Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Posloupnosti a řady

sbírka úloh z matematiky

Jaroslav Reichl

Obsah

1. Posloupnosti a jejich vlastnosti

Napište další tři členy posloupnosti:

1.1 2, 5, 8, 11, 14, …;
1.2 33, 27, 21, 15, 9, …;
1.3 3, 6, 12, 24, 48, …;
1.4 512, 256, 128, 64, 32, …;
1.5 2, 7, 22, 67, 202, …;
1.6 8, 27, 64, 125, 216, …;
1.7 4, 6, 9, 13, 18, …;
1.8 6, 13, 25, 51, 101, …

Napište prvních pět členů posloupnosti, která je dána takto:

1.9 $\left(2-n\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.10 $\left(4n^2-3\right)_{n=1}^{4}$;
1.11 $\left(\dfrac{3n-4}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.12 $\left(2+2\left(-1\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{10}$;
1.13 $\left(-2n+\dfrac{\left(-1\right)^{n^2+2}}{n}\right)_{n=1}^{3}$;
1.14 $\left(n\left(n+2\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.15 $\left(\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.16 $\left(\dfrac{e^n-n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$.

1.17 Napište prvních 10 členů nekonečné posloupnosti $\left(k_n\right)_{n=1}^{\infty}$, která je definována takto: $k_n=-1$, je-li n prvočíslo, $k_n=1$, v případě, že n není prvočíslo.

Vyjádřete dané posloupnosti vztahem pro n-tý člen:

1.18 1,-1, 1, -1, 1, …;
1.19 $\dfrac{3}{2},\dfrac{6}{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{12}{5},\dfrac{15}{6},\dfrac{18}{7},\ldots$;
1.20 $14,-7,\dfrac{14}{3},-\dfrac{14}{4},\dfrac{14}{5},-\dfrac{14}{6},2$;
1.21 $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{5},\dfrac{9}{6},\dfrac{17}{7},\dfrac{33}{8}$.

Určete třetí a pátý člen posloupnosti dané rekurentně:

1.22 $a_1=2$, $a_{n+1}=-2a_n+3$;
1.23 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$;
1.24 $a_1=2$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$;
1.25 $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n\cdot\log 10$.

1.26 Je dána posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\log 3^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete jí rekurentně.

1.27 Je dána posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(n\left(n+1\right)\right)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete jí rekurentně.

1.28 Je dána posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete jí rekurentně.

Zjistěte, zda jsou dané posloupnosti rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající a omezené (zdola, shora):

1.29 $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.30 $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.31 $\left(\dfrac{2n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.32 $\left(\left(-1\right)^n\cdot 2n\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.33 $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.34 $\left(\dfrac{n^2}{2}-6\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.35 $\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.36 $\left(\dfrac{\left(-1\right)^n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.37 $\left(\cos\left(\pi n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;
1.38 $\left(\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Vypočtěte:

1.39 $97\cdot\left(1-\dfrac{9}{4^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{9}{7^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{9}{10^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{9}{13^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{9}{97^2}\right)$;

1.40 $\left(1-\dfrac{1}{9^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{11^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{12^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{999^2}\right)$;

1.41 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+10}$.

1.42 Vypočtěte hodnotu proměnné a, jestliže platí: $a^{a^{a^{a^{\cdots}}}} = 2$.
1.43 Indická úloha: Je třeba vypočítat počet krav a telat ve stádu, jež získáme od jedné krávy za 20 let, víme-li, že se každé krávě narodí počátkem každého roku jedno tele a každé tele dává stejné potomstvo, jakmile dosáhne věku tří let.
1.44 Fibonacciho úloha: Kdosi umístil pár králíků na místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se narodí v průběhu jednoho roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede měsíčně na svět jeden pár a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku. S případy uhynutí se nepočítá. První králíci umístění do ohrady jsou čerstvě narození. Kolik párů králíků bude na tomto místě po prvním, druhém, třetím, čtvrtém a pátém měsíci? Lze předpovědět, kolik jich bude na konci n-tého měsíce?

2. Důkaz matematickou indukcí

2.1 Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rekurentně takto: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n$. Vyjádřete jí vztahem pro n-tý člen.

2.2 Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je dána rekurentně takto: $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot b_n$. Vyjádřete tuto posloupnost vztahem pro n-tý člen.

2.3 Pro všechna přirozená čísla n je součet prvních n členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n^2$, roven $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Dokažte.

2.4 Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí: $6/(n^3 + 11n)$.

2.5 Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí: $3/(5^n + 2 \cdot 11^n)$.

2.6 Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Matematickou indukcí dokažte platnost tvrzení:

2.7 $\forall n \in \mathbb{N}: 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

2.8 $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2.9 $\forall n \in \mathbb{N}: 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

2.10 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

2.11 $\forall n \in \mathbb{N}: 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

2.12 $\forall n \in \mathbb{N}: 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$;

2.13 $\forall n \in \mathbb{N}: a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, a \neq 1, a \in \mathbb{Z}$;

2.14 $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$;

2.15 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{9}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

2.16 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

2.17 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;

2.18 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;

2.19 $\forall n \in \mathbb{N}: 1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

2.20 $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+...+\frac{n}{x^n}=\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x^n(x-1)^2}, x\neq 0, x\neq 1$;

2.21 $\forall n \in \mathbb{N}: \sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...+\sin^n x=\frac{\sin x\cdot(\sin^n x-1)}{\sin x-1}, x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

2.22 Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla je výraz $\frac{6^{2n}-1}{35}$ vždy celočíselný.

2.23 Dokažte, že součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný dvěma.

2.24 Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

2.25 Dokažte matematickou indukcí, že součin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný šesti.

2.26 Dokažte matematickou indukcí, že číslo $Q(n)=5^{n+1}+6^{2n-1}$ je dělitelné číslem 31 pro každé přirozené číslo n.

2.27 Dokažte matematickou indukcí, že číslo $V(n)=\frac{10^n-1}{81}-\frac{n}{9}$ je pro všechna přirozená čísla číslo celé.

2.28 Postupně dosazujte do výrazu $Q(n)=2^{2^n}-7$ za n čísla 0, 1, 2, 3 a formulujte hypotézu o jeho dělitelnosti jistým přirozeným číslem pro každé $n\in\mathbb{N}_0$. Hypotézu poté dokažte matematickou indukcí.

