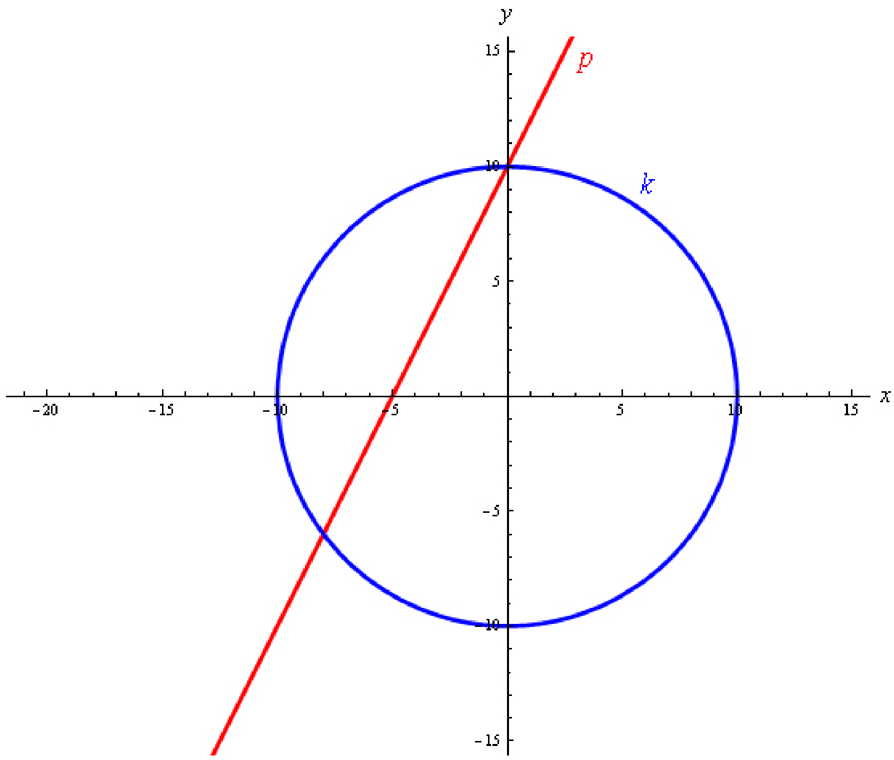
Zadání úlohy

Napište rovnici tečen vedených ke kružnici $k: x^2 + y^2 = 100$ v jejích průsečících s přímkou $p: 2x - y + 10 = 0$. Určete průsečík těchto tečen a jejich odchylku.

Řešení úlohy

Zadanou kružnici *k*, která má střed $S = [0; 0]$ a poloměr $r = 10$ j, a přímku *p* zakreslíme do kartézské soustavy souřadnic (viz obr. 1).



obr. 1

Podle zadání máme najít rovnice tečen vedených k zadané kružnici *k* v jejích průsečících se zadanou přímkou *p*. Proto je nutné nejdříve najít tyto průsečíky kružnice *k* a přímky *p*. Matematicky to znamená vyřešit soustavu rovnic $x^2 + y^2 = 100$ a $2x - y + 10 = 0$. Jedná se o soustavu kvadratické rovnice a lineární rovnice, proto ji budeme řešit tak, že z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme do kvadratické rovnice.

Z lineární rovnice vyjádříme *y*, neboť nebude nutné pracovat se zlomky. Dostaneme tak vyjádření $y = 2x + 10$, které dosadíme do kvadratické rovnice popisující kružnici.

Postupnými úpravami získáme:

$$x^2 + (2x + 10)^2 = 100$$

$$x^2 + 4x^2 + 40x + 100 = 100$$

$$5x^2 + 40x = 0$$

$$5x(x + 8) = 0$$

Poslední rovnice má dva kořeny: $x_1 = 0$ a $x_2 = -8$. Z vyjádření $y = 2x + 10$ získáme *y*-ové souřadnice průsečíků: $y_1 = 10$ a $y_2 = -6$. Průsečíky přímky *p* a kružnice *k* tedy mají souřadnice $P_1 = [0; 10]$ a $P_2 = [-8; -6]$.

