Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Analytická geometrie kvadratických útvarů

učební text

Jaroslav Reichl

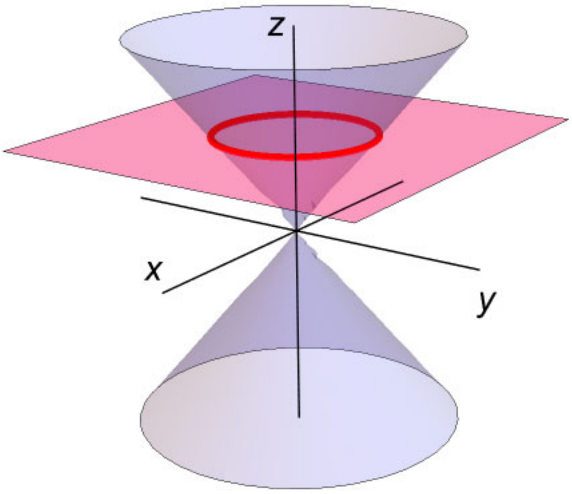
Obsah

1.1 Úvod

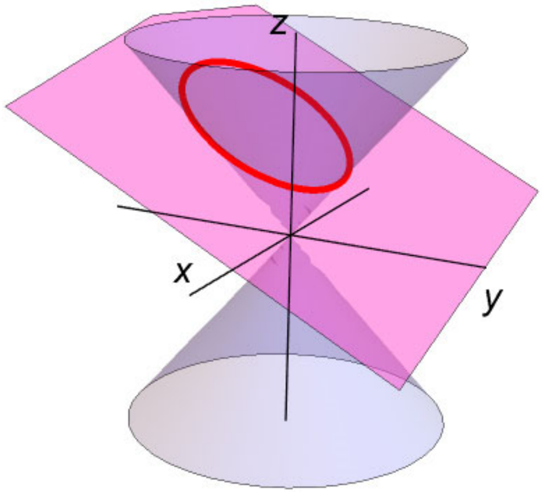
V této části analytické geometrie se budeme zabývat kružnicí, elipsou, hyperbolou a parabolou. Tyto křivky se označují jako **kuželosečky**, protože je lze získat pomocí průniku rotační kuželové plochy a rovin, které neprocházejí vrcholem. Názvy těchto křivek jsou známy už z přelomu 3. a 2. století př. n. l., kdy žil matematik Apollónius z Pergy (262 – 190 př. n. l.), který tyto křivky popsal ve svých knihách, ale nepoužíval jejich vyjádření pomocí souřadnic (tj. analytické vyjádření jednotlivých křivek). To se podařilo až švýcarskému matematikovi Leonhardovi Eulerovi (1707 – 1783).

Geometrický vznik jednotlivých kuželoseček je dán průnikem kuželové plochy a roviny, která neprochází jejím vrcholem:

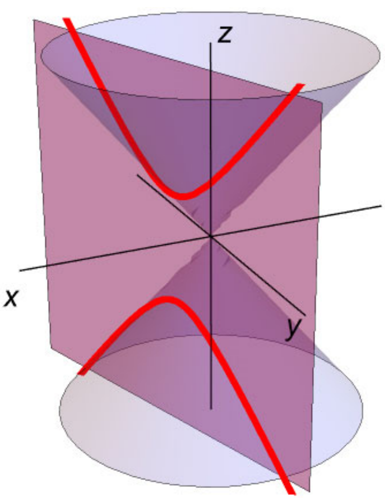
1. kružnice vzniká průnikem kuželové plochy a roviny kolmé k ose kuželové plochy (viz obr. 1);
2. elipsa vzniká průnikem kuželové plochy a roviny, která svírá s osou kuželové plochy obecný úhel (různý od ostatních případů) – viz obr. 2;
3. hyperbola vzniká průnikem kuželové plochy a roviny rovnoběžné s osou kuželové plochy (viz obr. 3) a má dvě větve;
4. parabola vzniká průnikem kuželové plochy a roviny rovnoběžné s povrchovou přímkou kuželové plochy (viz obr. 4).



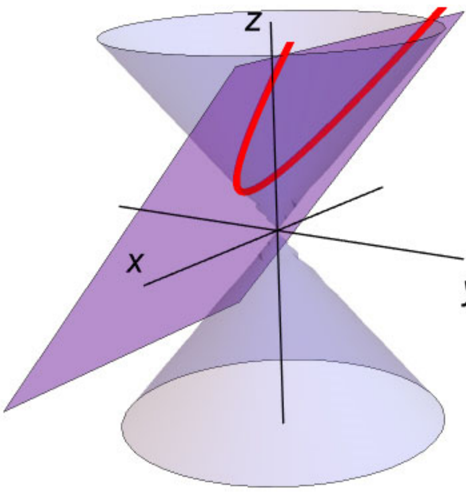
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

1.2 Kružnice

1.2.1 Definice a odvození rovnice

KRUŽNICE k SE STŘEDEM S A POLOMĚREM r ($r > 0$) JE MNOŽINA VŠECH BODŮ V ROVINĚ, KTERÉ MAJÍ OD STŘEDU S STEJNOU VZDÁLENOST r.

Uvažme nejprve speciální případ polohy středu S, který splývá s počátkem soustavy souřadnic $0xy$, tj. $\mathrm{S} = [0; 0]$ (viz obr. 5). Pro libovolný bod $\mathrm{X} = [x; y]$ kružnice k, který má od středu S vzdálenost r, musí platit: $|\mathrm{XS}| = r$. Můžeme tedy psát $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, odkud vyplývá vztah $x^2 + y^2 = r^2$.

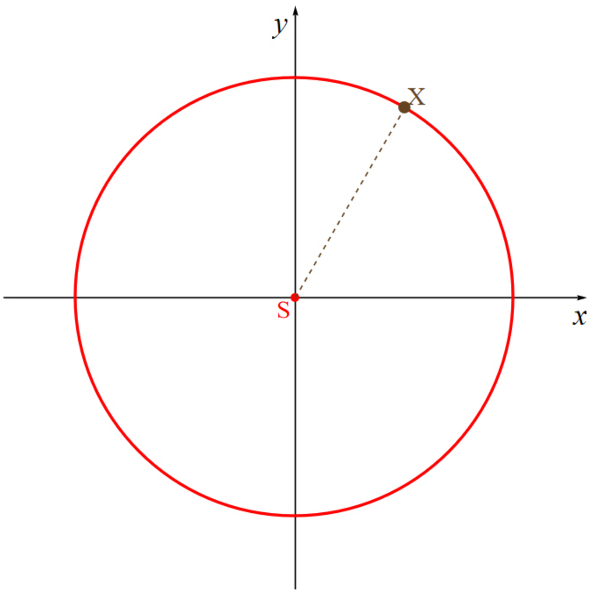
> Vztah s odmocninou je vyjádření délky úsečky XS na základě souřadnic jejích krajních bodů.

VĚTA: KRUŽNICE SE STŘEDEM $\mathrm{S} = [0; 0]$ A S POLOMĚREM r ($r > 0$) MÁ ROVNICI

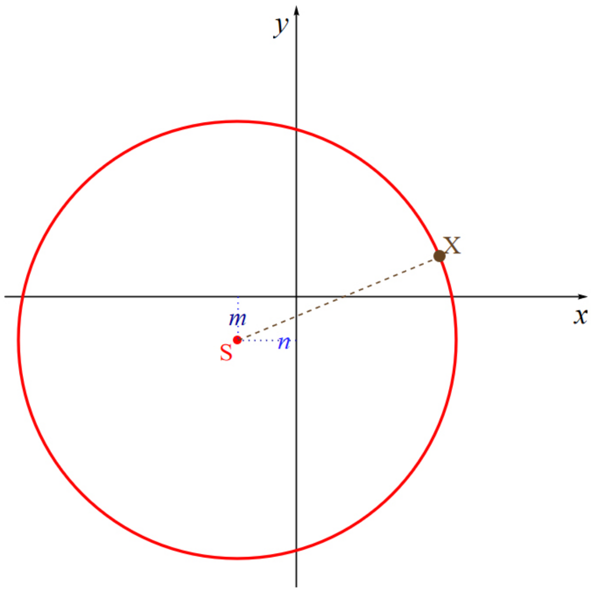
$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{1}$$

Tvar (1) rovnice kružnice se nazývá **osová rovnice kružnice**.

> Název vychází z toho, že střed dané kružnice leží na průsečíku os kartézského systému souřadnic.



obr. 5



obr. 6

Má-li střed kružnice k souřadnice $\mathrm{S} = [m; n]$ (viz obr. 6), je odvození rovnice kružnice podobné. Pro libovolný bod $\mathrm{X} = [x; y]$ kružnice k, který má od středu S vzdálenost r, musí platit: $|\mathrm{XS}| = r$. Můžeme tedy psát: $\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r$ a odtud vyjádřit vztah $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$.

VĚTA: KRUŽNICE SE STŘEDEM $\mathrm{S} = [m; n]$ A S POLOMĚREM r ($r > 0$) MÁ ROVNICI

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2. \tag{2}$$

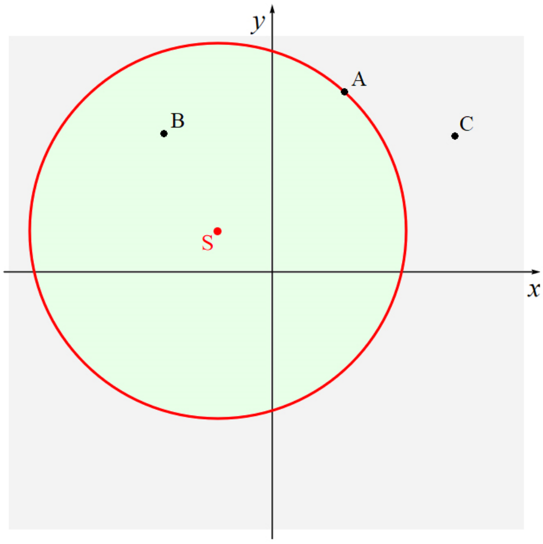
Vztah (2) přejde na vztah (1) volbou $m = n = 0$.

Vztahy (1) a (2) jsou **středové tvary rovnice kružnice**.

> Název „středový tvar“ je dán tím, že z tohoto tvaru rovnice kružnice lze velmi snadno číst souřadnice středu kružnice. Vztah (1) je tedy speciálním případem středového tvaru rovnice kružnice.

Pro vzájemnou polohu bodu a kružnice k s poloměrem r ($r > 0$) mohou nastat tyto případy (viz obr. 7):

1. bod $A = [x; y]$ leží na kružnici k – pro jeho vzdálenost od středu platí $|AS| = r$ a pro souřadnice bodu A platí $x^2 + y^2 = r^2$ (resp. $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$);
2. bod $B = [x; y]$ leží uvnitř kružnice k (ve vnitřní oblasti kružnice k) – pro jeho vzdálenost od středu platí $|BS| < r$ a pro souřadnice bodu B platí $x^2 + y^2 < r^2$ (resp. $(x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$);
3. bod $C = [x; y]$ leží vně kružnice k (ve vnější oblasti kružnice k) – pro jeho vzdálenost od středu platí $|CS| > r$ a pro souřadnice bodu C platí $x^2 + y^2 > r^2$ (resp. $(x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$).



obr. 7

Jestliže ve středovém tvaru rovnice kružnice (2) provedeme naznačené umocnění, dostaneme rovnici ve tvaru $x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 = r^2$. Po přeuspořádání členů v dané rovnici získáme rovnici v ekvivalentním tvaru $x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 = 0$.

<u>VĚTA:</u> ROVNICE VE TVARU

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{3}$$

KDE $a, b, c \in \mathbb{R}$, SE NAZÝVÁ OBECNÁ ROVNICE KRUŽNICE.

Pomocí koeficientů a, b a c byly označeny složitěji zapsané koeficienty v odvozované rovnici.

1.2.2 Parametrická rovnice kružnice

Ve fyzice, mechanice, elektrotechnice, ale i ve výpočetní technice se občas využívá tzv. parametrický tvar rovnice kružnice. V tomto případě je kružnice dána středem S, poloměrem r a jedním volným parametrem. Za tento parametr se velmi často volí úhel φ, který svírá spojnice středu kružnice S a bodu na kružnici s kladnou částí osy x kartézského systému souřadnic.

Ve shodě s obr. 8 pak lze pro souřadnice bodu $X = [x; y]$ ležícího na kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic psát: $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$.

Toto vyjádření tedy připomíná definici funkcí sinus a kosinus v jednotkové kružnici.

<u>VĚTA:</u> KRUŽNICE SE STŘEDEM $S = [0; 0]$ A S POLOMĚREM r ($r > 0$) MÁ PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ VE TVARU

$$x = r\cos\varphi; \; y = r\sin\varphi; \; \varphi \in \langle 0; 2\pi). \tag{4}$$

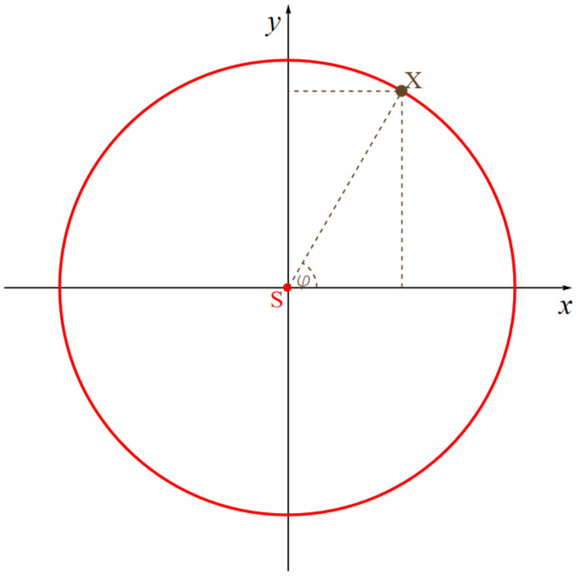
Polouzavřený interval, ze kterého se vybírá úhel φ, se volí proto, aby existovalo vzájemně jednoznačné zobrazení mezi úhlem φ a bodem na kružnici k.

Pro kružnici, která má střed v bodě $S=[m;n]$ (viz obr. 9) stačí parametrické vyjádření kružnice dané vztahy (4) posunout do uvažovaného středu kružnice.

