1. *Výroky, operace s výroky, užití výrokové algebry*

1.1 Určete, zda se jedná o výroky. Pokud ano, vyjádřete jejich negaci a rozhodněte o jejich pravdivosti:

a) Dnes je úterý.
b) Hlavním městem České republiky je Praha.
c) Jára Cimrman se narodil ve Vídni.
d) Jaký předmět máš nejraději?
e) Karlova universita byla založena Václavem IV. roku 1348.
f) Jedině na planetě Zemi se rozvinul život.
g) Největší horou světa je Mount Everest.
h) Jsem studentem SPŠST Panská.

1.2 Negujte následující výroky

a) V létě nespadlo ze stromu žádné jablko.
b) Do třídy chodí nejvýše 30 studentů.
c) Žádný student nepropadl z matematiky.
d) Každý člověk v Praze už jel alespoň jednou metrem.
e) Na světě existují státy, které leží na ostrově.
f) Ve sluneční soustavě je nejvýše 9 planet.
g) Na třídní schůzky přišlo právě 25 rodičů.
h) Na party koupím 30 rohlíků a minimálně 4 balíky vody.
i) K večeři sním nejvýše 3 rohlíky nebo 4 sušenky.
j) Přijde-li žák pozdě nejvýše o 15 minut, má pozdní příchod.
k) Je-li test za jedna, je minimálně 90 % úloh správně.
l) Bude-li Jarda hodný, dostane minimálně o 500,- Kč vyšší kapesné a uklízet bude nejvýše 5 hodin týdně.
m) Bude-li jasno, ujede Jarda minimálně 50 km na kole nebo uběhne nejvýše 15 km.

1.3 Negujte následující výroky.

a) Žádný učený z nebe nespadl.
b) Bez práce nejsou koláče.
c) Nic nového pod sluncem.
d) Každý dobrý skutek má být po zásluze odměněn.
e) Každý svého štěstí strůjcem.
f) Na jaře musí skřivan alespoň jednou vrznout.
g) Nikdo není dokonalý.

1.4 Vyjádřete negace těchto výroků a pokud je to možné, určete jejich pravdivostní hodnotu:

a) Trojúhelník ABC je pravoúhlý.
b) $|-5|+7 \geq 17$
c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
d) $\forall x \in \mathbb{R} : |x| > 0$
e) Každý čtyřúhelník má alespoň tři vrcholy.

1.5 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$.

1.6 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(A' \vee B') \Rightarrow (A' \vee B)'$.

1.7 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(A' \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \vee B)$.

1.8 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(A \Rightarrow B)' \wedge (B' \Rightarrow A)$.

1.9 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(K' \vee L) \vee (L \Rightarrow M)$.

1.10 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

1.11 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $\left[(A \wedge B') \Rightarrow C\right] \Leftrightarrow \left[C' \vee (A \vee B)'\right]$.

1.12 Zjistěte, zda se jedná o tautologii: $(P \wedge R') \vee (S \Rightarrow Q) \,\overline{\vee}\, (S \wedge Q')$.

1.13 Vyjádřete negace těchto výroků:

a) Máme pivo a minerálku.
b) Jestliže chci studovat na SPŠST, musím se denně pilně připravovat, chovat se slušně a nemluvit sprostě.
c) Koupím čerstvé ovoce nebo kompot.

d) Jestliže budu mít štěstí, vyhraji v loterii a koupím si auto.
e) Bude-li svítit sluníčko a přitom bude teplo, půjdu si zaplavat do rybníka nebo se občerstvím v restauraci.
f) Milan nosí brýle, protože špatně vidí.
g) Brýle si odkládáme právě tehdy, když jdeme sportovat nebo spát.
h) Kočka leze dírou, pes oknem, nebude-li pršet nezmoknem.
i) (Právě) třikrát měř a jednou řež.

1.14 Jak cestoval z Prahy do Košic rekreant, o němž neplatí, že „letěl do Bratislavy letadlem a z Bratislavy do Košic jel autobusem nebo autem“?

1.15 Dva reprezentanti, Novák a Vomáčka, nastoupili v běžeckém závodě. Předpověď odborníků zněla: „Atlet Novák zvítězí a Vomáčka bude druhý nebo Novák nedokončí a Vomáčka zvítězí.“ Předpověď se nevyplnila. Jak tedy dopadl závod?