2.29 Matematickou indukcí dokažte, že $\forall n\in\mathbb{N}: 3/(n^3+2n)$.

2.30 Vyslovte hypotézu o počtu úhlopříček konvexního n-úhelníku ($n>3$) a poté jí dokažte matematickou indukcí.

2.31 Vyslovte hypotézu o součtu vnitřních úhlů konvexního n-úhelníku ($n>3$) a poté jí dokažte matematickou indukcí.

2.32 Vyslovte hypotézu o počtu částí roviny, na něž rovinu dělí n různých přímek, které leží v rovině a procházejí týmž bodem. Poté tuto hypotézu dokažte matematickou indukcí.

2.33 Vyslovte hypotézu o počtu přímek, jimiž lze spojit n bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v téže přímce. Poté tuto hypotézu dokažte matematickou indukcí.

2.34 V hostinci konvexního tvaru je lichý počet pistolníků. V daný okamžik každý vystřelí na svého nejbližšího souseda, který je jednoznačně určen. Dokažte, že přestože se každý pistolník strefí, zůstane alespoň jeden z pistolníků naživu.

2.35 Je-li $a>1$ a n přirozené číslo, pak $a^n>1$. Dokažte.

2.36 Je-li $a>0$, $b>0$, $a>b$ a n přirozené číslo, pak $a^n>b^n$. Dokažte.

2.37 Dokažte, že je $2^n>n$ pro každé přirozené číslo n.

2.38 Nerovnost $2^n>2n+1$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 2. Dokažte.

2.39 Nerovnost $2^n>n^2$ platí pro všechna přirozená čísla n větší než 4. Dokažte.

2.40 Je-li $x>0$, $x\neq 0$ a n přirozené číslo větší než 1, dokažte, že platí $(1+x)^n>1+nx$.

3. Aritmetická posloupnost

Zjistěte, jestli následující posloupnosti jsou aritmetické či nikoliv:

3.1 $(2n-4)_{n=1}^{\infty}$; **3.2** $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$; **3.3** $\left(\frac{2n+3}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$; **3.4** $(-3n+12)_{n=1}^{\infty}$; **3.5** $\left(\frac{4(n-1)}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$.

3.6 V aritmetické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je dáno: $a_5=10$ a $a_9=22$. Určete diferenci této posloupnosti a členy a_7 a a_{25}. Vyjádřete její n-tý člen.

3.7 Určete součet prvních 100 členů aritmetické posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$.

3.8 Určete součet všech lichých trojciferných přirozených čísel.

3.9 Určete součet prvních n přirozených lichých čísel.

3.10 Určete součet prvních 100 čísel, která při dělení číslem 5 dávají zbytek 1.

Určete součet prvních 15 členů aritmetické posloupnosti, v níž platí:

3.11 $a_1 = 6$, $a_{12} = 28$; **3.12** $a_5 = 7$, $a_9 = -1$; **3.13** $a_1 = -2$, $s_{10} = -145$; **3.14** $s_{20} = 240$, $d = 1$.

3.15 Vypočtěte: $\sum_{i=1}^{100} \ln 2^i$.

3.16 Určete *n*, jestliže platí: $\sum_{i=n}^{3n} i = 110$.

3.17 Určete hodnotu proměnné *u*, jestliže $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot ... \cdot 5^{2u} = 0{,}04^{-28}$.

3.18 Vypočtěte: $\sqrt[105]{5 \cdot 5^2 \cdot 5^3 \cdot ... \cdot 5^{20}}$.

3.19 Vypočtěte: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + ... + 2021 \cdot 2^{2021}$.

3.20 Vypočítejte první a poslední člen aritmetické posloupnosti, která má dvanáct členů, je-li $d = 3$ a $s_{12} = 168$.

3.21 Součet prvního a pátého členu aritmetické posloupnosti je 9, součet třetího a čtvrtého členu je o $\frac{1}{4}$ větší než součet prvního a pátého. Určete prvních pět členů této posloupnosti.

3.22 V aritmetické posloupnosti s osmi členy je součin obou krajních členů 100, součet dvou prostředních členů je 29. Určete tuto posloupnost.

3.23 Aritmetická posloupnost, jejíž první člen je 7 a diference 3, má součet členů 420. Kolik členů má posloupnost a jaký je její poslední člen?

3.24 Mezi čísla -5 a 4 je třeba vložit další členy tak, aby vznikla aritmetická posloupnost, jejíž součet je -6,5. Kolik je nových členů a které to jsou?

3.25 Mezi čísla 4 a 37 vložte čísla tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 246. Určete počet vložených čísel a diferenci takto vytvořené aritmetické posloupnosti.

3.26 V aritmetické posloupnosti 3, 6, 9, ... vyhledejte člen, který se rovná polovině součtu všech předchozích.

3.27 Existuje konvexní *n*-úhelník, jehož nejmenší vnitřní úhel má velikost $126°$ a každý další úhel je větší o $4°$ než předchozí? Pokud ano, určete, kolik má tento *n*-úhelník vrcholů.

3.28 Pro která reálná čísla *x* jsou čísla $\log 2^x$, $\log\left(2^x + 1\right)$ a $\log\left(2^x + 3\right)$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti?

3.29 Velikosti stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Delší odvěsna má délku 24 cm. Určete velikosti stran a úhlů tohoto trojúhelníka.

3.30 Co je větší a o kolik: součet prvních 50 lichých přirozených čísel nebo součet prvních 50 sudých přirozených čísel?

3.31 Část střechy domu, kterou je třeba pokrýt taškami, má tvar lichoběžníku. Do řady u hřebenu střechy se vejde 85 tašek, do spodní řady u okapu se vejde 102 tašek. Tašky budou srovnány do řad tak, že do v každé následující řadě bude o jednu tašku více než v řadě předchozí. Kolik korun budou stát tašky na celou uvažovanou část střechy při ceně 15,- korun za jednu tašku?

3.32 Ve městě se buduje hlediště letního kina pro přibližně 1200 diváků. Do první řady je plánováno 40 sedadel, do každé následující pak o 4 sedadla více. Kolik řad sedadel bude mít hlediště?