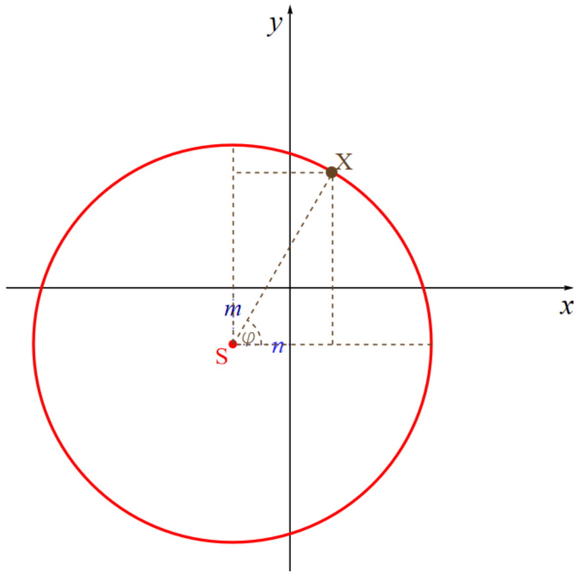
V<u>ĚTA</u>: **KRUŽNICE SE STŘEDEM** $S=[m;n]$ **A S POLOMĚREM** r ($r>0$) **MÁ PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ VE TVARU**

$$x=m+r\cos\varphi;\ y=n+r\sin\varphi;\ \varphi\in\langle 0;2\pi). \tag{5}$$

Ze vztahu (4) (resp. (5)) lze odvodit vztah (1) (resp. (2)). Stačí osamostatnit goniometrické funkce, rovnice umocnit, sečíst a využít goniometrickou identitu $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.



obr. 8



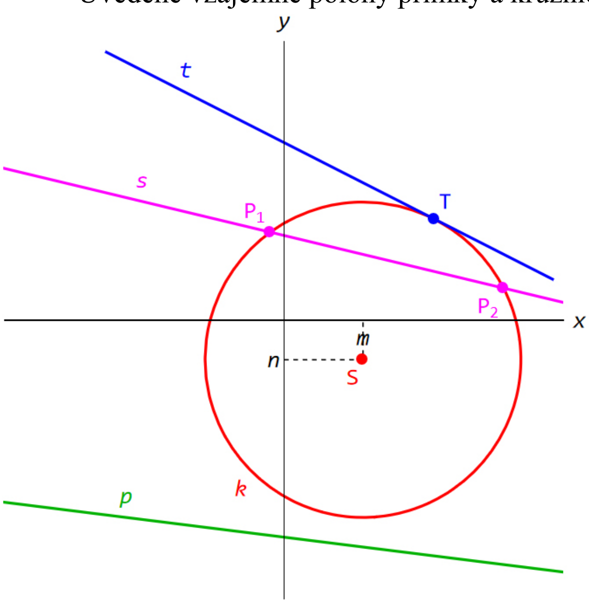
obr. 9

1.2.3 <u>Vzájemná poloha přímky a kružnice</u>

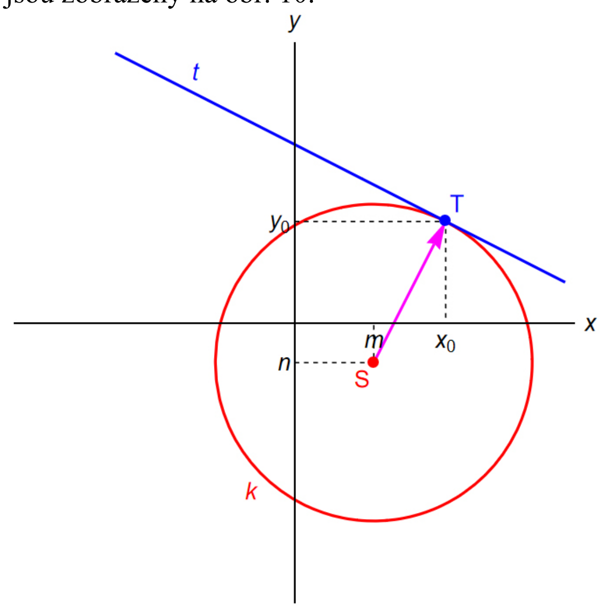
Přímka může být:

1. sečnou *s* kružnice – má s kružnicí společné dva různé body;
2. tečnou *t* kružnice – má s kružnicí společný právě jeden bod;
3. vnější přímkou *p* kružnice – nemá s kružnicí společný žádný bod.

Uvedené vzájemné polohy přímky a kružnice jsou zobrazeny na obr. 10.



obr. 10



obr. 11

Vzájemnou polohu přímky a kružnice je možné zjistit řešením:

1. soustavy jedné rovnice lineární (obecná rovnice přímky) a jedné rovnice kvadratické (rovnice kružnice);
2. jedné kvadratické rovnice pro jednu neznámou (pokud je přímka dána parametricky; neznámou je v tomto případě její parametr).

Počet řešení příslušné soustavy (resp. rovnice) pak určuje i počet společných bodů přímky a kružnice.

Zvláštním případem je tečna kružnice, která má řadu využití (jak v matematice, tak v aplikačních předmětech). Proto nyní odvodíme rovnici tečny t kružnice k se středem $\mathrm{S}=[m;n]$ a kladným poloměrem r. Tečna t se dotýká kružnice k v bodě $\mathrm{T}=[x_0;y_0]$, který tedy leží jak na dané kružnici k, tak na tečně t (viz obr. 11).

Vektor $\overrightarrow{\mathrm{ST}}=(x_0-m;y_0-n)$ je normálový vektor tečny t.

Tento vektor leží na poloměru kružnice a k němu je tečna kolmá.

Obecnou rovnici tečny t tedy můžeme psát ve tvaru $(x_0-m)\cdot x+(y_0-n)\cdot y+c=0$. Uvědomíme-li si, že bod T leží na tečně, můžeme dále psát $(x_0-m)\cdot x_0+(y_0-n)\cdot y_0+c=0$. Z této rovnice lze vyjádřit koeficient c ve tvaru $c=-(x_0-m)\cdot x_0-(y_0-n)\cdot y_0$.

Dosazením do rovnice tečny získáme $(x_0-m)\cdot x+(y_0-n)\cdot y-(x_0-m)\cdot x_0-(y_0-n)\cdot y_0=0$.

Další úpravou lze rovnici tečny psát ve tvaru $(x_0-m)\cdot(x-x_0)+(y_0-n)\cdot(y-y_0)=0$. Přidáním a opětovným odebráním členu m, resp. n, lze dále psát rovnici tečny ve tvaru $(x_0-m)\cdot(x-x_0-m+m)+(y_0-n)\cdot(y-y_0-n+n)=0$.

Po vytknutí dostáváme rovnici tečny ve tvaru $(x_0-m)\cdot(x-m)+(x_0-m)\cdot(-x_0+m)+(y_0-n)\cdot(y-n)+(y_0-n)\cdot(-y_0+n)=0$. Po další úpravě dostáváme $(x_0-m)\cdot(x-m)-(x_0-m)\cdot(x_0-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)-(y_0-n)\cdot(y_0-n)=0$. Po dalším zjednodušení máme rovnici ve tvaru $(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)-(x_0-m)^2-(y_0-n)^2=0$. Další úpravou lze konstantní členy převést na druhou stranu rovnice, čímž dostáváme rovnici tečny ve tvaru $(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=(x_0-m)^2+(y_0-n)^2$. Uvědomíme-li si, že na pravé straně rovnice je vlastně napsána druhá mocnina poloměru r kružnice k (tj. vzdálenosti bodu T od bodu S), lze rovnici tečny t psát ve finálním tvaru $(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2$.

Elegantněji lze rovnici tečny k dané kružnici odvodit tak, že si uvědomíme, že vzdálenost středu kružnice od přímky dané rovnicí $(x_0-m)\cdot x+(y_0-n)\cdot y+c=0$ je rovna poloměru r, pro který platí: $r^2=(x_0-m)^2+(y_0-n)^2$.

Obecně lze rovnici tečny k dané kružnici (resp. k libovolné křivce) v daném bodě odvodit s využitím diferenciálního počtu.

VĚTA: **NECHŤ JE DÁNA KRUŽNICE k SE STŘEDEM $\mathrm{S}=[m;n]$ A S POLOMĚREM r $(r>0)$ ROVNICÍ VE STŘEDOVÉM TVARU (2). ROVNICE TEČNY t K TÉTO KRUŽNICI V JEJÍM BODĚ $\mathrm{T}=[x_0;y_0]$ MÁ POTOM TVAR**

$$(x_0-m)\cdot(x-m)+(y_0-n)\cdot(y-n)=r^2. \tag{6}$$

Rovnice tečny ve tvaru (6) je velmi podobná středové rovnici (2) uvažované kružnice. Stačí si jen představit, že druhé mocniny na levé straně rovnice (2) napíšeme ve tvaru součinů a symboly x, resp. y, v jedné závorce nahradíme symboly x_0, resp. y_0.

Rovnici (6) lze použít pro rovnici tečny ke kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic volbou $m=n=0$.

Rovnice ve tvaru (6) představuje rovnici přímky, proto ji lze psát ve standardní obecné rovnici ve tvaru $a\cdot x+b\cdot y+c=0$, kde $a,b,c\in\mathbb{R}$ a $a\neq 0$ nebo $b\neq 0$.

1.3 Elipsa

1.3.1 Definice a odvození rovnice

Začneme definicí elipsy, která je podobná jako definice kružnice (viz kapitola 1.2.1), jen vyžaduje, na rozdíl od kružnice, dva pevné body.

ELIPSA *E* JE MNOŽINA VŠECH BODŮ V ROVINĚ, KTERÉ MAJÍ OD DVOU DANÝCH BODŮ F_1 A F_2 STÁLÝ SOUČET VZDÁLENOSTÍ, KTERÝ JE ROVEN KLADNÉ KONSTANTĚ $2a$ A JE VĚTŠÍ NEŽ VZDÁLENOST BODŮ F_1 A F_2. PRO LIBOVOLNÝ BOD X ELIPSY TEDY PLATÍ

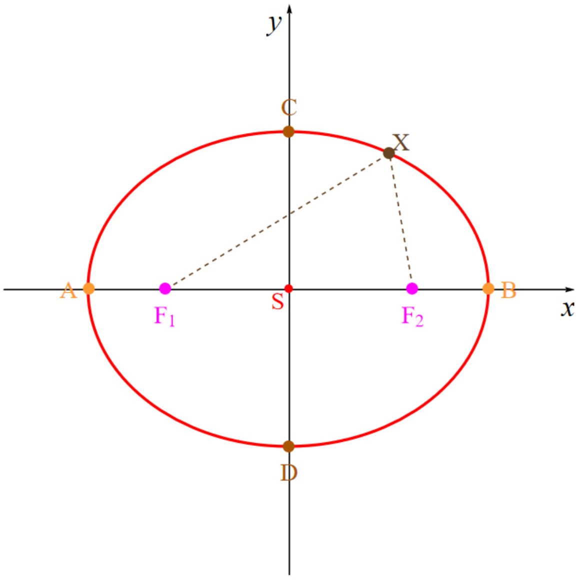
$$|XF_1| + |XF_2| = 2a \,. \tag{7}$$

Elipsu může snadno nakreslit zahradník zahradním kolíkem. Stačí zapíchnout dva klacíky do země, vzít provaz, který je delší než vzájemná vzdálenost zapíchnutých klacíků, a přivázat každý jeho konec k jednomu klacíku, do provázku zaháknout zahradní kolík a při napnutém provázku kolíkem pohybovat kolem klacíků a rýt do země elipsu.

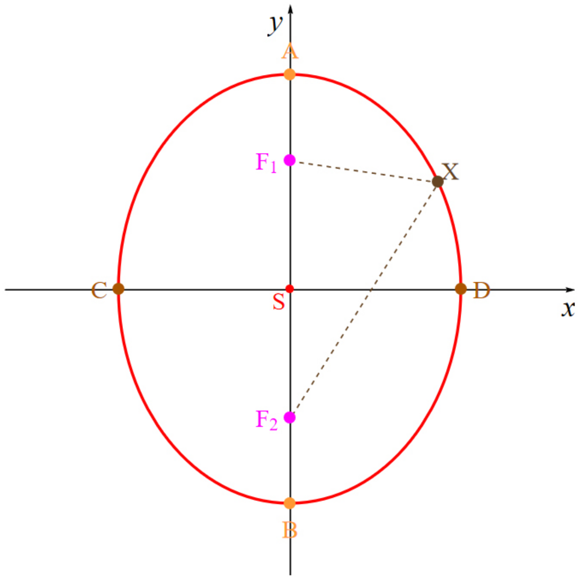
Před dalším výkladem se musíme seznámit se základním značení bodů a vzdáleností a terminologií používanou u elipsy. Elipsa může být v systému souřadnic umístěna dvěma základními způsoby (viz obr. 12 a obr. 13 – zatím elipsy symetrické vůči počátku kartézské soustavy souřadnic), ale terminologie je pro opa případy společná:

1. body F_1 a F_2 se nazývají **ohniska**;
2. $|F_1F_2| = 2e$, kde e je **výstřednost elipsy** (**excentricita elipsy**);
3. přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa elipsy**;
4. a je **délka hlavní poloosy** ($a > 0$);
5. střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed elipsy**;
6. přímka procházející středem S elipsy kolmo k hlavní ose se nazývá **vedlejší osa elipsy**;
7. body A a B jsou **hlavní vrcholy** elipsy, body C a D jsou **vedlejší vrcholy** elipsy;
8. $b = |CS| = |SD|$ je **délka vedlejší poloosy** ($b > 0$).

Pro délky poloos elipsy platí: $a > b$.



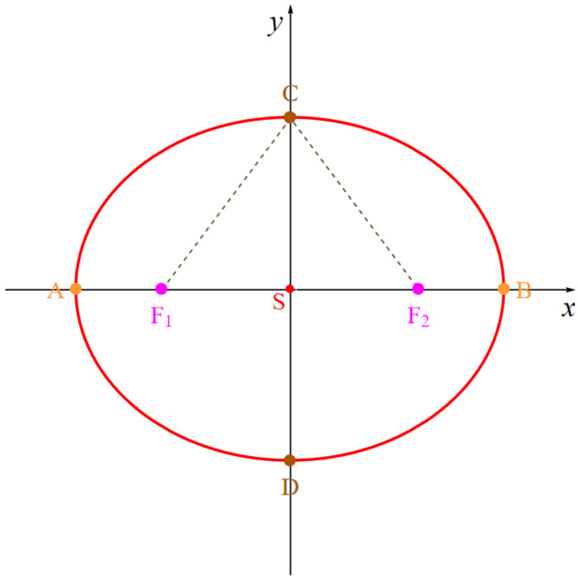
obr. 12



obr. 13

Mezi délkou hlavní poloosy, délkou vedlejší poloosy a excentricitou elipsy platí vztah, který lze jednoduše odvodit přímo z definice elipsy. Jestliže pro libovolný bod X elipsy platí vztah (7), tak platí i pro vedlejší vrchol C (viz obr. 14). Ze symetrie elipsy a vztahu (7) plyne, že délka úsečky F_1C je a. Délka úsečky SC (dle výše zavedené terminologie) je b a délka úsečky F_1S je e. Proto na základě Pythagorovy věty platí

$$a^2 = b^2 + e^2 . \tag{8}$$



obr. 14

Nyní odvodíme rovnici elipsy, která má střed v počátku soustavy souřadnice a jejíž hlavní osa splývá s osou x (viz obr. 12). Ohniska mají (v souladu s terminologií popisu elipsy) souřadnice $\mathrm{F}_1 = [-e; 0]$ a $\mathrm{F}_2 = [e; 0]$ a platí $2a > 2e$ (viz definice elipsy). Pro libovolný bod $\mathrm{X} = [x; y]$ platí vztah (7), a proto můžeme psát: $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a$. Nyní postupně budeme tuto rovnici upravovat. Nejdříve odečteme jednu odmocninu na druhou stranu rovnice, abychom mohli celou rovnici snáze umocnit: $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$. Nyní obě strany rovnice umocníme na druhou (obě strany rovnice jsou kladné – levá na základě definice odmocniny a pravá díky skutečnosti, že vzdálenost $2a$ je v elipse největší možná): $(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$. Nyní umocníme naznačené mocniny: $x^2 + 2ex + e^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2$. Po zjednodušení získáme rovnici ve tvaru $4ex = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, kterou ještě dále zjednodušíme: $a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex$. Nyní ještě jednou rovnici umocníme (obě strany rovnice jsou opět kladné, takže se jedná o ekvivalentní úpravu): $a^2\left(x^2 - 2ex + e^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$. Po roznásobení získáme rovnici ve tvaru $a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$, kterou zjednodušíme na tvar $x^2\left(a^2 - e^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - e^2\right)$. S využitím vztahu (8) přepíšeme do tvaru $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Po vydělení koeficienty a^2 a b^2, které jsou oba kladné, získáme rovnici ve tvaru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

<u>VĚTA:</u> ELIPSA SE STŘEDEM $\mathrm{S} = [0; 0]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE TOTOŽNÁ S OSOU x KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA ROVNICÍ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \tag{9}$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY ELIPSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY ELIPSY.