1.16 Při dopravní nehodě ohlásil tiskový mluvčí policie novinářům: „Řidič havarovaného vozidla byl opilý nebo při jízdě usnul.“ V průběhu vyšetřování se ukázalo, že to není pravda. Jaký byl tedy závěr policie?

1.17 Stavební firma nahlásila ředitelství školy: „Jestliže budeme mít dostatek financí, dokončíme kotelnu včas a začneme topit.“ Bohužel se výrok zástupce stavební firmy ukázal jako nepravdivý. Jak vypadá současná situace?

1.18 Softwarová firma oznámila svým klientům: „Nainstalujeme vám novou verzi programu právě tehdy, když na vašem počítači nebude žádný virus a současně budete solventní.“ Později se zjistilo, že tento výrok nebyl pravdivý. Co se stalo?

1.19 Ředitel podniku poslal vedoucímu oddělení tuto zprávu „Nebudu se s vámi bavit, jestliže nebudete dodržovat naše podmínky a budete mrhat penězi.“, která se později ukázala nepravdivá. Popište v tom případě stav v podniku.

1.20 Student řekl svému učiteli: „Je-li venku hezké počasí, jezdím do školy vlakem a přitom pokud nezaspím, přijdu do školy včas.“ Druhý den došlo k situaci, z níž učitel (matematik) pochopil, že došlo ke znegování žákova sdělení. Co se stalo?

1.21 Obracejte a obměňujte implikace:

a) Je-li řidič předjížděn, nezvyšuje rychlost a nezačíná předjíždět.
b) Řidič nevjíždí na železniční přejezd, jestliže slyší signál nebo vidí vlak.
c) Je-li konstrukce provedena přesně, procházejí 3 sestrojené kružnice jedním bodem.
d) Je-li součin dvou čísel sudý, pak jsou oba činitelé čísla lichá nebo čísla sudá.
e) Je-li součin dvou čísel sudý, pak oba činitelé nejsou lichá čísla.
f) Neodpadne-li zítra první hodina, musím se na ní připravit a musím vstávat včas.

1.22 Některý z žáků Adam, Bedřich a Cyril rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna Adam nebo u něho nebyl Bedřich. Když Bedřich nebyl u okna, nebyl tam ani Adam. Cyril byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl Adam. Lze na základě těchto podmínek určit jednoznačně pachatele, byl-li právě jeden?

1.23 V dílně jsou tři stroje, které pracují podle těchto podmínek: Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj. Pracuje druhý nebo třetí stroj. Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí stroj. Jaké jsou možnosti pro práci těchto strojů?

1.24 Karel se nesmírně těší na fotbalový zápas, který bude v televizi. Tatínek sledování dovolí pod podmínkou, že nedostane ve škole čtyřku z matematiky nebo z češtiny. Dostane-li čtyřku z češtiny, může se dívat na zápas pouze v případě, že neprovedl žádnu lumpárnu a dostal z matematiky lepší známku než čtyřku. Karel ve škole rozbil okno. Má šanci se dívat na fotbalový zápas? Pokud ano, za jakých podmínek?

1.25 Jana se chystá na maturitní ples. Právě proběhla porada o módních doplňcích k šatům. Hlavními rádci jsou dvě tety a matka. První teta radí: „Doporučuji brož nebo náhrdelník.“ Druhá teta na to: „Nejlépe by bylo vzít si náramek nebo brož.“ Matka radí: „Já jsem pro náhrdelník nebo náramek.“ Na maturitní ples přišla Jana „ověšena“ náramkem, broží i náhrdelníkem, protože chtěla udělat radost matce i oběma tetám. Splnila skutečně všechna jejich přání? Musela si vzít všechny tři módní doplňky, aby všem vyhověla?

1.26 Jarda se připravuje na výlet. Kamarád Patrik mu řekl: „V případě, že si vezmu náhradní tepláky, nevezmu si vložku do spacáku.“ Od Petra získal informaci, že pláštěnku si vezme právě tehdy, když si nevezme náhradní tepláky nebo si vezme vložku do spacáku. Jardova maminka rezolutně prohlásila: „Vezmi si pláštěnku nebo vložku do spacáku, to nechám na tobě, ale náhradní tepláky si vezmeš určitě.“ Jak má Jarda sbalit, chce-li balit podle rad kamarádů i matky?