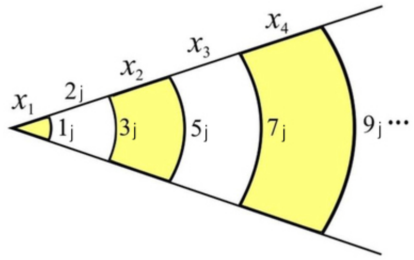
3.33 Ocelové roury se skládají do vrstev tak, že roury každé horní vrstvy zapadají do mezer dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 91 rour, je-li v poslední vrstvě jen jedna roura? Kolik rour je v nejnižší vrstvě?

3.34 V podniku měli v lednu při výrobě součástek 20 kusů závadných. Počet těchto závadných součástek se každý měsíc pravidelně zmenšoval o 2 kusy. Kdy (ve kterém měsíci) bylo všech závadných kusů dohromady 98?

3.35 Určete součet $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{100}$ délek podle obr. 1.

3.36 Dá-li se na první pole šachovnice 6 zrnek a na každé další pole o 4 zrnka více než na předcházející, kolik zrnek bude na všech 64 polích?

3.37 V řadě za sebou je 100 kamenů vzdálených od sebe 10 kroků. Deset kroků před prvním kamenem leží košík. Sběrač má za úkol přenést postupně všechny kamene do košíku tím způsobem, že od košíku jde pro první kámen a s ním se vrací do košíku, poté jde pro druhý kámen a opět se vrací ke košíku, ... Určete kolik kroků sběrač ujde.



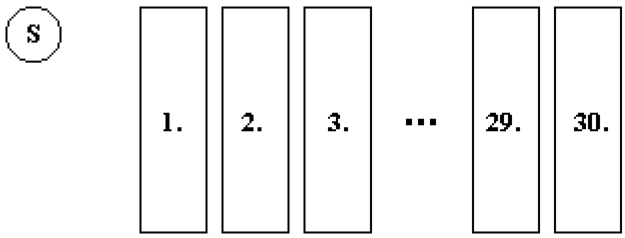
obr. 1

3.38 V zahradě je 30 záhonků (viz obr. 2). Každý má délku 16 m a šířku 2,5 m. K zalévání nosí zahradník vodu ve vědrech ze studny vzdálené 14 m od zahrady, přičemž obchází záhony po mezích. Najednou přinese vodu na jeden záhon. Kolik metrů ujde, než zalije všechny záhony, pokud cesta začíná a končí u studny?

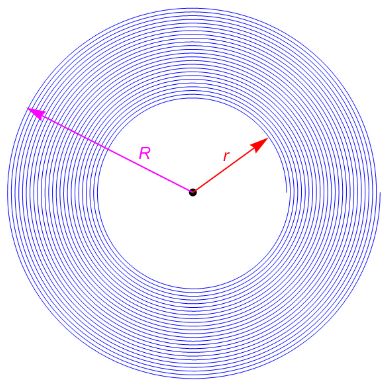
3.39 200 Kč začnu prodávat tak, že první korunu prodám za haléř, druhou za dva haléře, třetí za tři, ... Vydělám nebo prodělám na tomto obchodu?

3.40 Přátelé si vyprávěli o svých rodinách. Krátkému se vysmívali, že se chová jako jedináček, ale on jim na to odpověděl: „Mýlíte se, já jsem nejstarší z patnácti dětí. Jsem právě osmkrát starší než můj nejmladší bratr. Každý další bratr se narodil půldruhého roku po svém předchůdci.“ Kolik let je Krátkému a jeho nejmladšímu bratrovi?

3.41 Jakou dráhu urazí jehla gramofonové přenosky na standardní desce, má-li deska 260 závitů, vnější poloměr spirály je 50 mm a vnější poloměr spirály je 120 mm?



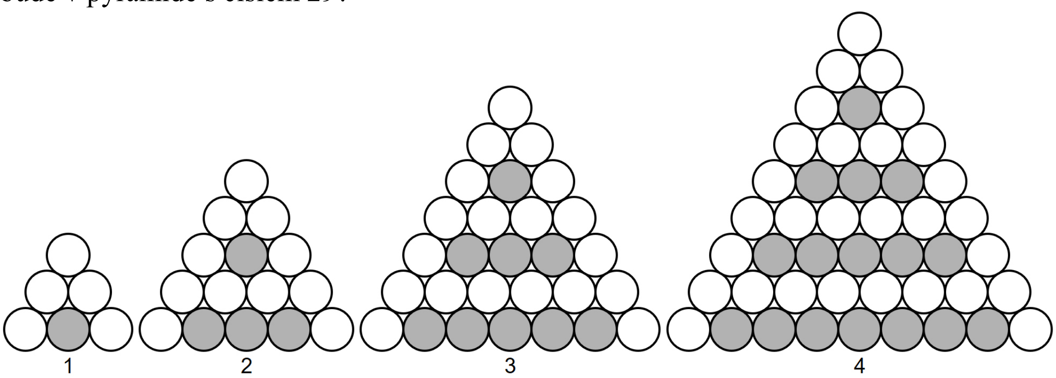
obr. 2



obr. 3

3.42 Rolička s toaletním papírem, jejíž parametry jsou patrné ze schematického zobrazení na obr. 3, má vnitřní poloměr $r = 2{,}2$ cm a vnější poloměr $R = 5{,}8$ cm. Délka papíru na takové roličce je 17,6 m. Kolik postupně se prodlužujících vrstev je na roličce navinuto? Jaká je tloušťka papíru? V řezu zobrazeném na obr. 3 lze na papír nahlížet jako na postupně se zvětšující kružnice. O jakou délku se každá větší kružnice liší od předcházející?

3.43 Na obr. 4 je naznačeno, jak vzniká určitá pyramida složená z bílých a šedých kruhů. Kolik bílých kruhů bude v pyramidě s číslem 29?



obr. 4

3.44 <u>*Egyptská úloha:*</u> Sto měr zrní se má rozdělit mezi pět dělníků tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. Kromě toho mají první dva dělníci dostat dohromady sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři. Kolik měr zrní dostali jednotliví dělníci?