Tato elipsa tedy „leží“ v kartézské soustavě souřadnic (viz obr. 12).

Analogicky bychom odvodili rovnici elipsy, jejíž hlavní osa je totožná s osou y kartézského systému souřadnic.

VĚTA: **ELIPSA SE STŘEDEM $S=[0;0]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE TOTOŽNÁ S OSOU y KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA ROVNICÍ**

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \tag{10}$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY ELIPSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY ELIPSY.

Tato elipsa tedy „stojí“ v kartézském systému souřadnic (viz obr. 13).

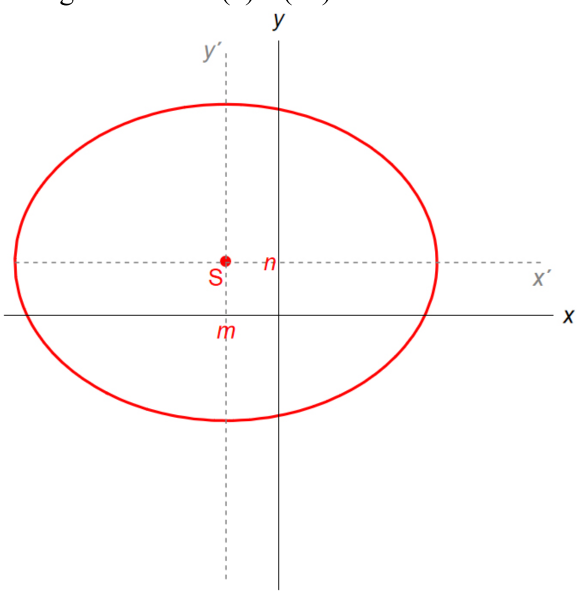
Při konkrétním zadání elipsy rovnicí (9) nebo (10) poznáme typ elipsy (tj. zda „leží“ nebo „stojí“ v kartézském systému souřadnic) podle toho, pod kterou souřadnicí je větší číslo. Pokud je větší číslo pod x^2, pak elipsa v soustavě souřadnic „leží“, pokud je větší číslo pod y^2, pak elipsa v systému souřadnic „stojí“.

Rovnice (9) a (10) se nazývají **osové rovnice elipsy**.

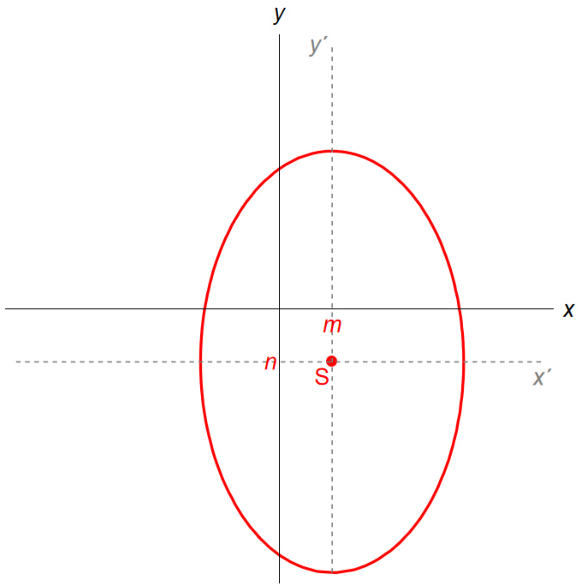
To proto, že střed elipsy leží v obou případech v průsečíku os kartézského systému souřadnic.

Rovnici elipsy, která má střed v bodě $S=[m;n]$, lze odvodit analogickým postupem jako v případě elipsy se středem v počátku soustavy souřadnic. Postup by byl stejný, jen technicky náročnější.

Jinou variantou je si uvědomit, že elipsu, která má střed v bodě $S=[m;n]$ v kartézské soustavě $0xy$, lze popsat též v soustavě $0x'y'$, v níž má elipsa střed v bodě $S'=[0;0]$ (viz obr. 15 a obr. 16). Vzhledem k tomu že platí $x'=x-m$ a $y'=y-n$, lze rovnice elipsy psát ve tvarech, které jsou analogické tvarům (9) a (10).



obr. 15



obr. 16

VĚTA: **ELIPSA SE STŘEDEM $S=[m;n]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU x KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA ROVNICÍ**

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1, \tag{11}$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY ELIPSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY ELIPSY.

Tato elipsa tedy „leží“ v kartézské soustavě souřadnic (viz obr. 15).

VĚTA: **ELIPSA SE STŘEDEM $S=[m;n]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU y KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA ROVNICÍ**

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1, \tag{12}$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY ELIPSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY ELIPSY.

Volbou $m=n=0$ přejde vztah (11) (resp. vztah (12)) na vztah (9) (resp. na vztah (10)).

Vztahy (11) a (12) se nazývají **středové rovnice elipsy**.

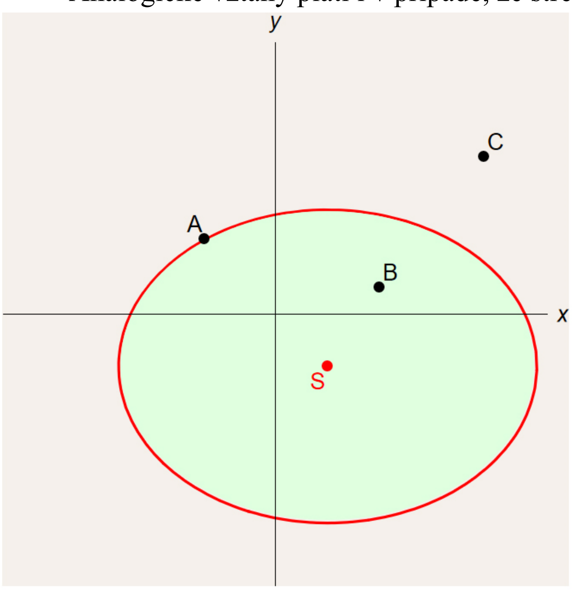
Název vztahů vyplývá ze skutečnosti, že z nich lze velmi snadno číst souřadnice středu elipsy.

V případě, že bude platit $a=b$, stává se elipsa kružnicí. V tom případě (ve shodě se vztahem (8)) je $e=0$ a ohniska splývají se středem kuželosečky.

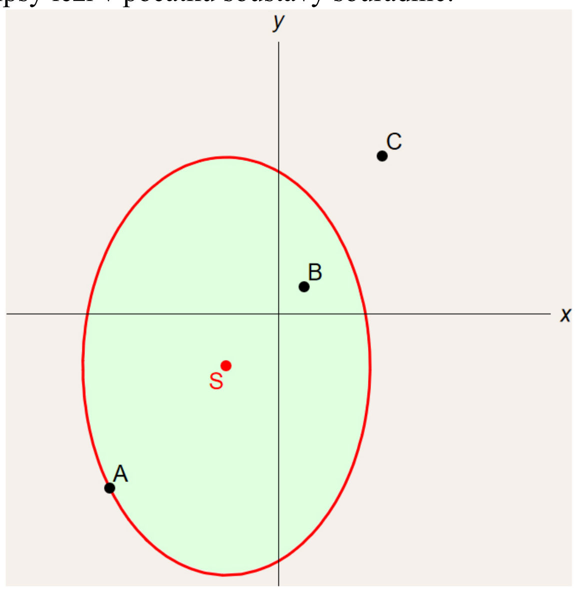
Pro vzájemnou polohu bodu a elipsy s délkou hlavní poloosy a a délkou vedlejší poloosy b (oba parametry jsou kladné) mohou nastat tyto případy (viz obr. 17 a obr. 18):

4. bod $A=[x;y]$ leží na elipse – pro jeho souřadnice platí $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ (resp. $\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$);
5. bod $B=[x;y]$ leží uvnitř elipsy (ve vnitřní oblasti elipsy) – pro jeho souřadnice platí $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}<1$ (resp. $\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}<1$);
6. bod $C=[x;y]$ leží vně elipsy (ve vnější oblasti elipsy) – pro jeho souřadnice platí $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}>1$ (resp. $\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}>1$).

Analogické vztahy platí i v případě, že střed elipsy leží v počátku soustavy souřadnic.



obr. 17



obr. 18

Jestliže vztah (11) vynásobíme tak, abychom se zbavili zlomků, získáme rovnici ve tvaru $b^2(x-m)^2+a^2(y-n)^2=a^2b^2$. Po umocnění získáme $b^2(x^2-2mx+m^2)+a^2(y^2-2ny+n^2)=a^2b^2$. Následně roznásobíme závorky: $b^2x^2-2b^2mx+b^2m^2+a^2y^2-2a^2ny+a^2n^2=a^2b^2$. Po převedení na jednu stranu rovnice můžeme psát $b^2x^2+a^2y^2-2b^2mx-2a^2ny+b^2m^2+a^2n^2-a^2b^2=0$. Po přeznačení koeficientů získáváme tvar: $b^2x^2+a^2y^2+cx+dy+e=0$.

Analogické úpravy lze provést i s rovnicí elipsy ve tvaru (12).

VĚTA: ROVNICE VE TVARU

$$b^2x^2 + a^2y^2 + cx + dy + e = 0, \tag{13}$$

RESP.

$$a^2x^2 + b^2y^2 + cx + dy + e = 0, \tag{14}$$

KDE $c, d, e \in \mathbb{R}$, SE NAZÝVÁ OBECNÁ ROVNICE ELIPSY S DÉLKOU HLAVNÍ POLOOSY a A DÉLKOU VEDLEJŠÍ POLOOSY b.

1.3.2 Parametrické vyjádření elipsy

V některých případech je vhodné umět elipsu vyjádřit parametrickým vyjádřením, které je velmi podobné jako parametrické vyjádření kružnice (viz kapitola 1.2.2).

VĚTA: ELIPSA SE STŘEDEM $S = [m; n]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU x KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA PARAMETRICKÝM VYJÁDŘENÍM VE TVARU

$$x = m + a \cdot \cos\varphi;\ y = n + b \cdot \sin\varphi;\ \varphi \in \langle 0; 2\pi),\tag{15}$$

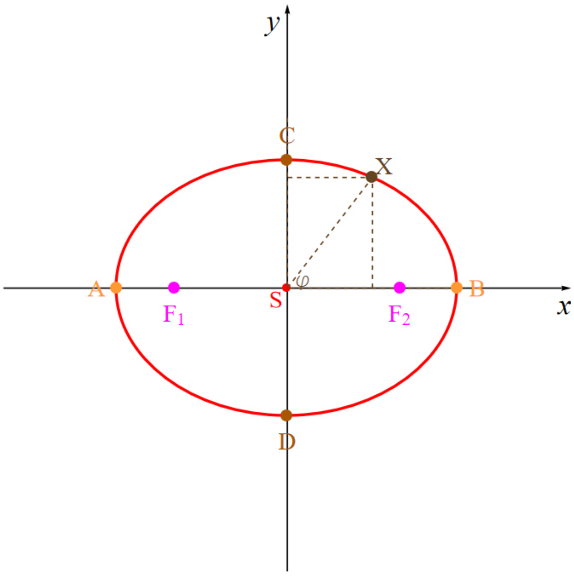
KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY.

Analogicky lze popsat i elipsu, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou *y*.

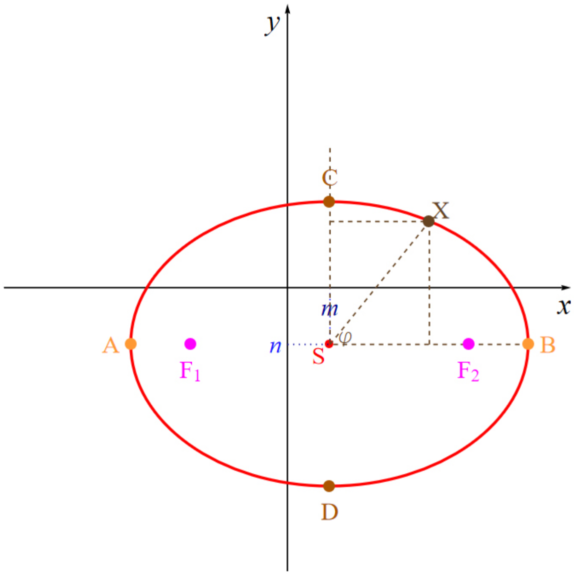
VĚTA: ELIPSA SE STŘEDEM $S = [m; n]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU y KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA PARAMETRICKÝM VYJÁDŘENÍM VE TVARU

$$x = m + b \cdot \cos\varphi;\ y = n + a \cdot \sin\varphi;\ \varphi \in \langle 0; 2\pi),\tag{16}$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY.



obr. 19



obr. 20

Vztahy (15) a (16) platí i pro elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, tj. pro volbu $m = n = 0$. Z těchto vztahů lze také odvodit i vztahy (11) a (12): stačí osamostatnit goniometrické funkce, rovnice umocnit, sečíst a využít goniometrickou identitu $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

1.3.3 Vzájemná poloha přímky a elipsy

Přímka může být (analogicky jako u kružnice):

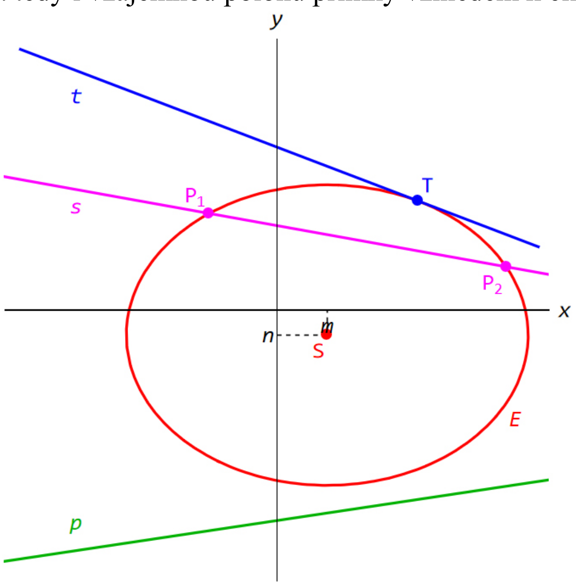
1. sečnou *s* elipsy – má s elipsou společné dva různé body;
2. tečnou *t* elipsy – má s elipsou společný právě jeden bod;
3. vnější přímkou *p* elipsy – nemá s elipsou společný žádný bod.

Popsané situace jsou zobrazeny na obr. 21 a obr. 22.