1.27 Tři trenéři atletů Adama, Bohouše a Cyrila tipují jejich úspěch v soutěži. První říká: „Zvítězí Adam nebo Cyril.“ Druhý odvětí: „To snad ne. Jestliže nezvítězí Cyril, zvítězí Bohouš.“ Třetí trenér uzavírá: „Pánové dejte na mně. Vsaďte se, že nebude pravda, že zvítězí Cyril nebo Bohouš nezvítězí.“ Na konci závodu se ukázalo, že měli pravdu všichni tři. Jak závod dopadl?

1.28 Do města Kocourkova pronikl turistický ruch. Městská rada projednávala, jak co nejvíce zvýšit příliv turistů. Byly předloženy tyto návrhy: vybudovat na náměstí kašnu, postavit pomník zakladateli města a vystavět vyhlídkovou věž. Městská pokladna ale není příliš plná, proto bylo třeba o návrzích hlasovat. Vystoupili tři radní se svými připomínkami. První radní: „Jsem pro jakékoli řešení, nebudu souhlasit jenom s rozhodnutím stavět pomník a nestavět vyhlídkovou věž.“ Druhý radní: „Budu protestovat jenom tehdy, kdybychom stavěli kašnu a neostavili pomník.“ Třetí radní prohlásil: „Mně by nevyhovovalo jedině to řešení, kdyby v našem městě stála vyhlídková věž a chyběla kašna.“ Co v Kocourkově postaví, chtějí-li vyhovět všem třem radním?

1.29 Zájemkyně o zájezd k moři má náročné a nevšední podmínky: Chce letět letadlem nebo jet lodí, ale nechce použít obou dopravních prostředků. Navíc by chtěla jet lodí a přitom už necestovat vlakem nebo by si přála jet vlakem a přitom už neletět letadlem. Cestovní kancelář nabízí dva typy zájezdů: dopravu pouze lodí a vlakem a ve druhém pouze let letadlem. Jaký zájezd bude vyhovovat náročné paní?

1.30 Architekt má vypracovat návrh sektorové stěny do obývacího pokoje z jednotlivých elementů na základě požadavků zákazníka: Ve stěně má být zařazena knihovnička a prádelník nebo se v ní musí vyskytovat zásuvková skříňka a likérník. Dále si zákazník nepřeje, aby ve stěně byly společně knihovnička a zásuvková skříňka, právě tak by se mu nelíbilo současné zařazení knihovničky a likérníku. Jaké má architekt možnosti sestavení stěny?

1.31 Rozhodněte, kteří žáci ze skupiny Arnošt, Bříťa, Cyril a Dan pojedou na školní výlet, mají-li být dodrženy tyto zásady: Pojede alespoň jeden z dvojice Bříťa - Dan, nejvýše jeden z dvojice Arnošt - Cyril, aspoň jeden z dvojice Arnošt - Dan a nejvýše jeden z dvojice Bříťa - Cyril. Dále je jisté, že Bříťa nepojede bez Arnošta a že Cyril pojede, pojede-li Dan.

1.32 Z města A do města B má vést silnice. Před zahájením její stavby se dlouho rozhodovalo o tom, přes která z měst C, D, E, F a G povede. Odborníci, kteří se touto otázkou zabývali, dospěli k těmto závěrům: silnice musí procházet městem D, dále je nutné, aby vedla městem C nebo F. Nesmí vést současně městy D a E. Nebylo by únosné, kdyby vedla městem E a neprocházela městem F. Navíc z ekonomických důvodů nepovede žádným z měst C, E nebo nebude procházet ani jedním z měst F, G. Kterými městy silnice vede, jsou-li splněny všechny podmínky?

1.33 Rodiče kupují synovi Jardovi kabát. Maminka si pro Jardu přeje zelený kabát s páskem nebo kabát s teplou vložkou a kapucí. Tatínek dodává, že to nesmí být kabát s teplou vložkou a bez pásku. Jardovi by vyhovoval jakýkoliv kabát s kapucí. Prodavačka upozorňuje, že zelený kabát s kapucí, teplou vložkou a páskem momentálně nemají. Rodiče nakonec koupili hnědý kabát s teplou vložkou, páskem a kapucí. Odpovídá koupený kabát přání všech? Jaké vlastnosti musí mít kabát, aby odpovídal přáním maminky, tatínka i Jardy?