3.45 <u>*Čínská úloha:*</u> Klusák a herka vybíhají z jednoho místa v témž směru. Klusák proběhne za první den 193 li, každý následující den o 13 li více. Herka uběhne za první den 97 li a každý další den o polovinu li méně. Pro proběhnutí 3000 li se klusák vrací zpět a na zpáteční cestě potkává herku. Za kolik dní po vyběhnutí se setkají? (Poznámka: li je stará čínská jednotka délky)

3.46 V roce 1975 natočila režisérka Věra Plívová – Šimková na motivy knihy Marka Twaina *Dobrodružství Toma Sawyera* film *Páni kluci*. V tomto filmu je scéna, v níž má Tomáš natřít za trest plot kolem zahrady své tety Apoleny. Díky své šikovnosti a výmluvnosti mu ho ale pomohou natřít kamarádi i nepřátelé, za což Tomáš pouze inkasuje růžové lístečky, které mu mají dopomoci k výhře, kterou předá zemský školní inspektor a pan ředitel (v nenapodobitelném podání Petra Nárožného). Uvažovanou scénu z filmu lehce pozměníme: předpokládejme, že Tomášova teta vlastní zahradu, na jejíž oplocení je třeba 65 m plotu, který je tvořen z 10 cm širokých planěk, mezi nimiž je mezera 10 cm (i v rohu zahrady se střídá pravidelně plaňka a mezera). Kolik planěk má plot? Tomáš původně plánoval natírání plotu tím způsobem, že první den natře jednu plaňku (aby se nepředřel a aby mohl jít s kamarády ven) a každý následující den o jednu plaňku více než předchozí (aby teta Apolena příliš nehubovala). Na kolik dní by Tomášovi tímto způsobem práce vydržela? První den, když se chtěl pustit do práce, přišli kamarádi, kterým Tomáš po dlouhém (a hraném) zdráhání natírání plotu svěřil. Za patřičný počet růžových lístečků, pochopitelně! Kamarádi pracovali tak, že první den natřeli 10 planěk a každý následující den vždy o stejný počet více než den předchozí. Za 10 dní byli chlapci hotovi. O kolik planěk natřeli každý den více než minulý den?

3.47 Jeden žebřík měl 50 příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na třetím dva, na pátém tři, na sedmém čtyři, … Kolik holubů sedělo na 49. příčli? Kolik holubů bylo na žebříku celkem?

4. Geometrická posloupnost

Zjistěte, jestli následující posloupnosti jsou aritmetické, geometrické či jiné:

4.1 $\left(n^3\right)_{n=1}^{\infty}$; **4.2** $\left(5.\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$; **4.3** $\left(3^{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$; **4.4** $\left(10-6n\right)_{n=1}^{\infty}$; **4.5** $\left(\frac{4.\log 10^{n-1}}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$.

4.6 Geometrická posloupnost je dána takto: $a_2 = 4$ a $q = \frac{1}{2}$. Určete a_1 a a_4.

4.7 V geometrické posloupnosti je $a_2 = 6$ a $a_5 = 48$. Určete kvocient této posloupnosti a a_4, a_{10} a a_{12}.

4.8 Zjistěte, která z čísel 18, 12, 6, 0, -2 a -6 jsou členy geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, v níž $a_1 = 27$ a $q = -\frac{2}{3}$.

4.9 Zjistěte, zda čísla $\sqrt{5}-1$, $\sqrt{3}$ a $\frac{3}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$ členy nějaké geometrické posloupnosti. Pokud ano, určete její kvocient.

4.10 První člen sedmičlenné posloupnosti se rovná 2, poslední člen 1458. Vypočítejte kvocient a součet členů posloupnosti.

4.11 Součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti je 62, první člen je 2 a poslední 32. Určete počet členů posloupnosti a kvocient.

4.12 V geometrické posloupnosti je třetí člen 32 a pátý 512. Vypočítejte, kolik členů má tato posloupnost, je-li její poslední člen 8192.

4.13 Která geometrická posloupnost má tu vlastnost, že součet prvních 10 členů je 33krát větší než součet prvních pěti členů?

4.14 Mezi čísla 2 a 486 vložte 4 čísla tak, aby vznikla geometrická posloupnost.

4.15 Určete geometrickou posloupnost, v níž rozdíl třetího a druhého členu je 12 a rozdíl čtvrtého a třetího členu je 36.

4.16 V geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ je dáno $q = -3$, $a_n = 1215$. Kolik prvních členů této posloupnosti dává součet 915?

4.17 V geometrické posloupnosti platí: $a_1 - a_3 = -15$ a $a_2 + a_1 = 15$. Určete součet prvních pěti členů této posloupnosti.

4.18 Určete všechny členy geometrické posloupnosti $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, v níž platí: $s_4 = 15$ a zároveň $a_1 + a_4 = 9$.

4.19 Čísla c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 mají tu vlastnost, že první tři tvoří geometrickou posloupnost a poslední čtyři posloupnost aritmetickou. Určete tato čísla, jestliže platí: $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 4$ a zároveň $c_2 \cdot c_5 = -8$.

4.20 Přičteme totéž číslo k číslům 2, 7 a 17 dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Vypočtěte toto číslo a geometrickou posloupnost určete vzorcem pro n-tý člen.

4.21 V nádobě je určité množství radonu. Jaké množství z původního zbude v nádobě za 36 dní, je-li poločas jeho přeměny 4 dny?

4.22 Kolik korun je třeba ukládat počátkem každého roku po dobu 10 let, chceme-li mít koncem desátého roku nastřádáno 10000 Kč při 2% složeném úrokování a 15% dani? Úrokovací období je jeden rok.

4.23 Kolik korun budeme mít na účtu s úrokem 5 % na konci sedmého měsíce, budeme-li počátkem každého měsíce ukládat částku 100 Kč. Počítejte s daní 15 % a úrokovacím obdobím jeden měsíc.

4.24 Ve městě žilo na počátku roku 2000 25000 obyvatel. Kolik obyvatel bude mít město na začátku roku 2005, odhaduje-li se roční přírůstek na 1,5 %?

4.25 Kolik korun bude mít za pět let na účtu kuřák, který se rozhodl přestat kouřit a měsíčně uspořenou částku za nákup cigaret 1000 korun uloží do banky na účet s úrokem 4 % a daní 15 %? Předpokládejte, že úroková míra se během celého uvažovaného období nemění a že uspořenou částku ukládá kuřák na účet vždy na začátku měsíce. Řešte pro případ měsíčního úrokovacího období.

4.26 Za kolik let vzroste jistina 1000 korun při úroku 3 % na 1500 korun. Počítejte s daní 15 % a uvažujte a) roční, b) měsíční úrokovací období.