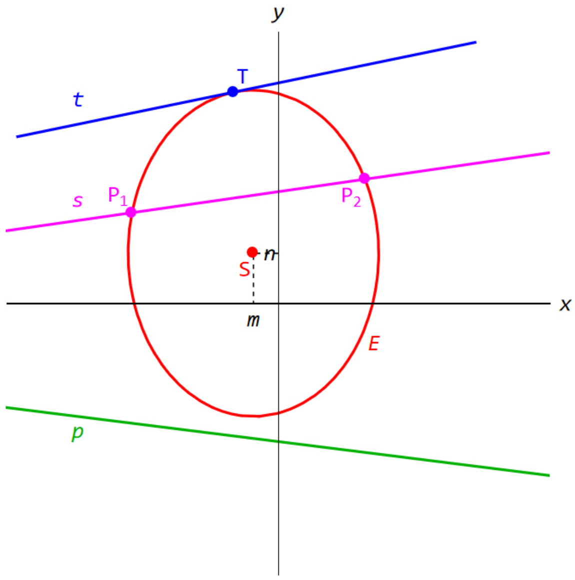
Vzájemnou polohu přímky a elipsy je možné zjistit řešením:

1. soustavy jedné rovnice lineární (obecná rovnice přímky) a jedné rovnice kvadratické (rovnice elipsy);
2. jedné kvadratické rovnice pro jednu neznámou (pokud je přímka dána parametricky) – neznámou je parametr přímky.

Počet řešení dané rovnice (resp. soustavy rovnic) určuje počet společných bodů přímky a elipsy, a tedy i vzájemnou polohu přímky vzhledem k elipse.



obr. 21



obr. 22

Zvláštní význam má v teorii kuželoseček (i při jejich využití v praxi) tečna elipsy sestrojená v jejím bodě T. Odvození, které bylo provedeno u tečny kružnice (viz kapitola 1.2.3), není v případě elipsy vhodné: elipsa má proměnnou křivost, a proto bychom museli hledat tečnu k oskulační kružnici sestrojené k elipse v daném bodě. Elegantní odvození lze provést až s využitím diferenciálního počtu.

Proto se odvoláme na analogii popisu jak elipsy ve srovnání s kružnicí, tak tečny sestrojené k elipse i tečny sestrojené ke kružnici.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA ELIPSA ROVNICÍ VE STŘEDOVÉM TVARU (11), RESP. (12). ROVNICE TEČNY t K TÉTO ELIPSE V JEJÍM BODĚ $\mathrm{T}=[x_0; y_0]$ JE POTOM DÁNA ROVNICÍ VE TVARU

$$\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{a^2}+\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{b^2}=1, \qquad (17)$$

RESP.

$$\frac{(x_0-m)\cdot(x-m)}{b^2}+\frac{(y_0-n)\cdot(y-n)}{a^2}=1, \qquad (18)$$

KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY UVAŽOVANÉ ELIPSY.

V rámci korektnosti by bylo nutné dokázat, že přímky dané vztahem (17) resp. (18) mají s elipsou popsanou rovnicí (11) resp. (12) právě jeden společný bod. Tento důkaz je logicky snadný, ale technicky poměrně složitý.

Jak je vidět, i v případě tečny elipsy je její rovnice velmi podobná středové rovnici elipsy. Stačí naznačené mocniny napsat ve tvaru součinu a v jedné závorce nahradit symbol x symbolem x_0 a symbol y symbolem y_0.

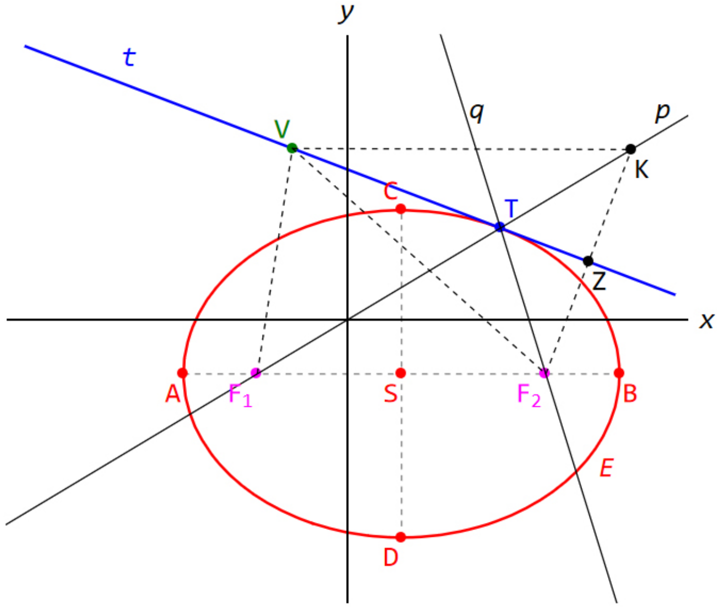
Rovnice (17) a (18) lze převést do standardního tvaru, v jakém se udává obecná rovnice přímky. A obě rovnice platí i pro elipsu se středem v počátku systému souřadnic – stačí volit $m=n=0$.

1.3.4 Tečna elipsy jako osa úhlu dvou přímek

Tečnu k elipse E se středem $S = [m; n]$ v jejím bodě $T = [x_0; y_0]$ lze zkonstruovat také geometricky.

VĚTA: TEČNA *t* ELIPSY *E* V JEJÍM BODĚ $T = [x_0; y_0]$ JE OSOU VNĚJŠÍCH ÚHLŮ JEHO PRŮVODIČŮ.

Průvodič je spojnice bodu elipsy a ohniska. Na obr. 23 to jsou tedy úsečky F_1T a F_2T ležící na přímkách *p* a *q*. Jejich vnější úhel je ten, který půlí právě tečna *t* sestrojená *k* elipse v jejím bodě T. Tuto skutečnost, kterou tvrdí i výše uvedená věta, nyní dokážeme.



obr. 23

K jednomu z ohnisek – např. k ohnisku F_2 - sestrojíme bod K souměrně sdružený podle přímky *t*. Je-li přímka *t* osou úhlu přímek *p* a *q*, pak obraz bodu F_2 ležícího na přímce *q* musí ležet na přímce *p*. Trojúhelníky TZK a TZF_2 jsou shodné (mají společnou stranu TZ, z definice osové souměrnosti jsou shodné úsečky ZK a ZF_2 a úhly TZK a TZF_2 jsou pravé), a proto jsou shodné i úsečky TK a TF_2. Tedy platí: $|F_1K| = |F_1T| + |TK| = |F_1T| + |TF_2|$. V souladu s definicí elipsy a vztahem (7) je $|F_1T| + |TF_2| = 2a$, kde *a* je délka hlavní poloosy elipsy. Proto $|F_1K| = 2a$.

Nyní zvolme na přímce *t* libovolný bod V různý od bodu T. Díky volbě $V \neq T$ body V, F_1 a K tvoří vždy trojúhelník, a tedy platí trojúhelníková nerovnost ve tvaru $|F_1V| + |VK| > |F_1K|$, takže $|F_1V| + |VK| > 2a$.

Trojúhelníky VZK a VZF_2 jsou shodné (zdůvodnění je analogické jako u shodnosti trojúhelníků TZK a TZF_2), a proto úsečky VK a VF_2 jsou shodné. Tedy uvedenou trojúhelníkovou nerovnost lze psát ve tvaru $|F_1V| + |VF_2| > 2a$. To ale znamená, že bod V leží ve vnější oblasti elipsy. To tedy znamená, že každý bod ležící na přímce *t*, kromě bodu T, leží ve vnější oblasti elipsy. Tedy přímka *t* má s elipsou jediný společný bod – bod T. Přímka *t* je tedy tečnou elipsy.

1.4 Hyperbola

1.4.1 Definice hyperboly a její popis

Další kuželosečkou, která má velmi rozsáhlé použití jak v matematice, tak v aplikačních předmětech (fyzika, mechanika, elektrotechnika, …), je hyperbola.

HYPERBOLA JE MNOŽINA VŠECH BODŮ V ROVINĚ S VLASTNOSTÍ, ŽE ABSOLUTNÍ HODNOTA ROZDÍLU JEJICH VZDÁLENOSTÍ OD DVOU RŮZNÝCH BODŮ F_1 A F_2 JE ROVNA KLADNÉ KONSTANTĚ $2a$. TO ZNAMENÁ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ BOD X LEŽÍCÍ NA HYPERBOLE MŮŽEME PSÁT:

$$\left||F_1X| - |F_2X|\right| = 2a \, . \tag{19}$$

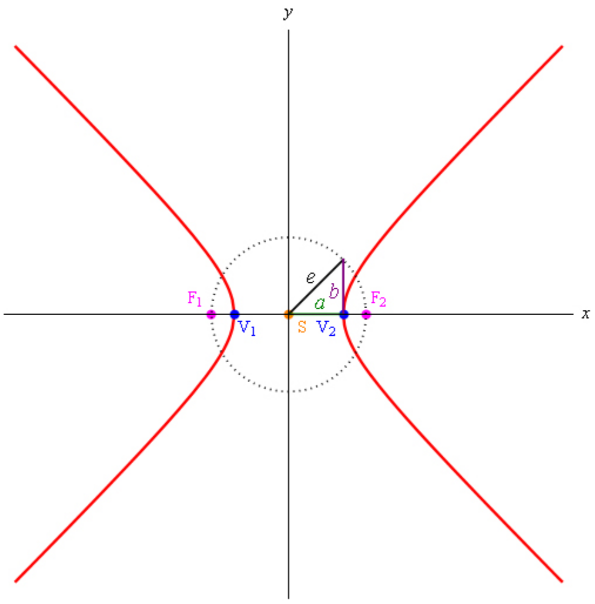
Vnější absolutní hodnota zaručuje, že rozdíl vzdáleností bude kladné číslo. A toto číslo je dvojnásobkem vzdálenosti *a* (viz dále).

Hyperbola je dána (analogicky jako elipsa – viz kapitola 1.3) několika důležitými body a vzdálenostmi (viz obr. 24 a obr. 25):

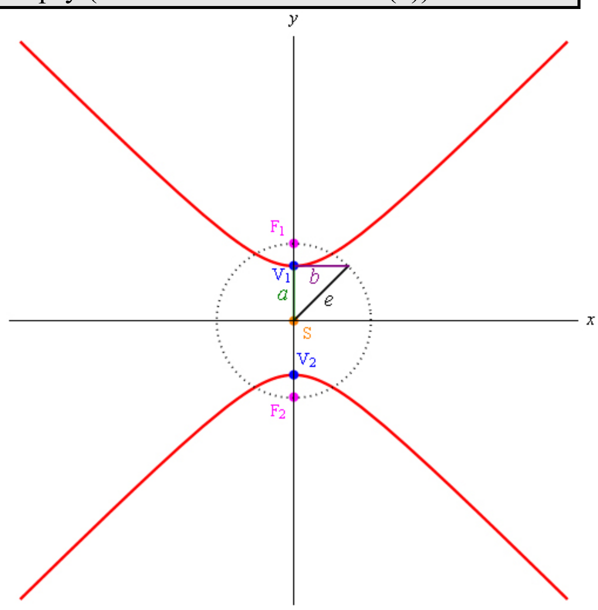
1. body F_1 a F_2 se nazývají **ohniska hyperboly**;
2. pro vzájemnou vzdálenost ohnisek F_1 a F_2 platí:
$$|F_1F_2| = 2e \, , \tag{20}$$
kde *e* je **výstřednost hyperboly** (**excentricita hyperboly**);
3. přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa hyperboly**;
4. body V_1 a V_2 (průsečíky hyperboly s její hlavní osou) jsou **hlavní vrcholy hyperboly**;
5. střed S úsečky F_1F_2 se nazývá **střed hyperboly**;
6. vzdálenost hlavního vrcholu hyperboly od středu hyperboly se nazývá **délka hlavní poloosy hyperboly** a značí se *a* ($a > 0$);
7. přímka procházející středem hyperboly kolmo k hlavní ose hyperboly se nazývá **vedlejší osa hyperboly**;
8. vzdálenost *b* definovaná vztahem
$$b = \sqrt{e^2 - a^2} \tag{21}$$
se nazývá **délka vedlejší poloosy hyperboly**.

Vzdálenost *b* lze změřit takto (viz obr. 24 resp. obr. 25): najdeme průsečík kolmice k hlavní ose hyperboly vedené jedním z hlavních vrcholů hyperboly s kružnicí, která má střed ve středu hyperboly a která má poloměr rovný *a*. Vzdálenost tohoto průsečíku od hlavní osy je rovna vzdálenosti *b*.

Pozor!!! Ačkoliv se používají podobné pojmy jako u elipsy, přeci jen se liší! Např. mezi vzdálenostmi *a*, *b* a *e* platí jiný vztah (vztah (21)) než u elipsy (viz srovnání se vztahem (8))!



obr. 24



obr. 25

Hyperbola je na rozdíl od kružnice a elipsy **otevřená křivka** a má **dvě větve**.

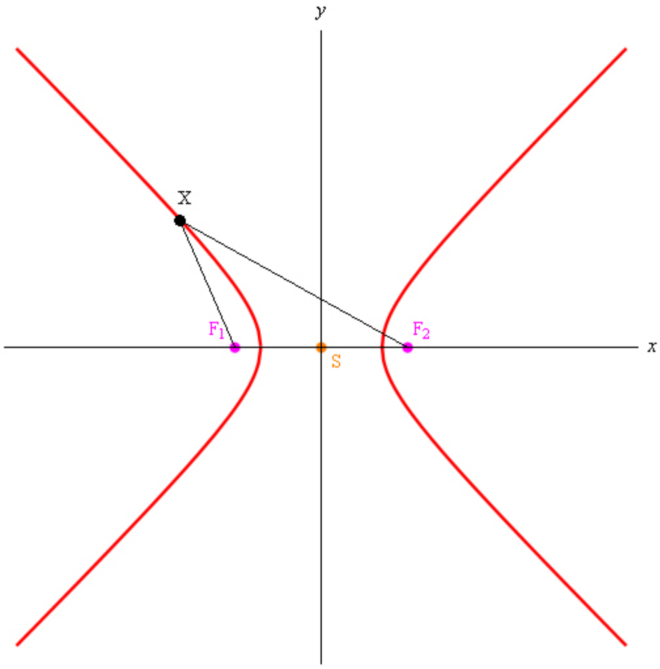
To znamená, že hyperbolu není možné nakreslit tužkou jedním tahem tak, abychom se vrátili zpět do bodu, v němž jsme kreslit začali. Vzhledem k tomu, že má dvě větve, musíme ji kreslit „nadvakrát“.

Podle obr. 24 a obr. 25 je zřejmé, že hyperbola může mít (analogicky jako elipsa) dvě základní polohy v kartézské soustavě souřadnic.

