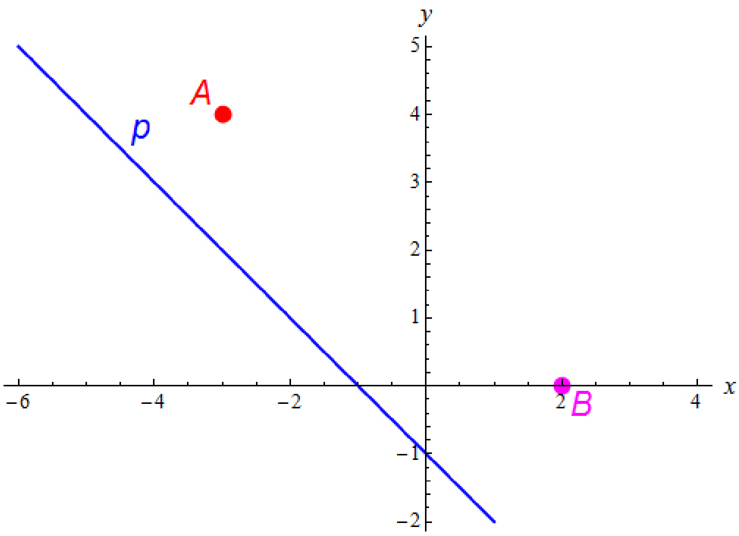
Zadání úlohy

Světelný paprsek prochází bodem $A = [-3; 4]$, odráží se od zrcadla, které leží na přímce $x + y + 1 = 0$, a dopadá do bodu $B = [2; 0]$. Najděte rovnici přímky, na níž leží dopadající paprsek, a přímky, na níž leží odražený paprsek.

Řešení úlohy

Zadání úlohy je zobrazeno na obr. 1. Před řešením úlohy je nutné si uvědomit, jak probíhá odraz světla od zrcadla z fyzikálního hlediska. Odraz světla se řídí zákonem odrazu: Odražený paprsek svírá s kolmicí dopadu stejný úhel, jaký svírá dopadající paprsek se stejnou kolmicí dopadu. Přitom kolmice dopadu (tj. kolmice k zrcadlu vztyčená v místě dopadu paprsku na zrcadlo), dopadající paprsek a odražený paprsek leží v jedné rovině.



obr. 1

Před dalším řešením je nutné znát polohu bodu *P*, ve kterém dopadá na zrcadlo světelný paprsek. Jsou principiálně dva způsoby řešení:

1. fyzikální postup - vychází ze zákona odrazu a během něj budeme muset řešit pravděpodobně ne jednoduché rovnice vycházející z definičního vztahu pro odchylku dvou přímek;
2. geometrický postup - vychází z konstrukce bodu *P* pomocí osové souměrnosti: pomocí osové souměrnosti podle přímky *p* najdeme obraz např. bodu *A* a sestrojíme přímku procházející obrazem bodu *A* a bodem *B*, která protne přímku *p* právě v hledaném bodě *P*; tento postup bude dále ukázán. (Analogicky by bylo možné využít k sestrojení pomocné přímky bod *A* a obraz bodu *B* vytvořený v osové souměrnosti podle přímky *p*.)

Při zobrazování bodu *A* rovinným zrcadlem vzniká obraz tohoto bodu (tj. bod A') za rovinným zrcadlem ve stejné vzdálenosti, v jaké se před zrcadlem nachází bod *A* (viz obr. 2). Současně je spojnice bodů *A* a A' (tj. přímka *k*) kolmá na přímku *p*; přímka *k* přitom protíná přímku *p* v bodě *S*.

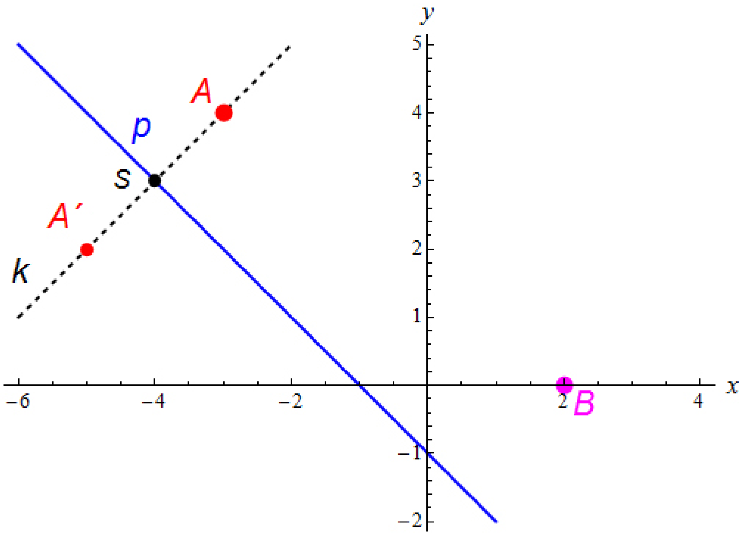
Abychom získali souřadnice bodu A', musíme znát souřadnice bodu *S*, který (jak plyne z výše uvedené vlastnosti bodů *A* a A') je středem úsečky AA'. Bod *S* je přitom průsečíkem přímek *k* a *p*, proto je nutné znát rovnici přímky *k*. (Na typu rovnice přímky *k*, který použijeme, nezávisí.)