2. ***Teorie množin***

2.1 Rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny A, B dané základní množiny Z platí:

a) $A \cup (A \cap B) = A$ b) $A \cap (A \cup B) = A$ c) $B \cap (A \cup B) = B$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ e) $(A \cap B') \cup B = A \cup B$ f) $A' \cup B' = (A \cup B)'$

g) $(A \cup B) \cap B' = A \cap B'$ h) $A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B)$ i) $A \cap B = (A \cap B)' \cup (A' \cap B')$

j) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

2.2 Ověřte, zda pro libovolné podmnožiny A, B, C základní množiny Z platí:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2.3 Rozhodněte, zda pro libovolné podmnožiny A, B, C, D dané základní množiny Ω platí:

a) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (B \cap D) \cup (A \cap C)$ b) $[(A \cup B) \cap D'] \cup (C \cup D) = \Omega$

c) $A \cap B \cap C \cap D' = (A \cap B \cap D)' \cap (C \cup D)$ d) $(A \cap B \cap D') \cup (C \cap D \cap A') = C \cap B \cap A'$

2.4 Zjednodušte tyto množinové zápisy:

a) $M \cup (N \cap M')$ b) $(M \cup N') \cap (N \cup M)$ c) $(P \cap A) \cup A$

d) $(P' \cup S') \cup (S \cup P')$ e) $(B \cup C) \cap (B' \cap C')$ f) $(A' \cap K')' \cap (K' \cup A')'$

2.5 Zjednodušte tyto množinové zápisy

a) $[(M \cup N) \cap N] \cup [M \cap (M \cap N)]$ b) $(S \cap P \cap R) \cup \left[P \cap (S' \cup R)' \right]$

c) $\left[C \cap (A \cap C)' \right] \cup \left[A \cup \left[B \cap (A \cap B)' \right] \right]$ d) $\left[(A \cup B)' \cup (B \cup C) \right] \cap (C \cup A)$

2.6 Režisér si stěžuje řediteli divadla: „Ani jeden z herců tohoto divadla neumí dobře zpívat a přitom dobře tančit.“ Ředitel na to odpoví: „Nemohu s vámi souhlasit, že by skutečně žádný z nich neuměl dobře zpívat a žádný neuměl dobře tančit.“ Režisér ale vysvětluje: „To já také netvrdím. Říkám jenom, že žádný z herců tohoto divadla není dobrý tanečník nebo není dobrý zpěvák.“ Rozhodněte, zda ředitel divadla pochopil režiséra správně a zda režisérovo vysvětlení se shoduje s tím, co řekl na začátku.

2.7 Pro velký zájem uchazečů o členství v plaveckém kroužku, stanovila předmětová komise tělesné výchovy tyto podmínky pro členství: Každý uchazeč musí umět uplavat alespoň 100 m nebo musí předložit potvrzení o tom, že už dříve navštěvoval plavecký kroužek pro začátečníky. Navíc každý uchazeč musí mít dobrý prospěch. Tělocvikář oznamuje toto rozhodnutí ve třídě: „Každý, kdo se chce stát členem plaveckého kroužku, musí mít dobrý prospěch a přitom musí uplavat alespoň 100 m. Nebo musí předložit potvrzení o tom, že dříve navštěvoval plavecký kroužek pro začátečníky a přitom navíc musí mít dobrý prospěch.“ Oznámil tělocvikář třídě podmínky, na nichž se domluvila předmětová komise?

2.8 Otec jde s malým Jirkou kupovat do hračkářství autíčko. Jirka vyslovuje své přání: „Chci autíčko s houkačkou. Přitom ještě chci, aby mělo setrvačník a vyklápěčku nebo to musí být plechové autíčko s houkačkou. Nechci ale vůbec plechové autíčko

bez vyklápěčky.“ Prodavačka tedy shrne: „Tak ty tedy chceš autíčko, které musí být vyklápěčku, setrvačník a houkačku. Takové nemáme.“ Otec nakonec koupil Jirkovi plechové autíčko bez setrvačníku, s vyklápěčkou a houkačkou. Odhadla prodavačka správně Jirkovo přání? Koupil otec takové autíčko, jaké si Jirka přál?

2.9 Ze 35 žáků odebírá 8 žáků Vesmír, 10 žáků odebírá Ikarii. 21 žáků neodebírá žádný z těchto časopisů. Kolik z nich odebírá oba časopisy?

2.10 Při průzkumu životní úrovně bylo zjištěno, že ze 40 rodin v jednom domě má 40 % auto i chatu. Přitom auto vlastní o 16 rodin více než chatu a není rodina, které by neměla auto nebo chatu. Kolik rodin z domu má auto? Kolik procent rodin z domu vlastní pouze auto?

