Zadání úlohy

Najděte rovnice tečen elipsy $E: 9(x-3)^2 + 16(y+1)^2 = 144$, které mají směrnici rovnou 1.

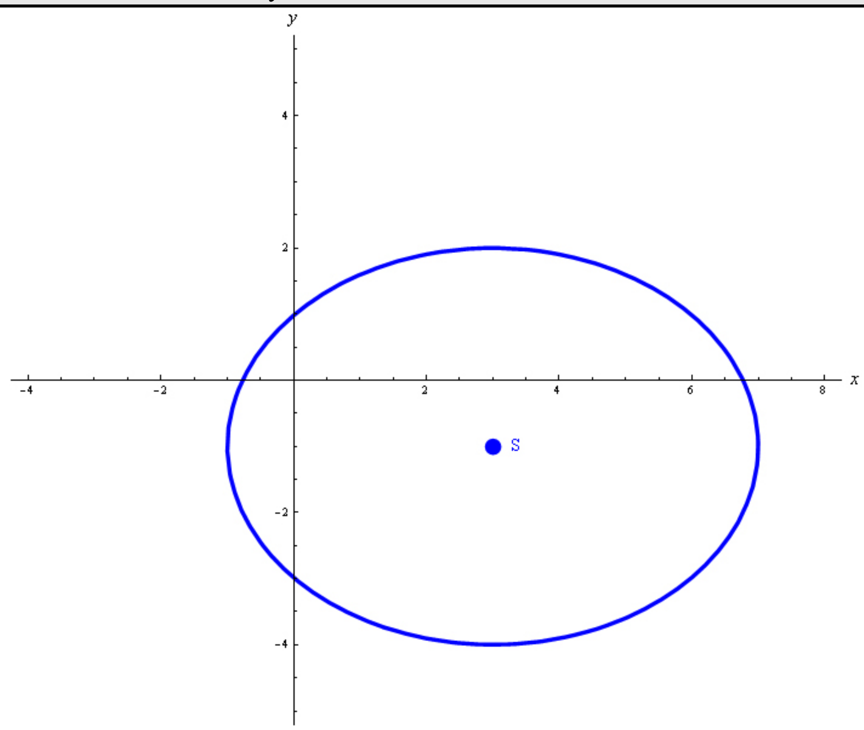
Řešení úlohy

Zadanou rovnici elipsy upravíme vydělením číslem 144 na tvar

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1, \qquad (1)$$

ze kterého je už zřejmé, že střed elipsy je v bodě $S = [3; -1]$, délka hlavní poloosy jsou 4 j, délka vedlejší poloosy jsou 3 j a hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x (viz obr. 1).

Elipsa teda leží v kartézském systému souřadnic.



obr. 1

Tečny, jejichž rovnice máme nalézt, mají mít směrnici rovnou jedné. To znamená, že budeme vycházet ze směrnicového tvaru rovnice přímky ve tvaru

$$y = kx + q, \qquad (2)$$

kde k je směrnice přímky a q je úsek, který vytíná daná přímka na ose y. Přímka, jejíž směrnice je rovna jedné, je rovnoběžná (různá nebo splývající) s osou prvního a třetího kvadrantu kartézské soustavy souřadnic. Ze všech těchto přímek chceme najít pouze ty, které mají se zadanou elipsou popsanou rovnicí (1) společný právě jeden bod, tj. jsou to tečny k zadané elipse (viz obr. 2).

Abychom mohli napsat rovnice hledaných tečen, musíme nejdříve určit souřadnice bodu dotyku $T = [x_0; y_0]$ tečny a elipsy. Tečna k elipse, která je dána zadáním úlohy, sestrojená v bodě $T = [x_0; y_0]$ bude mít rovnici