Na základě zadání úlohy můžeme psát normálový vektor přímky *p* ve tvaru $\vec{n} = (1; 1)$. Tento vektor je současně směrovým vektorem přímky *k*. Proto můžeme okamžitě psát parametrické vyjádření přímky *k* (známe souřadnice bodu *A*, který na ní leží, a známe souřadnice jejího směrového vektoru):

$$k: \begin{array}{l} y = -3 + t \\ x = 4 + t; t \in \mathbb{R} \end{array} . \qquad (1)$$

Vzhledem k tomu, že hledáme průsečík *S* přímky *p* a přímky *k*, budeme řešit soustavu rovnic, které popisují přímky *p* a *k*. Proto do rovnice přímky *p*, která je uvedena v zadání úlohy, dosadíme parametrické vyjádření (1) přímky *k*. Získáme tak jednu rovnici o jedné neznámé *t*: $-3 + t + 4 + t + 1 = 0$.

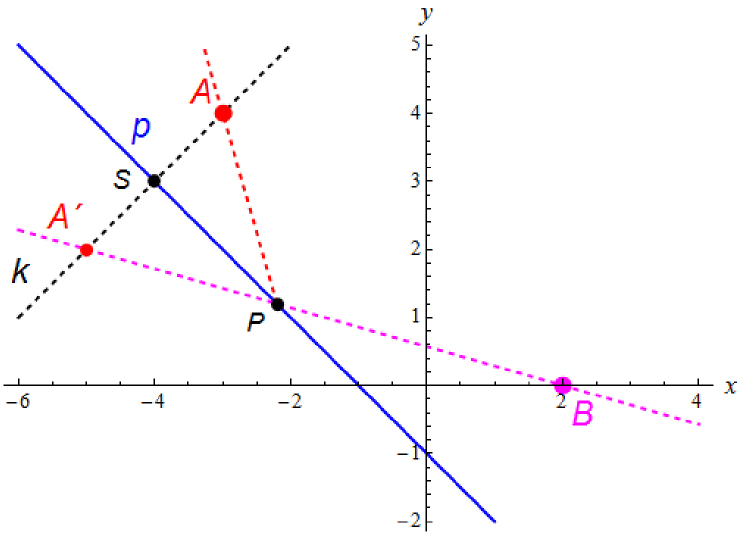
Jejím řešením je $t=-1$; tuto hodnotu parametru t dosadíme do parametrického vyjádření přímky k a získáme souřadnice bodu S: $S=[-4;3]$.



obr. 2

Na základě výše popsaných vlastností bodů A, S a A' víme, že bod S je středem úsečky AA'. Proto platí vztah $S=\frac{A+A'}{2}$, ze kterého můžeme vyjádřit bod A' ve tvaru $A'=2S-A$. Souřadnice bodu A' tedy jsou: $A'=[-5;2]$.

Nyní je zřejmé, že světelný paprsek, který se ve skutečnosti šíří po trajektorii A - P - B, můžeme nahradit paprskem A' - P - B. Bod P přitom představuje bod, ve kterém dopadá světelný paprsek na zrcadlo (viz obr. 3). Abychom získali souřadnice bodu P, který je průsečíkem přímky $A'B$ a přímky p, musíme vyjádřit rovnici právě přímky $A'B$.