Nyní můžeme již napsat rovnice hledaných tečen. Obecná rovnice tečny kružnice má tvar $(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = r^2$, kde $[m; n]$ jsou souřadnice středu *S* kružnice, *r* je poloměr kružnice a $[x_0; y_0]$ jsou souřadnice bodu dotyku tečny s kružnicí. V našem případě bude mít rovnice tečny tvar $xx_0 + yy_0 = 100$.

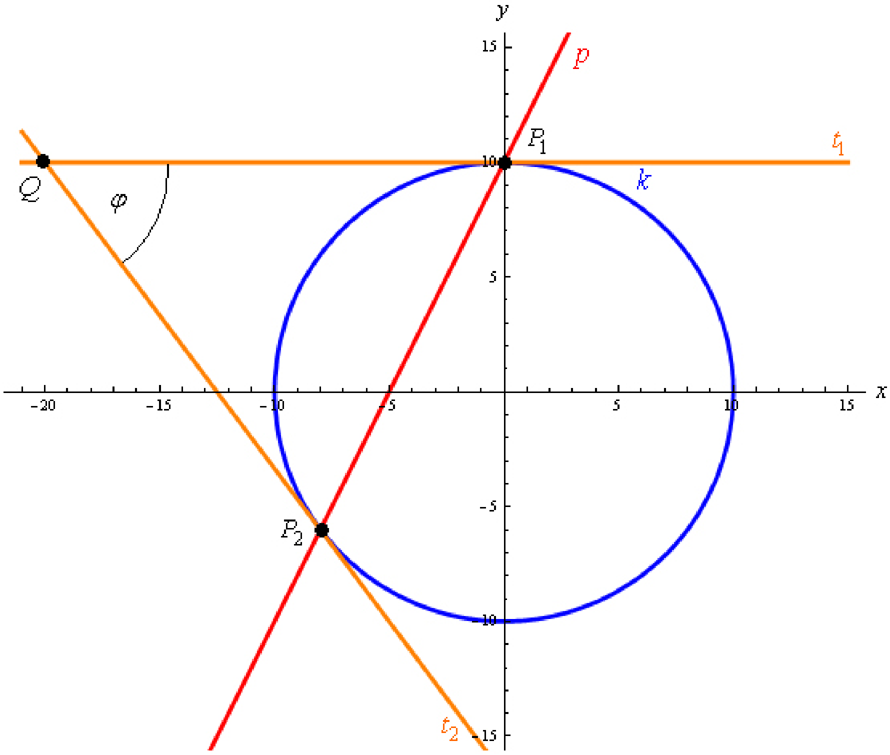
Dosadíme-li první bod dotyku (bod P_1) získáme tečnu popsanou obecnou rovnicí $0x + 10y = 100$, čili $y = 10$.

Dosadíme-li druhý bod dotyku (bod P_2) získáme tečnu popsanou obecnou rovnicí $-8x - 6y = 100$, čili $4x + 3y + 50 = 0$.

Průsečík tečen získáme tak, že vyřešíme soustavu dvou lineárních rovnic, které popisují obě tečny. Dosazením z rovnice první tečny $y = 10$ do druhé rovnice získáme $4x + 3.10 + 50 = 0$. Po úpravě dostaneme $4x + 80 = 0$ a tedy $x = -20$. Průsečík tečen Q má tedy souřadnice $Q = [-20; 10]$.

Odchylku uvažovaných tečen určíme pomocí jejich normálových vektorů. Normálový vektor první tečny je $\vec{n_1} = (0; 1)$, normálový vektor druhé tečny je $\vec{n_2} = (4; 3)$. Odchylku φ obou tečen určíme podle vztahu $\cos\varphi = \dfrac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$. Po dosazení dostaneme: $\cos\varphi = \dfrac{|0.4 + 1.3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{3}{5}$. Pro odchylku obou tečen tedy můžeme psát $\varphi \doteq 53{,}13\,°$.

Rovnice tečen vedených k dané kružnici v jejích průsečících s přímkou p mají rovnice ve tvaru $t_1 : y = 10$ a $t_2 : 4x + 3y + 50 = 0$, protínají se v bodě $Q = [-20; 10]$ a jejich odchylka je $\varphi \doteq 53{,}13\,°$ (viz obr. 2).



obr. 2