4.27 Jaký je úrok banky, bylo-li uloženo 800 korun, které po 6 letech vzrostly na 1000 korun. Počítejte s měsíčním úrokovacím obdobím a řešte pro případ a) daně 15 %, b) bez daní.

4.28 *** Podnikatel si vypůjčil 100000 korun a zavázal se, že půjčku splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž jedna bude splatná za 2 roky, druhá za 4 roky ode den vypůjčení. Jak velké budou tyto splátky při úroku 4 %?

4.29 Kolik zůstane na vkladní knížce z vkladu 12000 korun, vybírá-li se a) začátkem, b) koncem každého roku 1200 korun po dobu 10 let? Úrok je 1,5 %, daň 15 % a úrokovací období jeden rok.

4.30 Vkladatel si uložil na termínovaný vklad na dobu 5 let na začátku roku 10000 korun. Roční úroková míra je 11,5 %, daň 15 %. Jakou částku bude mít na konci pátého roku, jestliže za celou dobu trvání vkladu nebylo z vkladu nic vybráno? Řešte pro případ: a) ročního úrokovacího období, b) pololetního úrokovacího období, c) čtvrtletního úrokovacího období a d) měsíčního úrokovacího období.

4.31 ***Množství dřeva v určité lesní oblasti se odhaduje na $1{,}5.10^6\ \mathrm{m}^3$ a roční přírůstek je 2 %. Jaký bude přibližně stav po 10 letech, těží-li se ročně $2.10^4\ \mathrm{m}^3$ dřeva?

4.32 Jedním tažením se zmenší průměr drátu o 10 %. Jaký průměr bude mít drát s původním průměrem 6 mm po osmi taženích?

4.33 Účetní cena počítače klesá každý rok o 15 % ceny z minulého roku. Za jak dlouho klesne cena počítače pod jednu pětinu původní ceny?

4.34 Kupec chtěl dát okovat koně. Kovář žádal tento způsob placení: „Na všechny podkovy potřebuji 24 hřebíky. Za první hřebík mi zaplatíš 1 haléř, za druhý 2 haléře, za třetí 4 haléře, vždy za každý další hřebík zaplatíš dvakrát tolik.“ Kupec radostně souhlasil, později toho však litoval. Kolik musel zaplatil jen za poslední hřebík?

4.35 Kalif z Bagdádu dovolil jednomu matematikovi, aby si přál, co chce. Matematik se zatvářil nevinně a řekl: „Velký Kalife, mám skromné přání. Odměň mě pšeničnými zrny a to takto: Dej mi tolik pšeničných zrn, kolik jich bude muset být na posledním poli šachovnice, jestliže na první položíme jedno zrno a na každé následující dvojnásobek toho množství, které bude na předcházejícím poli.“ Kalif se zasmál a ochotně souhlasil. Domníval se, že matematik nedostane ani tolik zrní, aby si mohl upéci bochník chleba. Velmi se však podivil, když mu matematik vypočítal, že jeho přání se nedá splnit. Jak je to možné? Pokuste se převést množství pšeničných zrn, které vám vyjde, na vhodné jednotky, aby vznikla reálnější představa o množství zrn.

4.36 List papíru rozdělte napůl, jednu polovinu opět napůl, … Kolik dělení je třeba, abyste získali částečky o hmotnosti atomu? Hmotnost atomu uvažujte 10^{-27} kg, hmotnost listu papíru 1 g.

4.37 Zahradník prodal prvnímu kupujícímu polovinu všech jablek a půl jablka, druhému kupujícímu polovinu zbytku a ještě půl jablka, třetímu polovinu dalšího zbytku a ještě půl jablka, … Sedmému kupujícímu prodal polovinu zbytku a též půl jablka a nezůstalo mu ani jedno jablko. Kolik jablek měl na začátku obchodu?

4.38 <u>*Úloha z Ahmesova papyru (2000 let př. n. l.):*</u> Každý se sedmi lidí má 7 koček, každá kočka chytí 7 myší, každá myš sežere 7 klasů ječmene, z každého klasu ječmene může vyrůst 7 věder zrna. Kolik věder zrna se zachrání zásluhou koček?

4.39 Král nařídil svému sluhovi sebrat ze třiceti vesnic vojsko takovým způsobem, že z každé vesnice vezme tolik mužů, kolik do ní vstoupilo. Do první vesnice šel sluha sám. Kolik mužů mělo vojsko po opuštění třicáté vesnice? Kolik mužů bylo sebráno v poslední vesnici?

5. Limita posloupností

5.1 Dokažte, že posloupnost $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \dfrac{n+2}{n}$ je konvergentní.

Zjistěte, které posloupnosti jsou konvergentní a které divergentní. Pokud to jde, určete jejich limitu:

5.2 $\left(\dfrac{-2n}{1+n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.3 $\left((-1)^n \dfrac{1+n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.4 $\left((-1)^n \dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.5 $\left(\cos\left(\pi \dfrac{1+n}{n}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.6 $\left(\dfrac{-2n+7}{1-3n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.7 $\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-4}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.8 $\left(\dfrac{4n}{2n^2+3n}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.9 $\left(\dfrac{1+\pi n}{4n^3}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.10 $\left(\dfrac{5+(-1)^n n}{n+5}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.11 $\left(\dfrac{(3n-4)(2n+1)}{(n+2)^2-4}\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.12 $\left(0{,}5^n+2\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.13 $\left(\left(\dfrac{79}{78}\right)^n - 1\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.14 $\left(n^4\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.15 $\left(1-n^3\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.16 $\left(\cos\left((-1)^n \pi n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$;

5.17 $\left(\dfrac{3}{n^4}\right)_{n=1}^{\infty}$.

6. Nekonečné řady

6.1 Je dána nekonečná řada $\left(a_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Vyšetřete posloupnost $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$: napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti (na základě hypotézy, kterou dokážete) a určete její limitu. Je posloupnost $\left(s_n\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní?

6.2 Určete součet nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$.

Určete, které z následujících řad jsou konvergentní. Pokud jsou konvergentní, určete jejich součet:

6.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{3}$; **6.4** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\cdot(-1)^n$; **6.5** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n}$; **6.6** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$; **6.7** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$.