1.4.2 Odvození rovnice hyperboly

Libovolný bod $\mathrm{X}=[x;y]$ roviny, který leží na uvažované hyperbole, musí splňovat definiční vztah hyperboly (19). Z trojúhelníku $\mathrm{XF_1F_2}$ zobrazeného na obr. 26 na základě trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že $\left\| \mathrm{F_1X} \right| - \left| \mathrm{F_2X} \right\| < \left| \mathrm{F_1F_2} \right|$, což podle (19) a (20) znamená, že $2a < 2e$ a tedy

$$a < e. \tag{22}$$



obr. 26

Nejdříve budeme uvažovat speciální případ polohy hyperboly, u kterého její střed splývá s počátkem soustavy souřadnic (tj. $\mathrm{S}=[0;0]$) a hlavní osa je totožná s osou *x*. Pro libovolný bod $\mathrm{X}=[x;y]$ ležící na hyperbole, jejíž ohniska jsou $\mathrm{F_1}=[-e;0]$ a $\mathrm{F_2}=[e;0]$, musí platit definiční vztah (19). Ten můžeme přepsat tak, že vyjádříme vzdálenosti $\left|\mathrm{F_1X}\right|$ a $\left|\mathrm{F_2X}\right|$. Dostaneme tak $\left|\sqrt{(x+e)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-e)^2+(y-0)^2}\right| = 2a$. Umocněním tohoto vztahu na druhou získáme vztah $x^2+2xe+e^2+y^2-2\sqrt{\left(x^2+2xe+e^2+y^2\right)\left(x^2-2xe+e^2+y^2\right)}+x^2-2xe+e^2+y^2=4a^2$. Po další úpravě dostaneme $2\left(x^2+e^2+y^2\right)-2\sqrt{\left(x^2+e^2+y^2+2xe\right)\left(x^2+e^2+y^2-2xe\right)}=4a^2$. Vydělením rovnice dvěma a úpravou součinu pod odmocninou podle vztahu

$$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2 \tag{23}$$

dostaneme rovnici $x^2+e^2+y^2-\sqrt{\left(x^2+e^2+y^2\right)^2-4x^2e^2}=2a^2$. Osamostatněním odmocniny získáme rovnici $x^2+e^2+y^2-2a^2=\sqrt{\left(x^2+e^2+y^2\right)^2-4x^2e^2}$ a po jejím umocnění na druhou dostaneme rovnici ve tvaru $\left(x^2+e^2+y^2\right)^2-4a^2x^2-4a^2e^2-4a^2y^2+4a^4=\left(x^2+e^2+y^2\right)^2-4x^2e^2$. Odečtením stejných výrazů získáme rovnici ve tvaru $-4a^2x^2+4x^2e^2-4a^2y^2=4a^2e^2-4a^4$ a sloučením odpovídajících si členů můžeme rovnici přepsat ve tvaru $x^2\left(e^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(e^2-a^2\right)$. S využitím vztahu (21) můžeme dále psát $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$ a tedy dostáváme

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{24}$$

což je **osová rovnice hyperboly**.

Dělení výrazem a^2b^2 je v pořádku, neboť a je délka hlavní poloosy hyperboly a b je délka vedlejší poloosy hyperboly. Proto jsou obě tyto veličiny kladné.

VĚTA: HYPERBOLA SE STŘEDEM V BODĚ $S=[0;0]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE TOTOŽNÁ S OSOU x, JE POPSÁNA OSOVOU ROVNICÍ VE TVARU (24), KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY HYPERBOLY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY HYPERBOLY.

Tato hyperbola je tedy „obtočena“ kolem osy x (viz obr. 24).

Analogicky jako výše by bylo možné odvodit osovou rovnici hyperboly, jejíž osa je totožná s osou y.

VĚTA: HYPERBOLA SE STŘEDEM V BODĚ $S=[0;0]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE TOTOŽNÁ S OSOU y, JE POPSÁNA OSOVOU ROVNICÍ

$$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1, \tag{25}$$

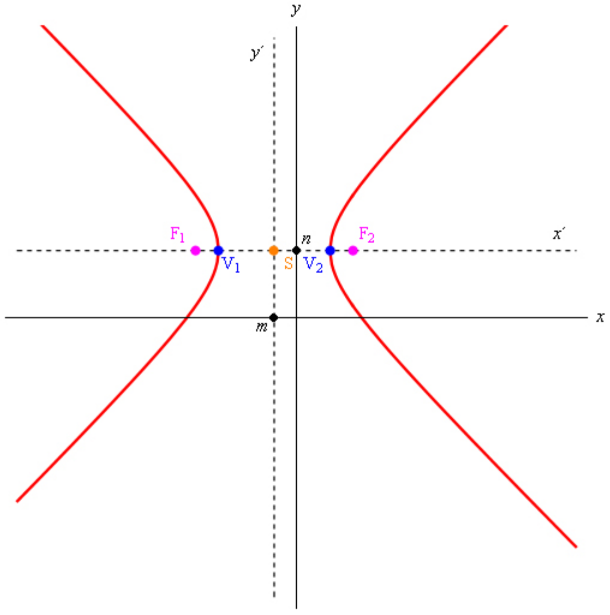
KDE a JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY HYPERBOLY A b JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY HYPERBOLY.

Tato hyperbola je „obtočena“ kolem osy y (viz obr. 25).

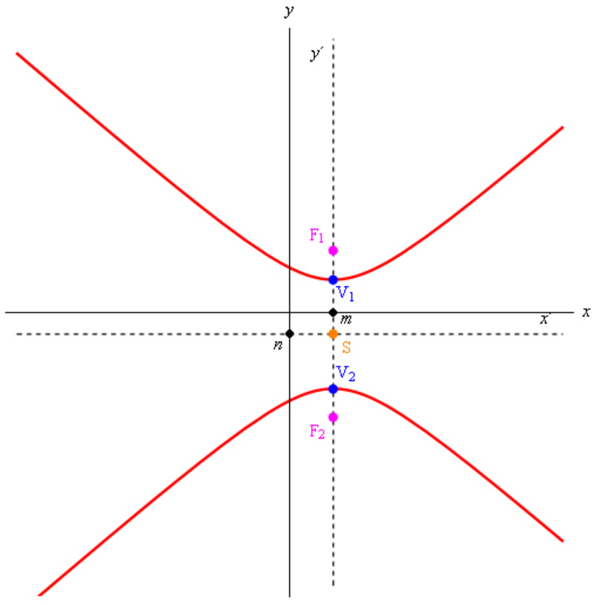
V případě, že $a=b$, nazývá se hyperbola **rovnoosá hyperbola** (viz kapitola 1.4.5).

Mezi rovnicí (24) hyperboly, jejíž osa je totožná s osou x, a rovnicí (25) hyperboly, jejíž osa je totožná s osou y, lze přecházet tak, že navzájem zaměníme x a y. To odpovídá i tomu, kolem které osy je hyperbola „obtočena“.

Rovnici hyperboly, která má střed v bodě $S=[m;n]$, lze odvodit buď zopakováním výpočtu podle definičního vztahu (19) hyperboly nebo úvahou. Posuneme počátek soustavy souřadnic $0xy$ tak, aby počátek soustavy souřadnic $0'x'y'$ splynul se středem S uvažované hyperboly a osa x' (resp. osa y') byla rovnoběžná s osou x (resp. s osou y). V soustavě souřadnic $0'x'y'$ bude pak hyperbola popsaná rovnicí (24) resp. (25). Při popisu z hlediska soustavy souřadnic $0xy$ je nutné započítat posun soustavy souřadnic $0'x'y'$ vůči soustavě souřadnic $0xy$.



obr. 27



obr. 28

VĚTA: HYPERBOLA SE STŘEDEM V BODĚ $S=[m;n]$, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU x, JE POPSANÁ ROVNICÍ VE TVARU

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1, \tag{26}$$

KDE a **JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY HYPERBOLY A** b **JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY HYPERBOLY.**

Jedna z hyperbol, které lze popsat rovnici ve tvaru (26), je zobrazená na obr. 27.

<u>VĚTA:</u> HYPERBOLA SE STŘEDEM V BODĚ $S=[m;n]$**, JEJÍŽ HLAVNÍ OSA JE ROVNOBĚŽNÁ S OSOU** y**, JE POPSANÁ ROVNICÍ VE TVARU**

$$-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1, \tag{27}$$

KDE a **JE DÉLKA HLAVNÍ POLOOSY HYPERBOLY A** b **JE DÉLKA VEDLEJŠÍ POLOOSY HYPERBOLY.**

Jedna z hyperbol, která je popsaná rovnicí ve tvaru (27), je zobrazena na obr. 28.

I v tomto případě je možné mezi rovnicemi (26) a (27) přecházet pouhou vzájemnou záměnou x a y. Tím se změní osa, kolem které je hyperbola „obtočena“.

Rovnice (24), (25), (26) a (27) lze vynásobením rovnice výrazem a^2b^2, umocněním dvojčlenů a následným sloučením členů, které sloučit lze, převést na **obecnou rovnici hyperboly** ve tvaru

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma x+\delta y+\omega=0. \tag{28}$$

kde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\omega\in\mathbb{R}$ a právě jedno z čísel α nebo β je záporné.

Zápornost právě jednoho z čísel α nebo β vyplývá z rovnic (24), (25), (26) a (27) hyperboly. Kdyby měla obě tato čísla stejná znaménka, nemůže se jednat o hyperbolu! Mohla, ale nemusela, by to být elipsa nebo kružnice.

1.4.3 <u>Vzájemná poloha bodu a hyperboly</u>

Pro vzájemnou polohu bodu $X=[x;y]$ a hyperboly mohou nastat tyto případy:

1. <u>bod X leží na hyperbole</u> – jeho souřadnice splňují rovnici $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$ (bod P na obr. 29) resp. $-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$ (bod U na obr. 30);
2. <u>bod X leží ve vnitřní oblasti hyperboly</u> – pro jeho souřadnice platí: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}>1$ (bod Q na obr. 29) resp. $-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}>1$ (bod V na obr. 30);

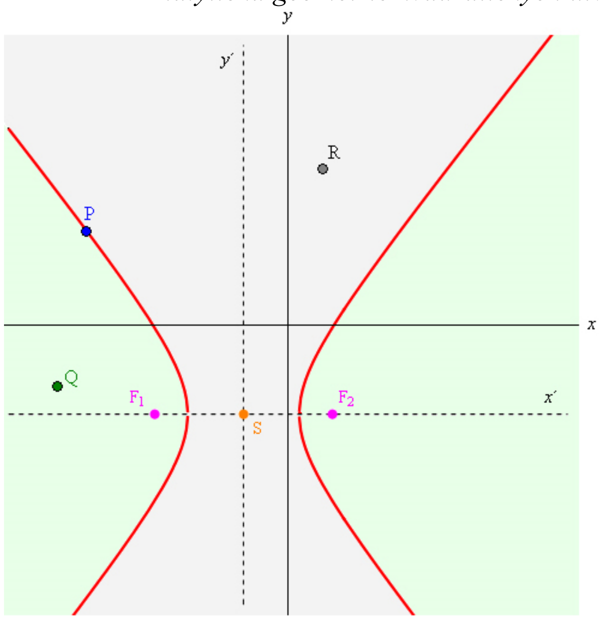
Vnitřní oblast je oblast, která je hyperbolou „mačkána“ nebo „svírána“.

3. <u>bod X leží vně hyperboly</u> – pro jeho souřadnice platí: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}<1$ (bod R na obr. 29) resp. $-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}<1$ (bod W na obr. 30).

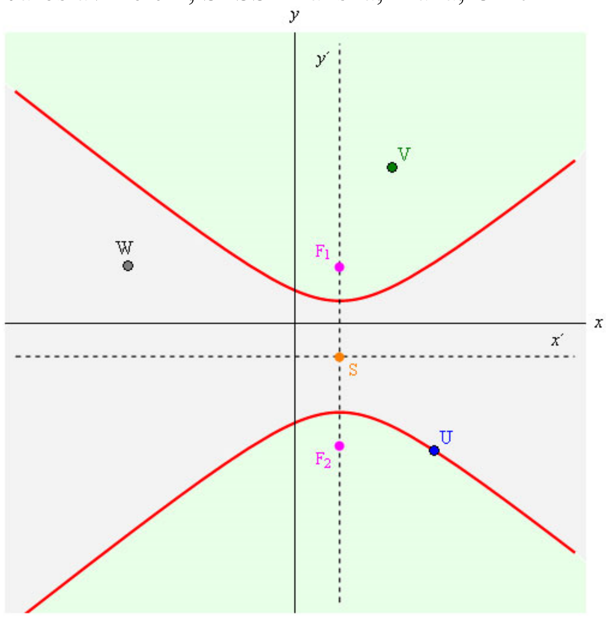
Vnější oblast je ta, kterou hyperbola „roztahuje“.

Pozor! Nerovnice charakterizující jednotlivé oblasti hyperboly jsou opačně než u elipsy nebo kružnice. Ale pořád platí, že bodem ležící ve vnější oblasti lze vést k dané kuželosečce tečnu.

V případě, že bychom uvedené nerovnice zapomněli, stačí do levé strany dosadit nějaký „jednoduchý bod“ (např. střed hyperboly) a znak nerovnice bude zřejmý.



obr. 29



obr. 30

1.4.4 Vzájemná poloha přímky a hyperboly

Vzájemnou polohu přímky a hyperboly je možné určit řešením soustavy rovnic: obecné rovnice přímky (resp. směrnicového tvaru rovnice přímky) a rovnice hyperboly. Jedná se soustavu lineární rovnice (rovnice přímky) a kvadratické rovnice (rovnice hyperboly). Při řešení je vhodné postupovat tak, že z lineární rovnice dosadíme do kvadratické rovnice, vypočteme jednu neznámou a zpětným dosazením do lineární rovnice vypočítáme druhou neznámou.

Odvození vzájemné polohy přímky a hyperboly ukážeme na hyperbole, jejíž osy splývají s osami kartézského systému souřadnic, přičemž hlavní osa hyperboly splývá s osou x. Uvažujme tedy přímku p danou rovnicí

$$y = kx + q \tag{29}$$

a hyperbolu danou rovnicí (24), kterou je možné upravit na tvar

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 . \tag{30}$$

Tvar rovnice (30) je speciální podoba obecné rovnice hyperboly ve tvaru (28).

I kdyby nebyla přímka vyjádřená ve směrnicovém tvaru (29), je snadné přímku zadanou parametrickým vyjádřením nebo přímku danou obecnou rovnicí vyjádřit rovnicí ve tvaru (29).

Dosadíme-li nyní za y z rovnice (29) do rovnice hyperboly (30), dostaneme $b^2x^2 - a^2(kx+q)^2 = a^2b^2$, kde $a, b, k, q \in \mathbb{R}$ a a i b jsou kladná čísla. Tuto rovnici je možné upravit umocněním dvojčlenu a následným sloučením odpovídajících si členů (v závislosti na mocnině neznámé x). Získáme tak rovnici

$$\left(b^2 - a^2k^2\right)x^2 - 2kqa^2x - a^2q^2 - a^2b^2 = 0 . \tag{31}$$

Rovnice (31) může být:

1. kvadratická – pokud $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, což znamená, že $k \neq \pm\frac{b}{a}$. V tomto případě má řešená soustava rovnic žádné, jedno nebo dvě řešení. Přímka p popsaná rovnicí (29) a hyperbola v tomto případě mají nula, jeden nebo dva společné body, což odpovídá tomu, že přímka p je vnější přímka, tečna nebo sečna.

Dělit koeficientem a při vyjadřování koeficientu k je možné, neboť a má význam délky hlavní poloosy, a je tedy kladné.

2. lineární – pokud $b^2 - a^2k^2 = 0$, a tedy $k = \pm\frac{b}{a}$. V tomto případě přejde rovnice (31) na rovnici

$$-2kqa^2x - a^2q^2 - a^2b^2 = 0 \tag{32}$$

a řešení se opět rozpadá na dvě možnosti:

a) $q = 0$ – rovnice (32) má tvar $0x - a^2b^2 = 0$, a tedy nemá řešení. To znamená, že přímky dané rovnicemi

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{33}$$

nemají s hyperbolou žádný společný bod.

Rovnici $0x - a^2b^2 = 0$ lze psát ve tvaru $0x = a^2b^2$, ze kterého je už jasně vidět, že rovnice nemá žádné řešení. Koeficienty a a b představují délky poloos hyperboly a jsou to tedy kladná čísla. Umocněním kladných čísel získáme opět čísla kladná a součin kladných čísel nikdy nemůže být nulový!