obr. 3

Rovnici přímky $A'B$ můžeme napsat, protože známe souřadnice dvou jejích bodů. Tato přímka je přitom přímkou, na které leží odražený paprsek. Obecnou rovnici této přímky máme dle zadání napsat, proto nyní napíšeme obecnou rovnici přímky $A'B$. Směrový vektor přímky $A'B$ má souřadnice $\overrightarrow{s_{A'B}}=(7;-2)$; na základě toho můžeme psát normálový vektor téže přímky např. ve tvaru $\overrightarrow{n_{A'B}}=(2;7)$. Obecná rovnice přímky $A'B$ tedy má tvar

$$2x+7y+c=0\,. \tag{2}$$

Koeficient c přitom určíme tak, že do rovnice (2) dosadíme za x a za y souřadnice jednoho z bodů, které na přímce $A'B$ leží a jejichž souřadnice známe; využijeme např. souřadnice bodu B. Dostáváme tak rovnici $2\cdot 2+7\cdot 0+c=0$, odkud získáme $c=-4$. Rovnice přímky $A'B$ (a tedy i rovnice přímky, na níž leží odražený paprsek) má rovnici

$$2x+7y-4=0\,. \tag{3}$$

Souřadnice bodu *P*, který je průsečíkem přímky *p* a přímky $A'B$, získáme řešením soustavy rovnic, které popisují uvažované přímky:

$$\begin{aligned} x+y+1&=0 \\ 2x+7y-4&=0 \end{aligned}. \qquad (4)$$

Řešením této soustavy je uspořádaná dvojice $\left[-\frac{11}{5};\frac{6}{5}\right]$. Proto má bod *P* souřadnice $P=\left[-\frac{11}{5};\frac{6}{5}\right]$.

Nyní již můžeme psát rovnici přímky *AP*, na níž leží dopadající paprsek. Směrový vektor této přímky má souřadnice $\overrightarrow{s_{\mathrm{AP}}}=\left(\frac{4}{5};-\frac{14}{5}\right)$, normálový vektor této přímky pak můžeme psát např. ve tvaru $\overrightarrow{n_{\mathrm{AP}}}=(7;2)$. Obecná rovnice přímky *AP* má tedy tvar

$$7x+2y+d=0. \qquad (5)$$

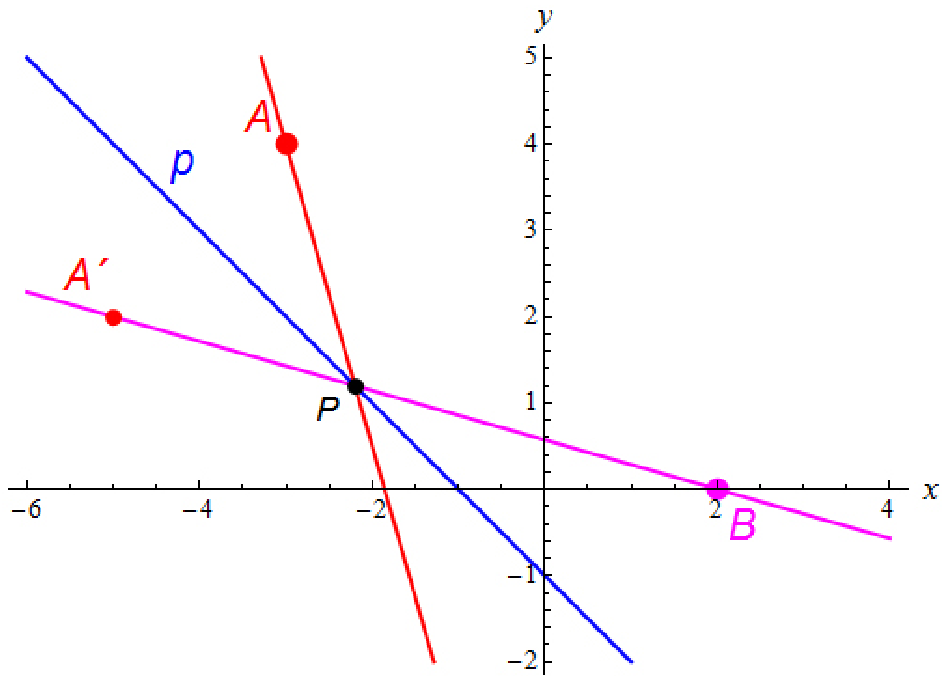
Koeficient *d* přitom určíme tak, že do rovnice (5) přímky *AP* dosadíme souřadnice jednoho z jejích bodů - např. souřadnice bodu *A*. Dostaneme tak rovnici $7\cdot(-3)+2\cdot 4+d=0$, z níž získáváme $d=13$. Přímka *AP* tedy je dána rovnicí

$$7x+2y+13=0. \qquad (6)$$

Dopadající paprsek leží na přímce *AP*, která je dána rovnicí (6).

Odražený paprsek leží na přímce $A'B$, která je dána rovnicí (3).

Na obr. 4 jsou zobrazeny zadané body a přímka *p* a dále pak obě výsledné přímky, tj. přímky *AP* a $A'B$.



obr. 4