6.8 Vypočtěte: $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\ldots$.

6.9 Vypočtěte: $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{256}+\ldots$.

6.10 Vypočtěte: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^k}$.

6.11 Vypočtěte: $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{16}+\dfrac{27}{64}+\dfrac{81}{256}+\ldots$.

6.12 Vypočtěte: $\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{2^9}+\dfrac{1}{2^{12}}+\ldots$.

6.13 Vypočtěte: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{2}{5^n}\right)$.

6.14 Vypočtěte: $\sum\limits_{u=0}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^u$.

6.15 Vypočtěte: $\sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{r}$.

6.16 Vypočtěte: $q\cdot\sqrt{q^3}\cdot\sqrt[4]{q^3}\cdot\sqrt[8]{q^3}\cdot\ldots$.

6.17 Pro členy a_n geometrické posloupnosti platí: $a_2=-\frac{2}{3}$ a $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{5}$. Určete první člen a kvocient této posloupnosti.

Řešte rovnice s neznámu $x\in\mathbb{R}$:

6.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\log\sqrt[\left(2^{n-1}\right)]{x}=2$; **6.19** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-1}=\frac{4x-3}{3x-4}$; **6.20** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^x\right)^n=1$; **6.21** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{2n-2}x=2\operatorname{tg}x$.

6.22 V množině reálných čísel řešte rovnici: $1-\frac{3}{u}+\frac{9}{u^2}-\frac{27}{u^3}+\ldots=\frac{8}{u+10}$.

6.23 V množině reálných čísel řešte rovnici: $1+\frac{r}{r+1}+\frac{r^2}{(r+1)^2}+\frac{r^3}{(r+1)^3}+\ldots=r^2-5$.

6.24 V množině reálných čísel řešte rovnici: $\frac{a-2}{a}+\frac{(a-2)^2}{a^2}+\frac{(a-2)^3}{a^3}+\ldots=a^2+3a$.

Napište ve tvaru zlomku s celočíselným jmenovatelem i čitatelem číslo:

6.25 $0{,}3\overline{24}$; **6.26** $0{,}\overline{5}$; **6.27** $2{,}5\overline{7}$; **6.28** $0{,}12\overline{3}$; **6.29** $0{,}1\overline{23}$; **6.30** $0{,}\overline{123}$; **6.31** $6{,}3\overline{24}$; **6.32** $8{,}\overline{02}$.

6.33 Po kmeni stromu leze přímo vzhůru k nejbližší větvi housenka. Housenka je zřejmě velmi unavená, protože za první minutu urazí 5 dm, za druhou 2,5 dm, za třetí 1,25 dm, … Vzdálenost k první větvi, na níž má housenka potravu, je o zlomek centimetru větší než jeden metr. Za jak dlouho doleze housenka k této větvi?

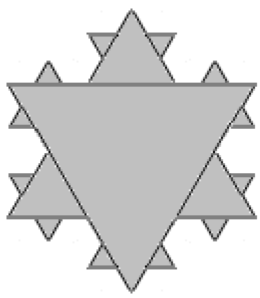
6.34 Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 2 cm je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Do tohoto trojúhelníku $A_2B_2C_2$ je vepsán stejným způsobem trojúhelník $A_3B_3C_3$. Vypočítejte součet obvodů a součet obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

6.35 Do čtverce ABCD o straně délky 3 cm je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran čtverce. Analogicky vepíšeme do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ čtverec $A_2B_2C_2D_2$, … Vypočtěte součet obvodů a obsahů všech takových čtverců.

6.36 Do rovnostranného trojúhelníku o délce strany *a* je vepsán kruh, do kruhu je vepsán rovnostranný trojúhelník, do tohoto trojúhelníku je vepsán další kruh, … Vypočtěte součet obsahů všech takto vzniklých a) trojúhelníků, b) kruhů.

6.37 „Spirála“ se skládá z nekonečně mnoha půlkružnic. Přitom poloměr každé následující polokružnice je dvakrát menší než poloměr předchozí polokružnice. Určete délku „spirály“, je-li poloměr první polokružnice 5 cm.

6.38 V roce 1904 švédský matematik Helge van Koch poprvé popsal plošný útvar, který dodnes nese jeho jméno – Kochova vločka. Tento útvar je možné získat takto: k prostřední třetině každé strany rovnostranného trojúhelníka připojíme další rovnostranný trojúhelník. K prostřední třetině každé ze vzniklých stran útvaru nyní připojíme opět rovnostranný trojúhelník (viz obr. 5). Tímto způsobem se pokračuje v konstrukci útvaru dále. Určete obvod a obsah takto vzniklého útvaru, má-li strana největšího trojúhelníka délku *a*. Kružnice opsaná původnímu trojúhelníku vymezí kruh. Jaká část kruhu je zaplněna Kochovou vločkou?

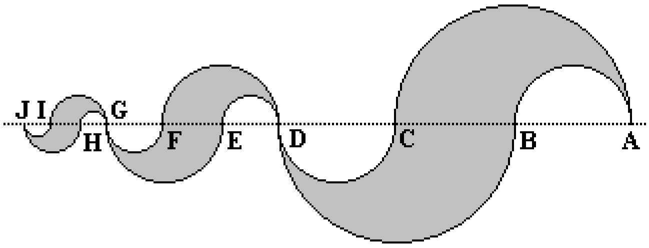


obr. 5

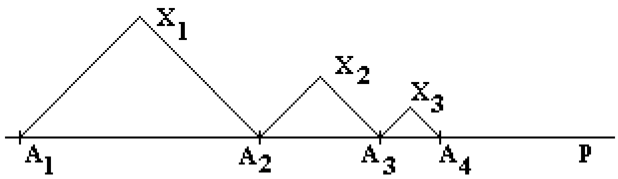
6.39 Na obr. 6 je znázorněn „hádek“, který vznikl postupným spojováním podobných částí. Podle označení z obrázku platí: $|AB|=|BC|=|CD|=a$, $|DE|=|EF|=|FG|=\frac{1}{2}|AB|$ a

$|GH| = |HI| = |IJ| = \frac{1}{2}|FG|$, … („hádek pokračuje stále dále do menších rozměrů jednotlivých „článků svého těla“). Určete kolik papíru je třeba na jeho zhotovení.