Tvar rovnice přímky (33) vyplývá z tvaru rovnice přímky (29), do kterého dosadíme $k = \pm\frac{b}{a}$ a $q = 0$.

b) $q \neq 0$ – rovnice (32) má jediné řešení a přímky popsané rovnicemi

$$y = \pm\frac{b}{a}x + q \tag{34}$$

mají s hyperbolou společný jediný bod.

Při zkoumání vzájemné polohy přímky dané rovnicí (29) a hyperboly dané rovnicí (25) je postup obdobný, pouze s tím rozdílem, že „kritická" hodnota směrnice k přímek bude tentokráte rovna $k = \pm\frac{a}{b}$. Tyto přímky mají pro hyperbolu důležitý význam.

PŘÍMKY DANÉ ROVNICÍ $y = \pm\frac{b}{a}x$ PROCHÁZEJÍCÍ STŘEDEM HYPERBOLY POPSANÉ ROVNICÍ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ A PŘÍMKY DANÉ ROVNICÍ $y = \pm\frac{a}{b}x$ PROCHÁZEJÍCÍ STŘEDEM HYPERBOLY POPSANÉ ROVNICÍ $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ SE NAZÝVAJÍ ASYMPTOTY HYPERBOLY.

Asymptoty jsou přímky, které se obecně k dané křivce (nejen k hyperbole) v nekonečnu nejvíce „přimykají" (tj. pro velká x je jedno, jestli půjdeme po dané křivce nebo po její asymptotě – obě cesty budou skoro stejné).

Rovnoosá hyperbola (viz odstavec 1.4.5) má asymptoty navzájem na sebe kolmé: asymptotami jsou totiž přímky $y = \pm x + \delta$ (kde $\delta \in \mathbb{R}$), tedy osa I. a III. kvadrantu, osa II. a IV. kvadrantu nebo přímky s nimi rovnoběžné.

Analogicky bychom postupovali při vyšetřování vzájemné polohy a přímky a hyperboly v případě, že by hyperbola měla střed obecně v bodě $S = [m; n]$. Asymptoty takové hyperboly procházejí tímto středem, takže jejich rovnice mají tvar

$$y = \pm\frac{b}{a}(x - m) + n \text{ resp. } y = \pm\frac{a}{b}(x - m) + n. \tag{35}$$

Vzájemnou polohu přímky a hyperboly tedy můžeme shrnout:

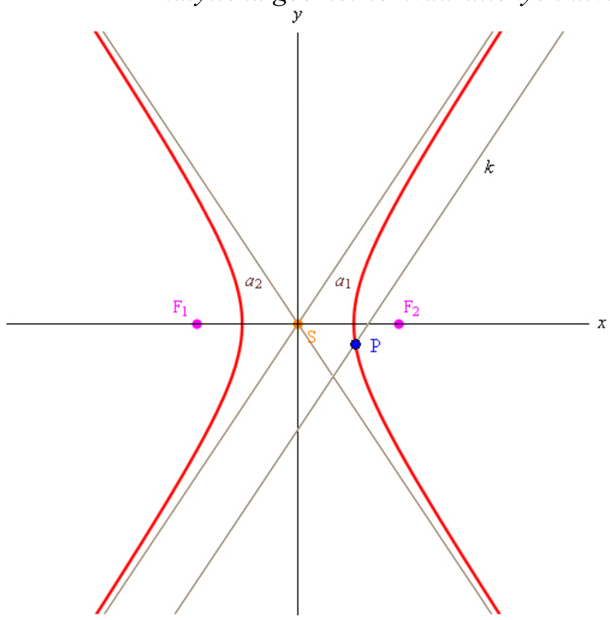
1. Asymptota hyperboly nemá s hyperbolou žádný společný bod (přímky a_1 a a_2 na obr. 31).
2. Přímka, která je s asymptotou rovnoběžná různá, má s hyperbolou společný jediný bod, ale **<u>NENÍ TO TEČNA</u>** (přímka k na obr. 31).

Tento průsečík získáme tak, že budeme řešit **<u>LINEÁRNÍ ROVNICI</u>** – kvadratické členy v rovnici „vypadnou".

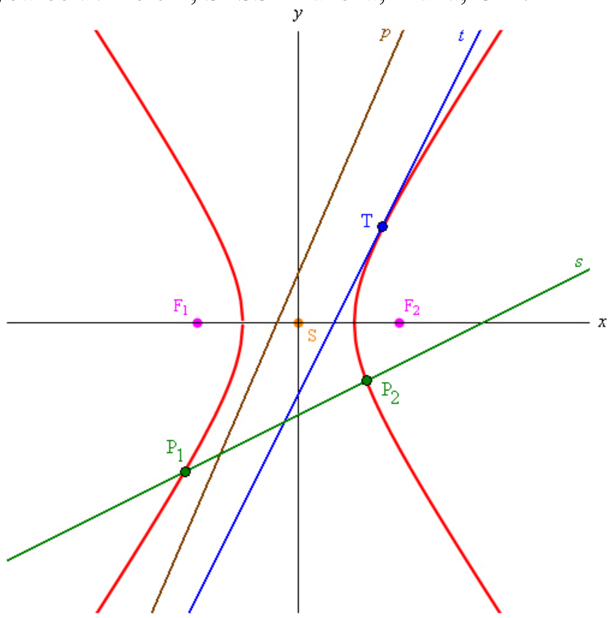
3. Přímka, která je s asymptotou hyperboly různoběžná, může mít s hyperbolou:

a) společné dva různé body – pak se jedná o sečnu hyperboly (přímka s na obr. 32);
b) společný jediný společný bod – pak se jedná o tečnu hyperboly (přímka t na obr. 32);
c) žádný společný bod – pak se jedná o vnější přímku hyperboly (přímka p na obr. 32).

V těchto třech případech řešíme **<u>KVADRATICKOU ROVNICI</u>**.



obr. 31



obr. 32

Zvláštní význam má (i v souvislosti s diferenciálním počtem a integrálním počtem) tečna hyperboly.

<u>VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA HYPERBOLA ROVNICÍ VE STŘEDOVÉM TVARU $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$**. TEČNA** t **K TÉTO HYPERBOLE V JEJÍM BODĚ** $\mathrm{T}=[x_0; y_0]$ **JE POTOM DÁNA ROVNICÍ**

$$\frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}-\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1. \tag{36}$$

<u>VĚTA:</u> NECHŤ JE DÁNA HYPERBOLA ROVNICÍ VE STŘEDOVÉM TVARU $-\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$**. TEČNA** t **K TÉTO HYPERBOLE V JEJÍM BODĚ** $\mathrm{T}=[x_0; y_0]$ **JE POTOM DÁNA ROVNICÍ**

$$-\frac{(x-m)(x_0-m)}{b^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{a^2}=1. \tag{37}$$

Rovnice tečen mají opět podobný tvar jako samy rovnice hyperbol. Analogická podobnost rovnice tečny a křivky se vyskytla už u kružnice a elipsy.

Odvození rovnice tečny k hyperbole v daném bodě je možné až s využitím diferenciálního počtu.

1.4.5 <u>Rovnoosá hyperbola s asymptotami v osách soustavy souřadnic</u>

Ve fyzikálních a technických aplikacích se často vyskytuje rovnoosá hyperbola, která je zvláštním případem hyperboly. Pro využití v aplikacích matematiky se hyperbola většinou natáčí tak, že její asymptoty jsou totožné s osami x a y kartézského systému souřadnic (resp. rovnoběžné s osami daného kartézského systému souřadnic). Asymptoty jsou přitom v tomto případě navzájem kolmé. Hlavní osa hyperboly a vedlejší osa hyperboly jsou osami I. a III. kvadrantu a II. a IV. kvadrantu (resp. jsou s osami kvadrantů rovnoběžné). Délka hlavní poloosy a délka vedlejší poloosy jsou stejné, což vplývá už z názvu tohoto typu hyperboly.

Předpokládejme, že hlavní osa rovnoosé hyperboly je osou I. a III. kvadrantu, a střed hyperboly je v bodě $\mathrm{S}=[0;0]$. Vzhledem k tomu, že platí $a=b$ je podle vztahu (21) $e=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$. Ohnisko F_1 leží na hlavní ose hyperboly ve vzdálenosti $e=a\sqrt{2}$ od jejího středu. To znamená, že jeho souřadnice jsou $\mathrm{F}_1=[a;a]$. Souřadnice ohniska F_2 jsou ze stejných důvodů $\mathrm{F}_2=[-a;-a]$. Pro libovolný bod $\mathrm{X}=[x;y]$ hyperboly pak můžeme rozepsat definici hyperboly (19) ve tvaru $\left|\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}-\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right|=2a$. Umocněním na druhou dostaneme rovnici ve tvaru:

$$(x-a)^2+(y-a)^2-2\sqrt{\left(x^2-2ax+a^2+y^2-2ay+a^2\right)\left(x^2+2ax+a^2+y^2+2ay+a^2\right)}+(x+a)^2+(y+a)^2=4a^2$$

Po dalším umocnění na druhou a sloučením odpovídajících si výrazů dostaneme rovnici $2x^2+2y^2+4a^2-2\sqrt{\left(x^2+2a^2+y^2-2a(x+y)\right)\left(x^2+2a^2+y^2+2a(x+y)\right)}=4a^2$. S využitím algebraického vztahu (23) dostaneme rovnici $x^2+y^2-\sqrt{\left(x^2+2a^2+y^2\right)^2-4a^2(x+y)^2}=0$. Převedením odmocniny na jednu stranu rovnice získáme rovnici ve tvaru $x^2+y^2=\sqrt{\left(x^2+2a^2+y^2\right)^2-4a^2(x+y)^2}$, kterou dále umocněním upravíme na tvar $x^4+2x^2y^2+y^4=x^4+4a^4+y^4+4a^2x^2+4a^2y^2+2x^2y^2-4a^2x^2-8a^2xy-4a^2y^2$. Odečtením stejných členů získáme rovnici ve tvaru $8a^2xy=4a^4$. Vzhledem k tomu, že a je délka hlavní poloosy hyperboly, a tedy je to číslo kladné, lze jím rovnici dělit. Dostáváme tak

$$xy=\frac{1}{2}a^2, \tag{38}$$

což je **rovnice rovnoosé hyperboly**.

Analogickým postupem bychom odvodili rovnici rovnoosé hyperboly, která by byla umístěná tak, že její hlavní osa by byla osou II. a IV. kvadrantu. Dostali bychom rovnici ve tvaru

$$xy=-\frac{1}{2}a^2. \tag{39}$$

<u>VĚTA:</u> ROVNOOSÁ HYPERBOLA, JEJÍŽ OSY JSOU TOTOŽNÉ S OSAMI KVADRANTŮ KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC $0xy$ A JEJÍŽ ASYMPTOTY LEŽÍ V OSÁCH TOHOTO SYSTÉMU SOUŘADNIC, JE POPSÁNA ROVNICÍ

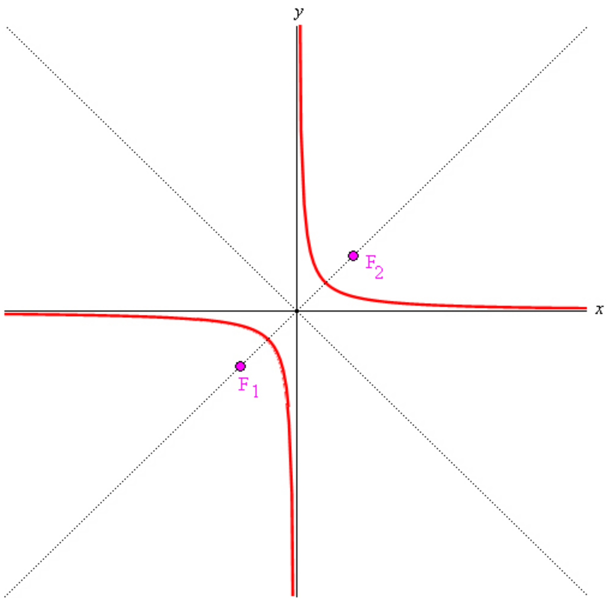
$$y=\frac{k}{x}, \tag{40}$$

KDE $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. PRO:

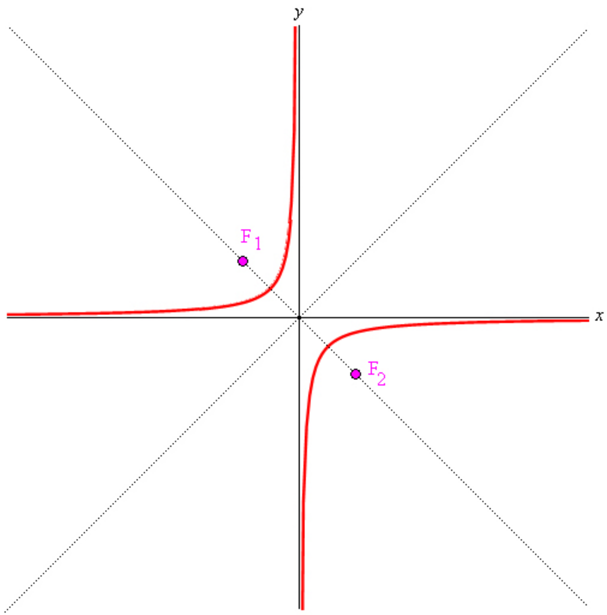
$k>0$ LEŽÍ VĚTVE HYPERBOLY V I. A VE III. KVADRANTU SOUŘADNÉHO SYSTÉMU (VIZ OBR. 33);

$k<0$ LEŽÍ VĚTVE HYPERBOLY V II. A VE IV. KVADRANTU SOUŘADNÉHO SYSTÉMU (VIZ OBR. 34).

