímce r leží, stačí za x dosadit libovolné reálné číslo a dopočítat y. Vyjádříme-li z rovnice (7) proměnnou y, dostaneme

$$y = -2x + 4. \qquad (8)$$

Zvolíme-li např. $x = 0$, pak na základě vztahu (8) dostáváme $y = 4$. Jedním z nekonečně mnoha bodů ležících na přímce *r* je tedy bod $B = [0; 4]$. Nyní již můžeme psát parametrické vyjádření přímky *r* ve tvaru

$$\begin{aligned} r: x &= t; \\ y &= 4 - 2t; t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (9)$$

Tato úloha tedy má vlastně nekonečně mnoho správných řešení, protože závisí na tom, jaký bod ležící na zadané přímce si zvolíme.