6.40 Je dána přímka *p*, na níž jsou dány body A_1, A_2, … tak, že platí: $|A_1A_2| = a$, $|A_2A_3| = \frac{a}{2}$, $|A_3A_4| = \frac{a}{4}$, … Nad každou z úseček A_1A_2, A_2A_3, … je sestrojen rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník (viz obr. 7). Určete délku lomené čáry $A_1X_1A_2X_2A_3X_3A_4...$ a obsah obrazce, který je ohraničen touto lomenou čarou a přímkou *p*.



obr. 6



obr. 7

6.41 Představme si těleso ve tvaru jakéhosi „teleskopického dalekohledu“, které je složeno z nekonečně mnoha válců. Poloměr podstavy největšího válce je roven *a*, poloměr podstavy každého dalšího válce je poloviční než přecházející. Výška největšího válce je 4*a* a výška každého dalšího válce je oproti předchozímu dvojnásobná. Určete objem tohoto tělesa a povrch jeho pláště.

6.42 Je dán čtverec ABCD o straně délky *a*. Bod L_1 je patou kolmice vedené z vrcholu A daného čtverce k úhlopříčce BD. Bod L_2 je patou kolmice vedené z bodu L_1 na stranu AD čtverce ABCD. Bod L_3 je patou kolmice vedené z bodu L_2 k úhlopříčce BD. Určete délku lomené čáry $AL_1L_2L_3...$, jejíž konstrukce probíhá podle popsaných pravidel.

6.43 Je dán ostrý úhel α o velikosti $60°$. Na jednom jeho rameni leží bod A, který je ve vzdálenosti *a* od vrcholu úhlu. Z bodu A je spuštěna na druhé rameno kolmice, z její paty další kolmice na první rameno, … Určete součet délek těchto kolmic.

6.44 V rovnostranném trojúhelníku ABC, jehož strana má velikost *a* je vedena výška CD. Z její paty je vedena kolmice na stranu AC, z její paty je vedena kolmice na výšku CD, … Určete délku takto vzniklé lomené čáry.

6.45 Do čtverce o straně *a* je vepsán kruh, do něho zase čtverec, do něho opět kruh, … Určete součet obsahů všech čtverců a všech kružnic.

6.46 Do rovnostranného kužele o straně řezu *s* je vepsána koule, nad ní druhá, třetí, … Jaký je součet objemů všech vepsaných koulí?

ŘEŠENÍ

1. Posloupnosti a jejich vlastnosti

1.1 17, 20, 23;
1.2 3, -3, -9;
1.3 96, 192, 384;
1.4 16, 8, 4;
1.5 607, 1822, 5467;
1.6 343, 512, 729;
1.7 24, 31, 39;
1.8 203, 405, 811;
1.9 1, 0, -1, -2, -3;
1.10 1, 13, 33, 61;
1.11 -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{25}$;
1.12 4, 0, 4, 0, 4;
1.13 -3, $-\frac{7}{2}$, $-\frac{19}{3}$, a_4 a a_5 neexistují;
1.14 3, 8, 15, 24, 35;
1.15 1, 0, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{5}$;
1.16 $\frac{\mathrm{e}-1}{1}$, $\frac{\mathrm{e}^2-2}{2}$, $\frac{\mathrm{e}^3-3}{3}$, $\frac{\mathrm{e}^4-4}{4}$, $\frac{\mathrm{e}^5-5}{5}$;
1.17 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, 1;
1.18 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n=(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}=-(-1)^n$;
1.19 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\frac{3n}{n+1}$;
1.20 $(a_n)_{n=1}^{7}$, $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{14}{n}$;
1.21 $(a_n)_{n=1}^{6}$, $a_n=\frac{2^{n-1}+1}{n+2}$;
1.22 $a_3=5$, $a_5=17$;
1.23 $a_3=\frac{2}{3}$, $a_5=\frac{5}{8}$;
1.24 $a_3=a_5=-1$;
1.25 $a_3=a_5=1$;
1.26 $a_1=\log 3$, $a_{n+1}=a_n+\log 3$;
1.27 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+2(n+1)$;
1.28 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{n}{n+a_n}$;
1.29 rostoucí, omezená;
1.30 klesající, omezená zdola;
1.31 rostoucí, omezená;
1.32 ani rostoucí ani klesající, neomezená;
1.33 rostoucí, omezená;
1.34 rostoucí, omezená zdola;
1.35 klesající, omezená;
1.36 ani rostoucí ani klesající, omezená;
1.37 ani rostoucí ani klesající, omezená;
1.38 klesající, omezená;
1.39 25;
1.40 $\frac{8000}{9\cdot 999}$;
1.41 9;
1.42 $\sqrt{2}$;
1.43 2745 krav a telat;
1.44 1, 2, 3, 5, 8; $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

2. Důkaz matematickou indukcí

Úlohy v tomto odstavci jsou určeny na procvičení důkazu matematickou indukcí. Ve většině z nich to znamená ovládat základní úpravy algebraických výrazů.

3. Aritmetická posloupnost

3.1 ano;
3.2 ne;
3.3 ne;
3.4 ano;
3.5 ano;
3.6 $d=3$, $a_7=16$, $a_{25}=70$, $a_n=-5+3n$;
3.7 $s_{100}=5050$;
3.8 $s_{450}=247500$;
3.9 n^2;
3.10 $s_{100}=24850$;
3.11 $s_{15}=300$;
3.12 $s_{15}=15$;
3.13 $s_{15}=-\frac{965}{3}$;
3.24 je třeba vložit 11 čísel: -4,25; -3,5; -2,75; -2; -1,25; -0,5; 0,25; 1; 1,75; 2,5; 3,25;
3.25 vložených čísel je 10, $d=3$;
3.26 jedná se o pátý člen: $a_5=15$;
3.27 jedná se o 10ti úhelník;
3.28 0;
3.29 18 cm, 24 cm, 30 cm, $36{,}87°$, $53{,}13°$, $90°$;
3.30 větší je součet sudých a to o 50;
3.31 25245 korun;
3.32 17 řad;
3.33 13 vrstev, 13 rour;
3.34 všech závadných součástek bude dohromady 98 v červenci;
3.35 199 j;
3.36 8448 zrnek;
3.37 119000 kroků;

3.14 $s_{15} = \frac{285}{2}$;
3.15 $5050 \cdot \ln 2$
3.16 5;
3.17 7;
3.18 25;
3.19 $2 + 2020 \cdot 2^{2022}$
3.20 $a_1 = -\frac{5}{2}$, $a_{12} = \frac{61}{2}$;
3.21 4; 4,25; 4,5; 4,75; 5;
3.22 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 nebo 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4;
3.23 $n = 15$, $a_{15} = 49$;
3.38 4125 m;
3.39 1 korunu;
3.40 Krátkému je 24 let, jeho nejmladšímu bratrovi jsou 3 roky;
3.41 $138788 \text{ mm} \doteq 138{,}8 \text{ m}$;
3.42 70; 0,5 mm; 3,3 mm;
3.43 929;
3.44 $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$ měr zrní;
3.45 potkají se 16. den (15,7 dne);
3.46 325 planěk, 25 dní, každý den o 5 více;
3.47 25 holubů, 325 holubů.