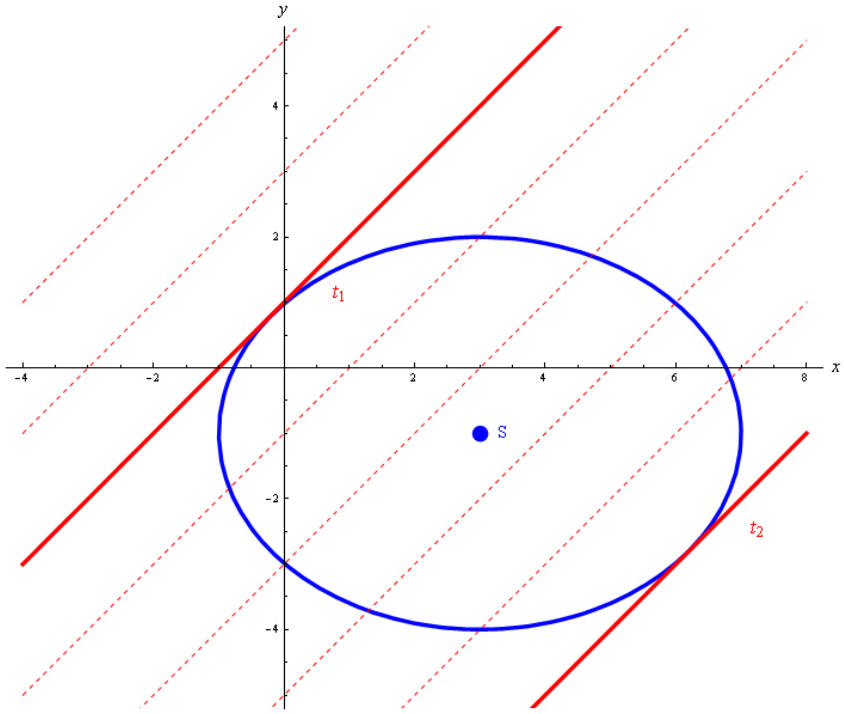
$$9(x-3)(x_0-3) + 16(y+1)(y_0+1) = 144, \qquad (3)$$

přičemž x a y jsou souřadnice libovolného bodu ležícího na této tečně. Tato tečna má mít podle zadání směrnici rovnou jedné. Je tedy nutné převést rovnici tečny (3) na směrnicový tvar, abychom mohli určit její směrnici.

Nejdříve osamostatníme člen, v němž se vyskytuje y: $16(y+1)(y_0+1) = 144 - 9(x-3)(x_0-3)$.

Další úpravou získáme rovnici ve tvaru $y + 1 = \dfrac{144 - 9(x-3)(x_0-3)}{16(y_0+1)}$ a konečně pro y dostáváme rovnici ve tvaru $y = \frac{-9(x_0-3)}{16(y_0+1)}(x-3) + \frac{144}{16(y_0+1)} - 1$, kterou ještě upravíme na tvar

$$y = \frac{-9(x_0-3)}{16(y_0+1)}x + \frac{27(x_0-3)+144}{16(y_0+1)} - 1. \tag{4}$$



obr. 2

Srovnáme-li tvar rovnice (4) s obecným směrnicovým tvarem přímky (2), dostaneme

$$k = \frac{-9(x_0-3)}{16(y_0+1)}. \tag{5}$$

Podle zadání má mít hledaná tečna směrnici rovnou jednou, což znamená, že musí platit

$$\frac{-9(x_0-3)}{16(y_0+1)} = 1. \tag{6}$$

Máme tedy první podmínku, která svazuje souřadnice bodu dotyku *T* přímky a elipsy. Druhou podmínku (potřebujeme dvě rovnice, neboť máme dvě neznámé x_0 a y_0) získáme, pokud si uvědomíme, že bod *T* leží na elipse. Dostáváme tak rovnici

$$9(x_0-3)^2 + 16(y_0+1)^2 = 144. \tag{7}$$

Nyní tedy budeme řešit soustavu lineární rovnice (6) a kvadratické rovnice (7). Nejschůdnější postup je ten, že z lineární rovnice vyjádříme jednu neznámou a toto vyjádření dosadíme do kvadratické rovnice. Z rovnice (6) tedy vyjádříme např. y_0. Rovnici (6) proto nejdříve vynásobíme tak, aby nebyla zapsána pomocí zlomků. Dostaneme rovnici ve tvaru $-9(x_0-3) = 16(y_0+1)$ a odtud již vyjádříme y_0:

$$y_0 = \frac{-9x_0+11}{16}. \tag{8}$$

Toto vyjádření dosadíme do kvadratické rovnice (7): $9(x_0-3)^2 + 16\left(\frac{-9x_0+11}{16}+1\right)^2 = 144$. Nejdříve upravíme druhý kvadratický člen, protože je vidět, že se tím celá rovnice zjednoduší. Převedením na společného jmenovatele dostaneme rovnici $9(x_0-3)^2 + 16\left(\frac{-9x_0+27}{16}\right)^2 = 144$. Nyní ve druhém kvadratickém členu vytkneme číslo -9, čím získáme rovnici $9(x_0-3)^2 + 16\left(\frac{-9(x_0-3)}{16}\right)^2 = 144$.

Částečným umocněním dostaneme: $9\left(x_0-3\right)^2+16\frac{81}{16^2}\left(x_0-3\right)^2=144$. Po zkrácení a vytknutí celého kvadratického dvojčlenu získáme rovnici $\left(x_0-3\right)^2\left(9+\frac{81}{16}\right)=144$, která jednoduchou úpravou přejde na rovnici ve tvaru $\left(x_0-3\right)^2.\frac{225}{16}=144$. Vynásobením dostaneme rovnici ve tvaru $\left(x_0-3\right)^2=\frac{144.16}{225}$, kterou můžeme odmocnit a získáme rovnici $\left|x_0-3\right|=\frac{12.4}{15}$. Po zkrácení zlomku na její pravé straně tedy máme rovnici

$$\left|x_0-3\right|=\frac{16}{5}, \tag{9}$$

která má dvě řešení

$$x_{01}=\frac{16}{5}+3=\frac{31}{5} \text{ a } x_{02}=-\frac{16}{5}+3=-\frac{1}{5}. \tag{10}$$

Dosazením řešení (10) do vyjádření (8) získáme y-ové souřadnice bodů dotyku hledané tečny a elipsy:

$$y_{01}=\frac{-9.\frac{31}{5}+11}{16}=-\frac{14}{5} \text{ a } y_{02}=\frac{-9.\left(-\frac{1}{5}\right)+11}{16}=\frac{4}{5}. \tag{11}$$

Na základě řešení (10) a (11) soustavy rovnic (6) a (7) máme tedy dva body dotyku tečny a elipsy: $T_1=\left[\frac{31}{5};-\frac{14}{5}\right]$ a $T_2=\left[-\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right]$: podmínky ze zadání úlohy tedy splňují dvě tečny. Nyní již můžeme psát rovnice tečen k elipse. Postupným dosazením bodů dotyku T_1 a T_2 do rovnice (3) dostaneme tečny, které mají vlastnosti požadované zadáním úlohy. Bodem T_1 prochází tečna daná rovnicí $9\left(x-3\right)\left(\frac{31}{5}-3\right)+16\left(y+1\right)\left(-\frac{14}{5}+1\right)=144$. Úpravou členů v závorkách získáme rovnici ve tvaru $9.\frac{16}{5}\left(x-3\right)-16.\frac{9}{5}\left(y+1\right)=16.9$. Po vydělení rovnice číslem 144 a vynásobením pěti dostaneme rovnici tečny ve tvaru $x-3-\left(y+1\right)=5$. Tedy tečna t_1, která prochází bodem T_1, má obecnou rovnici

$$x-y-9=0. \tag{12}$$

Analogicky můžeme psát rovnici tečny, která prochází bodem T_2. Po dosazení jeho souřadnic do rovnice (3) dostaneme rovnici $9\left(x-3\right)\left(-\frac{1}{5}-3\right)+16\left(y+1\right)\left(\frac{4}{5}+1\right)=144$. Vyčíslením součtů v závorkách přejde tato rovnice na rovnici $-9.\frac{16}{5}\left(x-3\right)+16.\frac{9}{5}\left(y+1\right)=16.9$. Vydělením číslem 144 a vynásobením pěti dostaneme rovnici $-\left(x-3\right)+y+1=5$. Tečna t_2 procházející bodem T_2 má tedy obecnou rovnici ve tvaru

$$x-y+1=0. \tag{13}$$

Tečny, které jsme měli podle zadání nalézt, jsou popsány obecnými rovnicemi (12) a (13).