Srovnáním vztahů (38), (39) a (40) dostaneme, že $|k|=\frac{1}{2}a^2$.



obr. 33



obr. 34

Analogickým postupem by bylo možné odvodit rovnoosou hyperbolu, která nemá střed v počátku soustavy souřadnic, ale obecně v bodě $S=[m;n]$. Jiný způsob odvození této rovnice spočívá v posunutí grafu takovým způsobem, že počátek soustavy souřadnic posuneme do bodu $\mathrm{S} = [m; n]$. Potom dostaneme rovnici rovnoosé hyperboly ve tvaru $(x-m)(y-n) = \pm\frac{1}{2}a^2$, odkud vyplývá

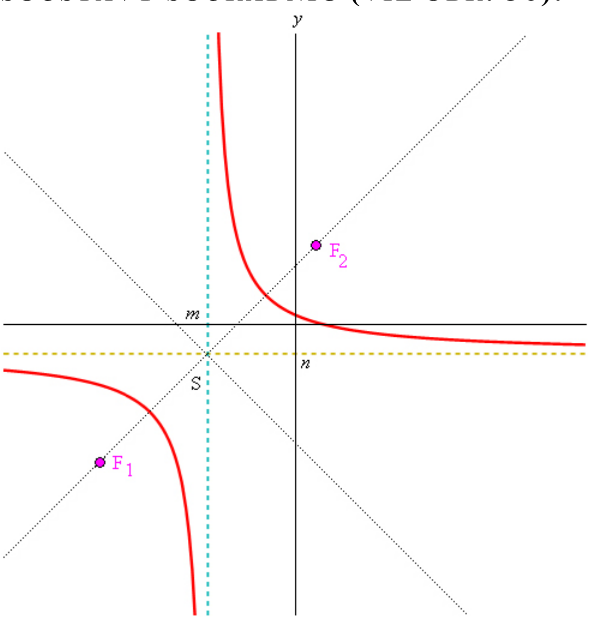
$$y = \frac{k}{x-m} + n, \tag{41}$$

přičemž $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

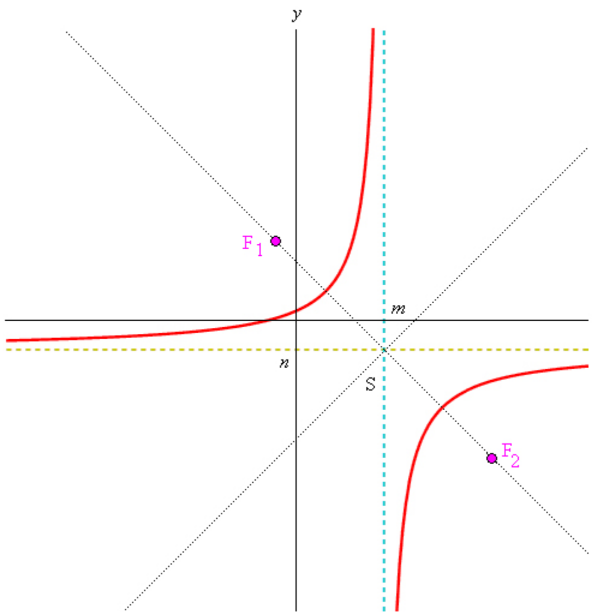
<u>VĚTA:</u> ROVNOOSÁ HYPERBOLA, JEJÍŽ OSY JSOU ROVNOBĚŽNÉ S OSAMI KVADRANTŮ KARTÉZSKÉHO SYSTÉMU SOUŘADNIC $0xy$, JEJÍŽ ASYMPTOTY LEŽÍ NA PŘÍMKÁCH ROVNOBĚŽNÝCH S OSAMI TOHOTO SYSTÉMU SOUŘADNIC A JEJÍŽ STŘED MÁ SOUŘADNICE $\mathrm{S} = [m; n]$, JE POPSÁNA ROVNICÍ (41). PRO:

$k > 0$ LEŽÍ VĚTVE HYPERBOLY V I. A VE III. KVADRANTU POSUNUTÉ SOUSTAVY SOUŘADNIC (VIZ OBR. 35);

$k < 0$ LEŽÍ VĚTVE HYPERBOLY V II. A VE IV. KVADRANTU POSUNUTÉ SOUSTAVY SOUŘADNIC (VIZ OBR. 36).



obr. 35



obr. 36

Rovnoosá hyperbola se středem v bodě $\mathrm{S} = [0; 0]$ je tedy vlastně lineárně lomená funkce.

1.5 Parabola

1.5.1 Definice hyperboly a její popis

Poslední kuželosečkou, s níž se seznámíme a která má také velmi rozsáhlé použití nejen v matematice, ale i v aplikačních předmětech (fyzika, mechanika, elektrotechnika, …), je parabola.

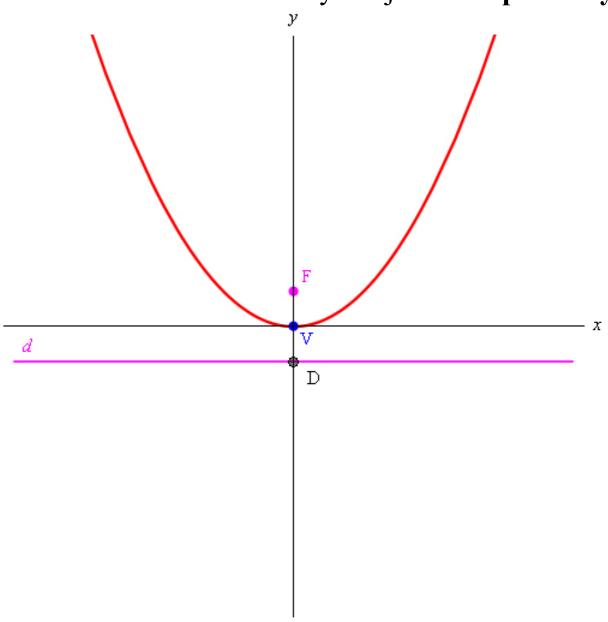
PARABOLA JE MNOŽINA VŠECH BODŮ V ROVINĚ, KTERÉ MAJÍ STEJNOU VZDÁLENOST OD DANÉHO BODU F A OD DANÉ PŘÍMKY d, NA KTERÉ BOD F NELEŽÍ. TO ZNAMENÁ, ŽE PRO LIBOVOLNÝ BOD X LEŽÍCÍ NA PARABOLE MŮŽEME PSÁT:

$$|\mathrm{FX}| = |\mathrm{X}d|. \tag{42}$$

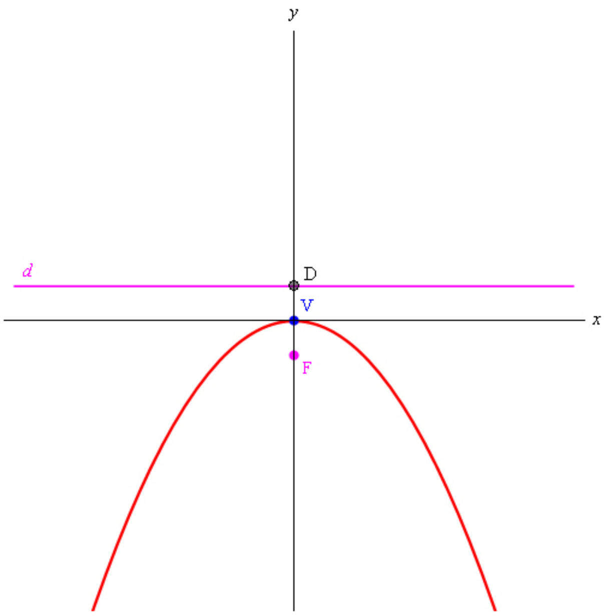
Pro účely středoškolské matematiky se uvažují pouze takové přímky d, které jsou kolmé k jedné z os kartézského systému souřadnic. Bylo by ale možné obecně definovat parabolu, jejíž řídící přímka d má libovolnou polohu vzhledem k osám kartézského systému souřadnic.

Terminologii a značení důležitých bodů a vzdáleností paraboly vysvětlíme na parabole, jejíž osa splývá s osou y a která je umístěna v základní poloze (viz obr. 37):

1. bod F se nazývá **ohnisko paraboly**;
2. přímka d se nazývá **řídící přímka paraboly**;
3. přímka o vedená bodem F kolmo na přímku d se nazývá **osa paraboly**;
4. vzdálenost p ohniska F od řídící přímky d se nazývá **parametr paraboly** a platí tedy
$$|\mathrm{F}d| = |\mathrm{FD}| = p, \tag{43}$$
kde bod D je průsečík osy paraboly s její řídící přímkou;
5. středem úsečky FD je **vrchol paraboly** V.



obr. 37



obr. 38

Parabola je (stejně jako hyperbola – viz odstavec 1.4.1) **otevřená křivka**.

Parabolu tedy není možné nakreslit tak, že bychom se vrátili s tužkou, kterou parabolu kreslíme, do téhož bodu, v němž jsme s kreslením začali.

1.5.2 Odvození rovnice paraboly

Nejdříve odvodíme rovnici paraboly umístěné v soustavě souřadnic tak, že vrchol V paraboly je totožný s počátkem soustavy souřadnic a ohnisko F leží na kladné poloose y, tj. má souřadnice $\mathrm{F} = \left[0; \frac{p}{2}\right]$. Řídící přímka paraboly d je v tomto případě popsána rovnicí $y = -\frac{p}{2}$, tedy je dána obecnou rovnicí přímky ve tvaru

$$2y + p = 0. \tag{44}$$

Rovnici paraboly získáme na základě jejího definičního vztahu (42). Má-li libovolný bod $X=[x;y]$ ležet na parabole, musí jeho souřadnice splňovat podmínku $\sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\frac{|2y+p|}{2}$.

Levá strana právě napsané rovnice představuje vzdálenost bodu X od bodu F, pravá strana rovnice vyjadřuje vzdálenost bodu X od přímky *d*, která je popsána rovnicí (44). Vzdálenost bodu od přímky je určena pomocí vztahu pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky, která je popsána obecnou rovnicí.

Dalším rozpisem uvedené rovnosti získáme $\sqrt{x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}}=\frac{|2y+p|}{2}$ a po umocnění na druhou dostaneme $x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=\frac{4y^2+4py+p^2}{4}$. Po úpravě máme rovnici $x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4}$, a tedy dostáváme

$$x^2=2py. \tag{45}$$

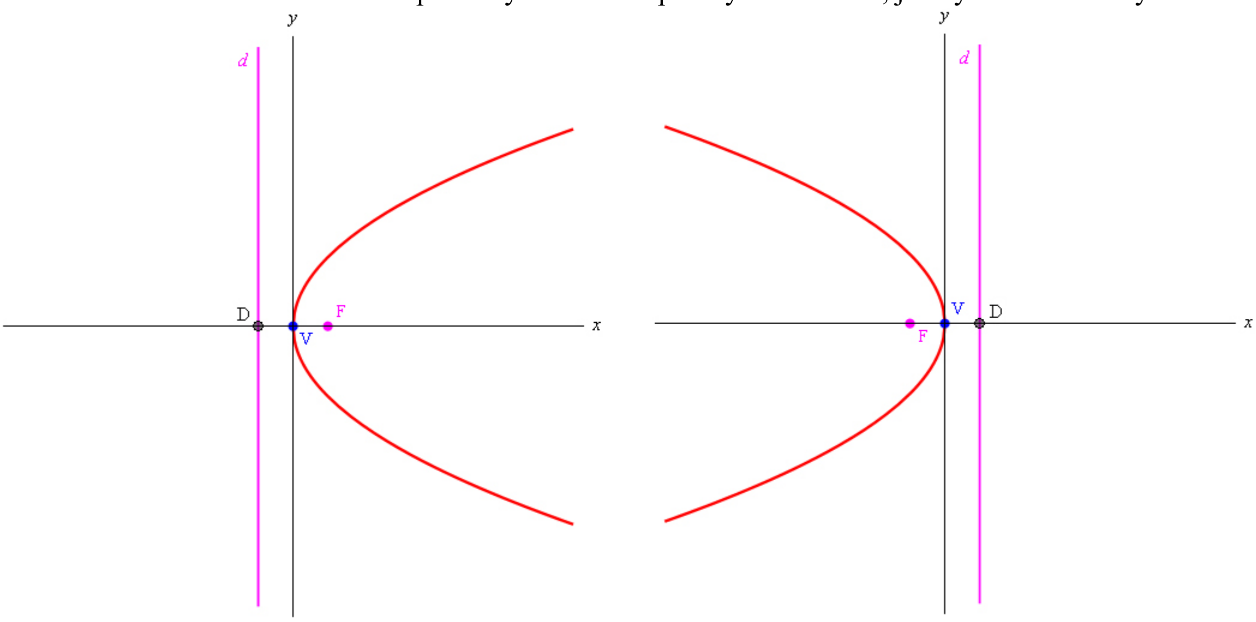
Na rozdíl od kružnice, elipsy a hyperboly je rovnice paraboly jediná rovnice kuželosečky, která je „divná“ – vymyká se tvaru rovnice, který byl typický pro ostatní kuželosečky. Rovnice paraboly obsahuje pouze jeden kvadratický člen – buď x^2 nebo y^2.

Odvození rovnice paraboly s vrcholem v počátku souřadnic, jejíž ohnisko by leželo na záporné poloose *y*, by bylo podobné. Oba tyto typy parabol přitom známe z kapitoly o kvadratických funkcích, neboť tyto typy parabol jsou grafy kvadratických funkcí.

Ve středoškolské analytické geometrii je ale možné definovat další dvě polohy paraboly, jejichž ohniska budou ležet na ose *x* (na kladné části osy *x* nebo na záporné části osy *x*). Odvození rovnic těchto dvou typů parabol by bylo analogické jako výše uvedené odvození paraboly, jejíž ohnisko leželo na kladné části osy *y*.

Parabolu v analytické geometrii je tedy možné nejen „postavit“ do kartézského systému souřadnic, ale je možné ji do něj i „položit“.

Rovnice popisující parabolu v závislosti na poloze ohnisek shrnuje následující věta. Tu by bylo možné dokázat odvozením rovnice paraboly na základě polohy ohnisek tak, jak bylo odvozeno výše.



obr. 39 *obr. 40*

<u>**VĚTA:**</u> **PARABOLA S PARAMETREM p (p JE KLADNÉ REÁLNÉ ČÍSLO), KTERÁ MÁ VRCHOL V POČÁTKU SOUSTAVY SOUŘADNIC A OHNISKO NA:**

OSE y, MÁ ROVNICI

$x^2=2py$, **LEŽÍ-LI OHNISKO NA KLADNÉ POLOOSE y (VIZ OBR. 37);**

$x^2 = -2py$, **LEŽÍ-LI OHNISKO NA ZÁPORNÉ POLOOSE** y **(VIZ OBR. 38);**

OSE x**, MÁ ROVNICI**

$y^2 = 2px$, **LEŽÍ-LI OHNISKO NA KLADNÉ POLOOSE** x **(VIZ OBR. 39);**

$y^2 = -2px$, **LEŽÍ-LI OHNISKO NA ZÁPORNÉ POLOOSE** x **(VIZ OBR. 40).**

Znaménko mínus je v rovnici paraboly tehdy, pokud je parabola otevřená směrem do záporné části osy x nebo záporné části osy y.

Při odvozování rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou x (resp. s osou y), vrchol má souřadnice $\mathrm{V} = [m; n]$ a ohnisko F leží napravo nebo nalevo (resp. nad nebo pod) vrcholem V, se postupuje podobně jako při odvozování rovnice hyperboly (viz odstavec 1.4.2), jejíž střed neležel v počátku soustavy souřadnic. Posuneme soustavu souřadnic tak, aby počátek soustavy souřadnic splynul s vrcholem V paraboly a její osa byla totožná s jednou z os této posunuté soustavy souřadnic.

Získáme tak různé tvary rovnice paraboly, které shrnuje následující věta.