4. Geometrická posloupnost

4.1 ani aritmetická ani geometrická;
4.2 geometrická;
4.3 geometrická;
4.4 aritmetická;
4.5 aritmetická;
4.6 $a_1 = 8$, $a_4 = 1$;
4.7 $a_4 = 24$, $a_{10} = 1536$, $a_{12} = 6144$;
4.8 číslo 12;
4.9 $q = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)$;
4.10 $q = 3$, $s_7 = 2186$;
4.11 $q = 2$, $n = 5$;
4.12 $n = 7$;
4.13 posloupnost s $q = 2$, a_1 libovolné;
4.14 6, 18, 54, 162;
4.15 $a_1 = 2$, $q = 3$;
4.16 pět;
4.17 $s_5 = 155$;
4.18 $a_n = 2^{n-1}$ nebo $a_n = \frac{16}{2^n}$;
4.19 8, 4, 2, 0, -2;
4.20 neznámé číslo je 3, $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$;
4.21 $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$;
4.22 910,40 korun;
4.23 710 korun;
4.24 26932 obyvatel;
4.25 65486,20 korun;
4.26 a) 16,1 let; b) 15,9 let;
4.27 a) 4,38 %; b) 3,72 %;
4.28 56200 korun;
4.29 a) 746,30 korun; b) 908,40 korun;
4.30 a) 15941 korun; b) 16115,30 korun; c) 16207,25 korun; d) 16270,50 korun;
4.31 $1{,}6 \cdot 10^6 \text{ m}^3$;
4.32 2,58 mm;
4.33 10 let;
4.34 $8 \cdot 10^4$ korun (přesně 83886 korun);
4.35 $8 \cdot 10^{18}$ zrn, tj. $4{,}5 \cdot 10^{10}$ vagónů po 10 tunách;
4.36 79;
4.37 127;
4.38 16807 věder zrna;
4.39 celkem 10^9, v poslední vesnici $5 \cdot 10^8$.

5. Limita posloupností

5.1 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$;
5.2 -2, konvergentní;
5.3 neexistuje, divergentní;
5.4 neexistuje, divergentní;
5.5 -1, konvergentní;
5.6 $\frac{2}{3}$, konvergentní;
5.7 1, konvergentní;
5.8 0, konvergentní;
5.9 0, konvergentní;
5.10 neexistuje, divergentní;
5.11 6, konvergentní;
5.12 2, konvergentní;
5.13 ∞, divergentní;
5.14 ∞, divergentní;
5.15 ∞, divergentní;
5.16 neexistuje, divergentní;
5.17 0, konvergentní.

6. Nekonečné řady

6.1 $s_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$, konvergentní;
6.25 $\frac{107}{330}$;

6.2 $\frac{1}{9}$;
6.3 ∞, divergentní;
6.4 neexistuje, divergentní;
6.5 ∞, divergentní;
6.6 $2\sqrt{5}$, konvergentní;
6.7 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$, konvergentní;
6.8 1;
6.9 $\frac{1}{3}$;
6.10 $\frac{1}{2}$;
6.11 4;
6.12 $\frac{1}{7}$;
6.13 $\frac{1}{2}$;
6.14 $\frac{3}{4}$;
6.15 $-\frac{1}{5}$;
6.16 q^4;
6.17 1; $-\frac{2}{3}$;
6.18 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=(0;\infty)$, $\mathrm{P}=\{10\}$;
6.19 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$, $\mathrm{P}=\{6\}$;
6.20 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=(-\infty;0)$, $\mathrm{P}=\{-1\}$;
6.21 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\mathrm{P}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi; k\in\mathbb{Z}\right\}$;
6.22 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$, $\mathrm{P}=\{-6;4\}$;
6.23 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$, $\mathrm{P}=\{3\}$;
6.24 $\mathrm{O}=\mathbb{R}$, $\mathrm{D}=(1;\infty)$, $\mathrm{P}=\{\ \}$;
6.26 $\frac{5}{9}$;
6.27 $2\frac{19}{33}=\frac{85}{33}$;
6.28 $\frac{37}{300}$;
6.29 $\frac{61}{495}$;
6.30 $\frac{41}{333}$;
6.31 $6\frac{107}{330}=\frac{2087}{330}$;
6.32 $8\frac{2}{99}=\frac{794}{99}$;
6.33 nikdy;
6.34 $o=6a_1=12\ \mathrm{cm}$, $S=\frac{\sqrt{3}}{3}a_1^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}^2\doteq 2{,}3\ \mathrm{cm}^2$;
6.35 $o=4a_1\left(2+\sqrt{2}\right)=12\left(2+\sqrt{2}\right)\mathrm{cm}\doteq 41\ \mathrm{cm}$, $S=2a_1^2=18\ \mathrm{cm}^2$;
6.36 $S_{\text{trojúhelníků}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$, $S_{\text{kruhů}}=\frac{\pi}{9}a^2$;
6.37 $o=2\pi r_1=10\pi\ \mathrm{cm}\doteq 31{,}4\ \mathrm{cm}$;
6.38 $S=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$, $o\to\infty$, $\frac{6\sqrt{3}}{5\pi}$, tj. 66,2 %;
6.39 $S=\pi a^2$;
6.40 $d=2a\sqrt{2}$, $S=\frac{a^2}{3}$;
6.41 $V=8\pi a^3$, $S_{\text{pláště}}\to\infty$;
6.42 $d=a\left(\sqrt{2}+1\right)$;
6.43 $d=a\sqrt{3}$;
6.44 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}a\left(2+\sqrt{3}\right)$;
6.45 $S_{\text{čtverců}}=2a^2$, $S_{\text{kruhů}}=\frac{\pi a^2}{2}$;
6.46 $S=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{52}$.