2.11 Ze 129 studentů jednoho ročníku univerzity chodí pravidelně do menzy na oběd nebo na večeři 116 studentů, 62 studentů dochází nejvýše na jedno z těchto jídel. Přitom na obědy chodí o 47 studentů více než na večeři. Kolik studentů chodí na obědy i na večeře? Kolik na večeře? Kolik jenom na obědy?

2.12 V kanceláři Čedoku prodali během jednoho dne celkem 166 poukazů na zahraniční rekreaci. Leteckých zájezdů bylo prodáno dvakrát více než zájezdů do Chorvatska. Zájezdů do Chorvatska, které nejsou letecké, bylo prodáno o 40 více než leteckých zájezdů do Chorvatska. Zájezdů, jež nejsou ani letecké ani do Chorvatska, bylo prodáno o 30 méně než těch zájezdů do Chorvatska, jež nejsou letecké. Kolik bylo prodáno zájezdů do Chorvatska. Kolik bylo prodáno leteckých zájezdů jinam než do Chorvatska?

2.13 V samoobsluze s potravinami se objevily dva nové druhy sýra. Ze 153 zákazníků, kteří prošli během jedné hodiny samoobsluhou, jich 65 neodolalo koupi prvního druhu, druhý druh pak nakoupilo 49 zákazníků. Těch, kteří zakoupili oba druhy sýra, byla pouze jedna pětina počtu těch zákazníků, kteří zakoupili alespoň jeden druh. Kolik zákazníků koupilo pouze první druh? Kolik pouze druhý druh? Kolik oba druhy? Kolik jich odolalo oběma svodům?

2.14 Ve třídě při čtvrtletní práci z matematiky byly zadány 3 příklady. Třetí příklad vyřešilo 21 studentů a každý ze zbývajících příkladů vyřešilo 23 studentů. Dva studenti ze třídy nevyřešili žádný příklad, všechny tři příklady vyřešilo 7 studentů. První i druhý příklad vyřešilo 15 studentů, první a třetí 12 studentů. Druhý nebo třetí vyřešilo 31 studentů. Určete:

a) kolik studentů vyřešilo druhý a třetí příklad,
b) kolik studentů vyřešilo první nebo třetí příklad,
c) kolik studentů psalo čtvrtletní práci.

2.15 Zapište pomocí symbolů tyto množiny:

a) množinu přirozených čísel, která jsou větší nebo rovna 6
b) množinu reálných čísel větších než 15
c) množinu celých čísel, která jsou menší než -4
d) množinu reálných čísel, jejichž vzdálenost od bodu 5 je větší nebo rovna 10

2.16 Stanovte podmínky, které musí být splněny, aby platilo (stačí vhodný obrázek):

a) $A \cap B = A$
b) $A \cup B = A$
c) $B'_A = A$
d) $B'_A = \emptyset$
e) $A \cup B = A \cap B$

2.17 Určete průnik, sjednocení, $A - B$ a $B - A$ dvou množin A a B, jestliže:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -3\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x < 9\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 7 \wedge x > -4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x > -10 \wedge x < -5\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 10 \wedge x \leq -3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -3\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 4| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{R}; x < 5 \wedge x > 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; x < 7 \vee x > 11\}$
g) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x + 5| \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; |2 - x| \geq 4\}$
h) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x| < 7\}$, $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 1| \geq 3\}$
i) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 0\}$, $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 5| = 3\}$
j) $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| \geq 3\}$, $A = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq -12\}$

2.18 Zapište jako interval množinu všech:

a) nezáporných reálných čísel
b) reálných čísel větších než -7
b) reálných čísel, která jsou menší nebo rovna 10
d) reálných čísel, jejichž vzdálenost od čísla 5 je nejvýše 3

2.19 Zapište jako interval množiny z příkladu 2.17.

2.20 Určete průnik a sjednocení intervalů:

a) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle 0; 3 \rangle$
b) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 3 \rangle$
c) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = (-1; 2)$
d) $A = \langle -1; 2 \rangle$, $B = (1; \infty)$

2.21 Určete $C \cap D \cap E$, $C \cup D \cup E$, $C \setminus D$, $D \setminus E$ a $E \setminus C$ následujících intervalů:

a) $C = (-5; 4)$, $D = \langle -6; 2 \rangle$, $E = \langle 0; 4 \rangle$
b) $C = \langle -10; -3 \rangle$, $D = (-5; -4)$, $E = \langle -4; -2 \rangle$
c) $C = \langle 6; 12 \rangle$, $D = (7; 10 \rangle$, $E = (7; 11)$