VĚTA: **PARABOLA S PARAMETREM** p **(**p **JE KLADNÉ REÁLNÉ ČÍSLO), KTERÁ MÁ VRCHOL V BODĚ** $\mathrm{V} = [m; n]$ **A JEJÍŽ OSA JE:**

ROVNOBĚŽNÁ S OSOU y**, MÁ ROVNICI**

$(x-m)^2 = 2p(y-n)$, **LEŽÍ-LI OHNISKO NAD VRCHOLEM** V **(VIZ OBR. 41);**

$(x-m)^2 = -2p(y-n)$, **LEŽÍ-LI OHNISKO POD VRCHOLEM** V **(VIZ OBR. 42);**

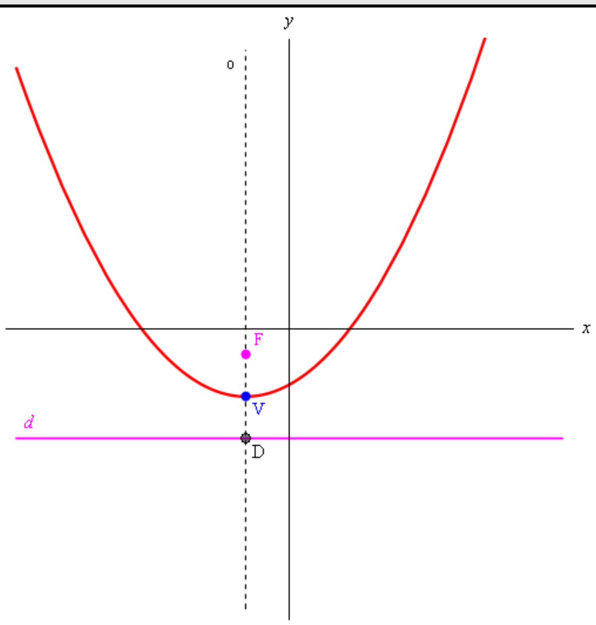
ROVNOBĚŽNÁ S OSOU x**, MÁ ROVNICI**

$(y-n)^2 = 2p(x-m)$, **LEŽÍ-LI OHNISKO VPRAVO OD VRCHOLU** V **(VIZ OBR. 43);**

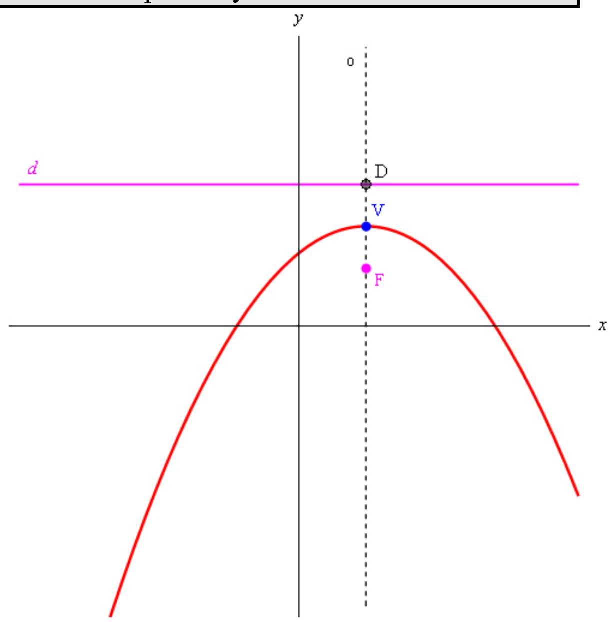
$(y-n)^2 = -2p(x-m)$, **LEŽÍ-LI OHNISKO VLEVO OD VRCHOLU** V **(VIZ OBR. 44).**

Všechny uvedené tvary rovnic paraboly se nazývají **vrcholové tvary rovnice paraboly**.

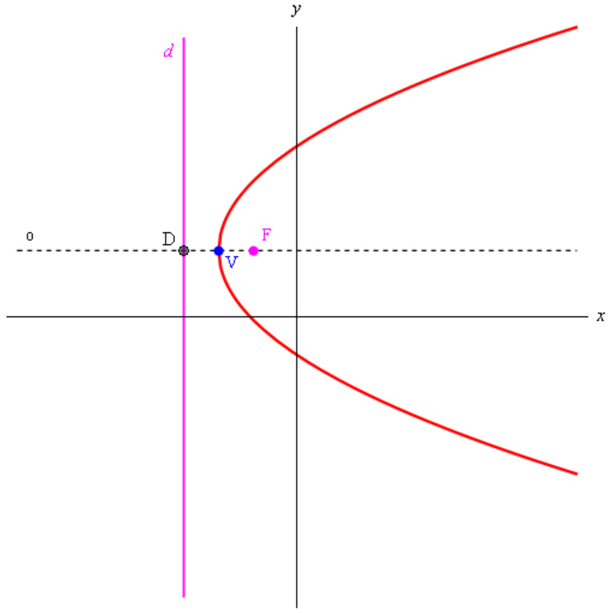
Z těchto rovnic lze totiž velmi dobře číst souřadnice vrcholu paraboly.



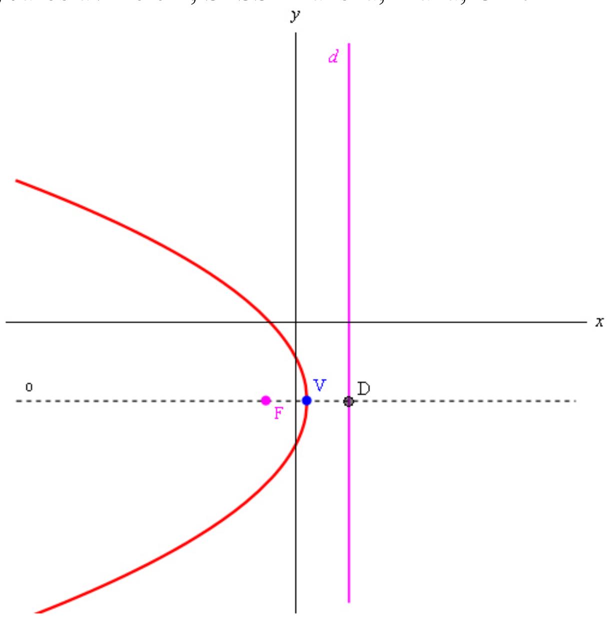
obr. 41



obr. 42



obr. 43



obr. 44

Rovnice paraboly lze převést umocněním dvojčlenu a převedením členů rovnice na jednu stranu rovnice na **obecnou rovnici paraboly** ve tvaru

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \omega = 0\,, \tag{46}$$

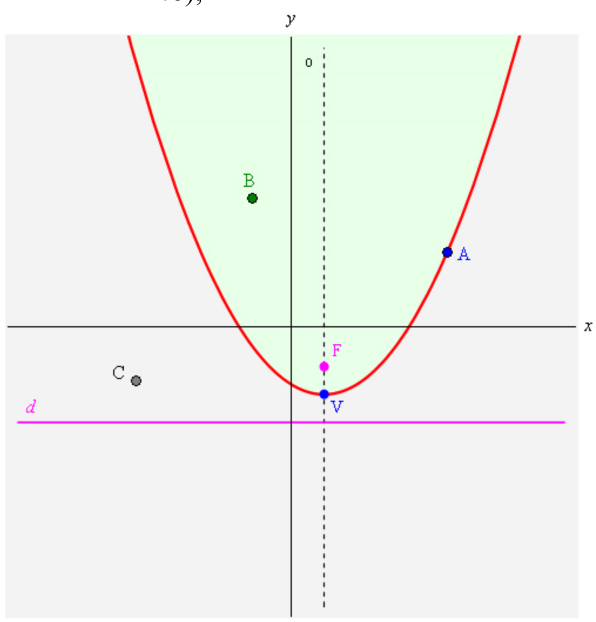
kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega \in \mathbb{R}$ a právě jedno z čísel α nebo β je nulové.

Jedno z čísel α nebo β musí být nulové proto, aby v rovnici paraboly „vypadl“ jeden kvadratický člen: buď *x*-ový nebo *y*-ový.

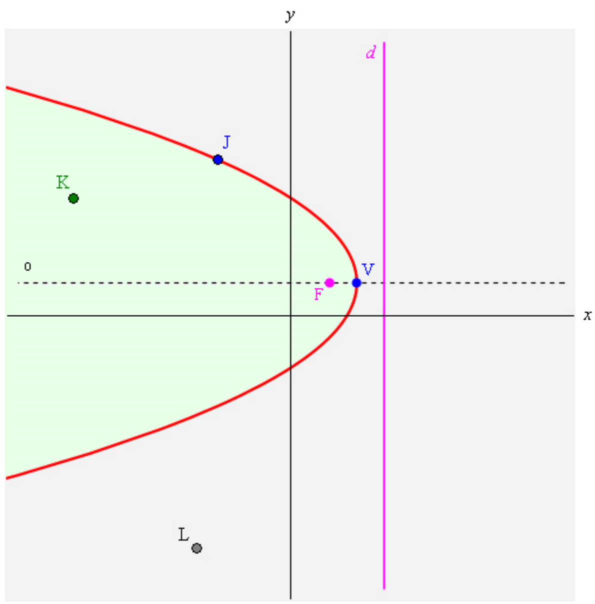
1.5.3 <u>Vzájemná poloha bodu a paraboly</u>

Pro vzájemnou polohu bodu o souřadnicích $[x; y]$ a paraboly, jejíž vrchol je v bodě $\mathrm{V} = [m; n]$, mohou nastat tyto případy:

1. <u>bod leží na parabole</u> – souřadnice bodu splňují rovnici $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$ (bod A na obr. 45) resp. $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$ (bod J na obr. 46);
2. <u>bod leží ve vnitřní oblasti paraboly</u> – souřadnice bodu splňují nerovnici $(x-m)^2 < \pm 2p(y-n)$ (bod B na obr. 45) resp. $(y-n)^2 < \pm 2p(x-m)$ (bod K na obr. 46);



obr. 45



obr. 46

Vnitřní oblast paraboly je ta oblast, která je parabolou „mačkána“ nebo „svírána“.

3. bod leží vně paraboly – souřadnice bodu splňují nerovnici $(x-m)^2 > \pm 2p(y-n)$ (bod C na obr. 45) resp. $(y-n)^2 > \pm 2p(x-m)$ (bod L na obr. 46).

Vnější oblast paraboly je ta „větší“ z oblastí, na které parabola rozděluje rovinu. V této oblasti leží body, kterými lze vést tečnu k parabole.

Obrázky jsou zobrazeny pouze dva, ačkoliv by měly být (v závislosti na vzájemné poloze vrcholu paraboly a ohniska paraboly) čtyři. Ostatní obrázky by byly ale analogické.

1.5.4 Vzájemná poloha přímky a paraboly

Vzájemnou polohu přímky a paraboly je možné určit řešením soustavy kvadratické rovnice, která popisuje parabolu, a lineární rovnice, která popisuje přímku. Vzhledem k tomu, že kvadratická rovnice popisující parabolu obsahuje pouze jednu neznámou ve druhé mocnině (a druhá je v první mocnině), lze při řešení soustavy rovnic postupovat takto:

1. z lineární rovnice popisující přímku vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do kvadratické rovnice popisující parabolu;

To je metoda, která je použitelná při vyšetřování vzájemné polohy přímky a libovolné kuželosečky. V případě vyšetřování vzájemné polohy přímky a paraboly je možné si výpočet dále zjednodušit tak, že vyjádříme z lineární rovnice tu neznámou, která není v rovnici paraboly na druhou. Ale pro nalezení správného řešení (vzájemná poloha přímky a paraboly, resp. souřadnice průsečíků) je možné vyjádřit libovolnou neznámou.

2. z kvadratické rovnice popisující parabolu vyjádříme tu neznámou, která je v příslušné rovnici v první mocnině a dosadíme do lineární rovnice popisující přímku.

V obou případech získáme obecně kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme, a nalezené kořeny dosadíme do druhé rovnice. Počet řešení soustavy rovnic určuje zároveň počet společných bodů přímky a paraboly. V případě, že vyjde právě jedno řešení soustavy rovnic, je nutné ještě ověřit, zda zadaná přímka je nebo není rovnoběžná s osou paraboly.

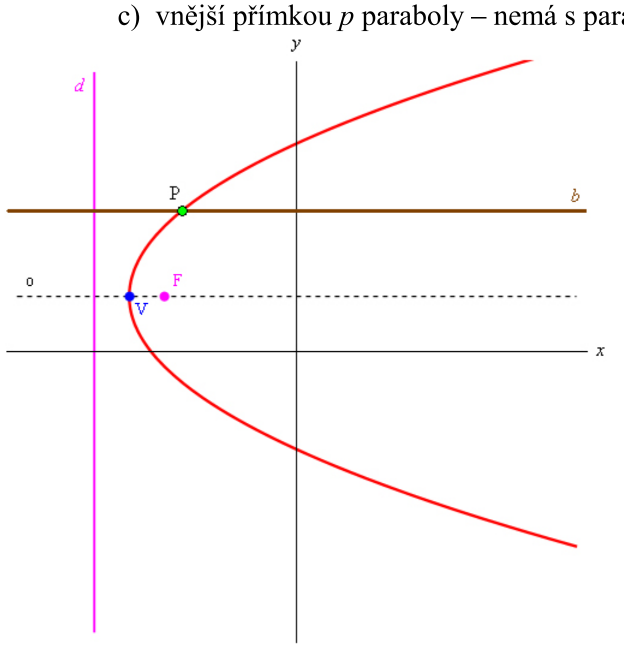
Při určování vzájemné polohy přímky a paraboly je totiž nutné rozlišovat následující případy:

1. přímka je b rovnoběžná s osou paraboly – přímka protíná parabolu v jediném bodě, ale přímka b přitom **NENÍ TEČNA** (viz obr. 47);

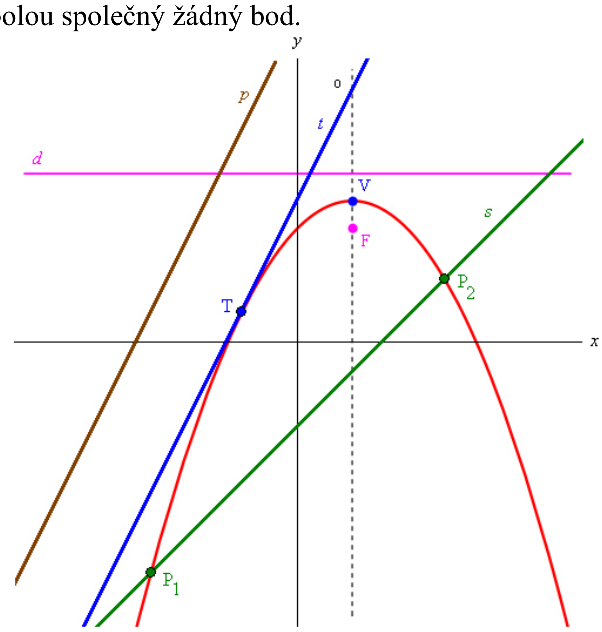
Přímka je tečnou kuželosečky pouze tehdy, jestliže leží celá ve vnější oblasti kuželosečky. Přímka b přitom podle popisu a podle obr. 47 přechází z vnější oblasti paraboly do vnitřní oblasti paraboly (viz kapitola 1.5.3), a proto nemůže být tečnou.

2. přímka různoběžná s osou paraboly (viz obr. 48) může být:

a) sečnou s paraboly – má s parabolou společné dva různé body;
b) tečnou t paraboly – má s parabolou společný právě jeden bod;
c) vnější přímkou p paraboly – nemá s parabolou společný žádný bod.



obr. 47



obr. 48

Zvláštní význam má (stejně jako u ostatních kuželoseček) tečna paraboly.

<u>Věta:</u> Nechť je dána parabola rovnicí ve vrcholovém tvaru:

$(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$. **Tečna** t **k dané parabole v jejím bodě** $\mathrm{T}=[x_0; y_0]$ **je potom dána rovnicí**

$$(x-m)(x_0-m) = \pm p(y+y_0-2n). \tag{47}$$

$(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$. **Tečna** t **k dané parabole v jejím bodě** $\mathrm{T}=[x_0; y_0]$ **je potom dána rovnicí**

$$(y-n)(y_0-n) = \pm p(x+x_0-2m). \tag{48}$$

Rovnice tečen paraboly nemají tak „hezký“ tvar, jako mají rovnice tečen kružnice, elipsy či hyperboly. Důvodem je fakt, že v rovnici paraboly je pouze jedna neznámá ve druhé mocnině. Přesto ale rovnice tečen mají k rovnici paraboly určitý vztah a její sestavení se řídí jistými „pravidly“.