Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Planimetrie

sbírka úloh

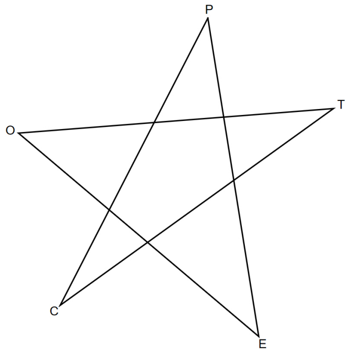
Jaroslav Reichl

Obsah

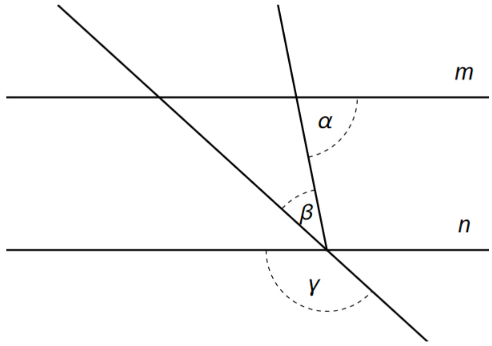
1. Úhly

1.1 Určete součet vnitřních úhlů u vrcholů P, O, C, E a T ve hvězdě zobrazené na obr. 1.

1.2 Určete hodnotu úhlu γ, jestliže přímky *m* a *n* jsou navzájem rovnoběžné a $\alpha = 80°$ a $\beta = 50°$ (viz obr. 2).



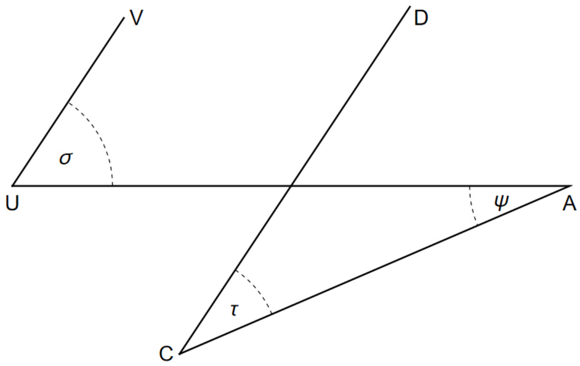
obr. 1



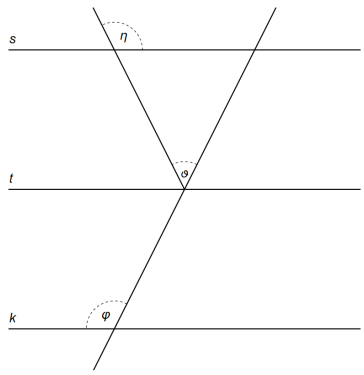
obr. 2

1.3 Určete hodnotu úhlu τ, jestliže polopřímky UV a CD jsou navzájem rovnoběžné a $\sigma = 70°$ a $\psi = 30°$ (viz obr. 3).

1.4 Určete hodnotu úhlu φ, jestliže přímky *s*, *t* a *k* jsou navzájem rovnoběžné, $\eta = 110°$ a $\vartheta = 35°$ (viz obr. 4).



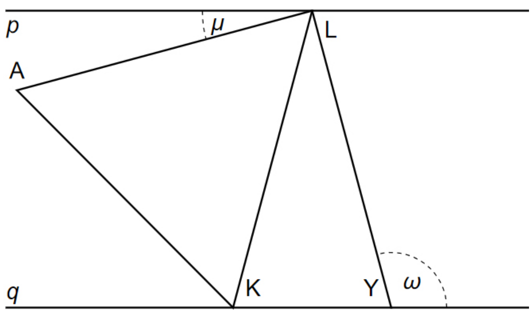
obr. 3



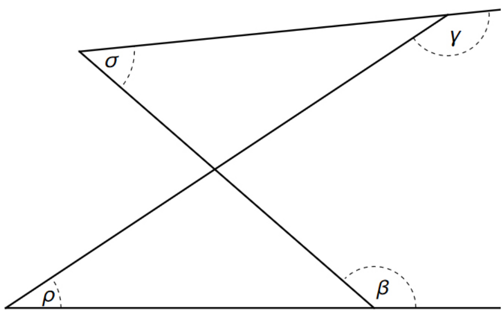
obr. 4

1.5 Určete hodnotu úhlu μ, jestliže přímky *p* a *q* jsou rovnoběžné, trojúhelník LAK je rovnostranný, trojúhelník KLY je rovnoramenný a $\omega = 7\mu$ (viz obr. 5).

1.6 Určete hodnotu úhlu ρ, jestliže $\sigma = 54°$, $\gamma = 146°$ a $\beta = 136°$ (viz obr. 6).



obr. 5

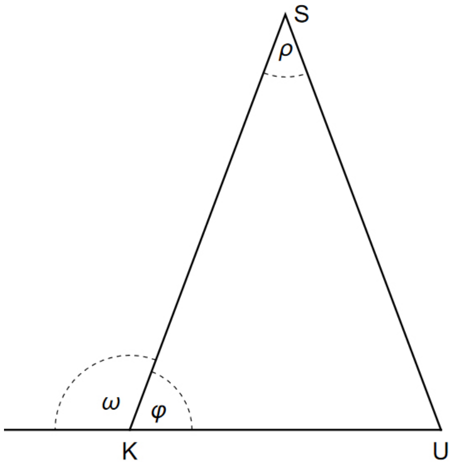


obr. 6

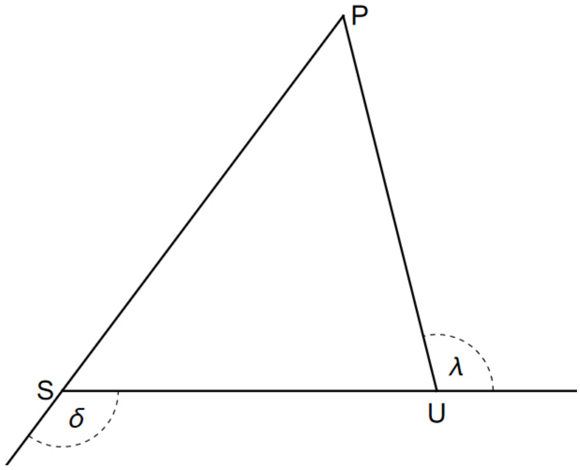
1.7 Délky stran US a SK v trojúhelníku KUS jsou stejné. Určete hodnotu úhlu ρ, jestliže $\frac{\omega}{\varphi} = \frac{13}{7}$ (viz obr. 7).

1.8 Délky stran SU a UP v trojúhelníku SUP jsou stejné a $\lambda = 110°$. Určete hodnotu úhlu δ (viz obr. 8).

1.9 Určete velikost úhlu označeného symbolem *x* na obr. 9.

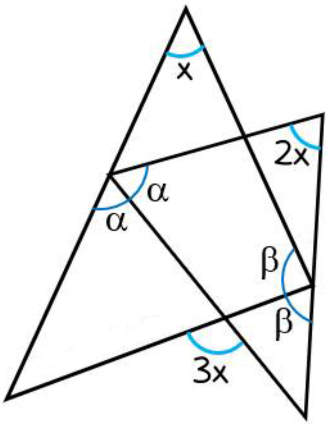


obr. 7

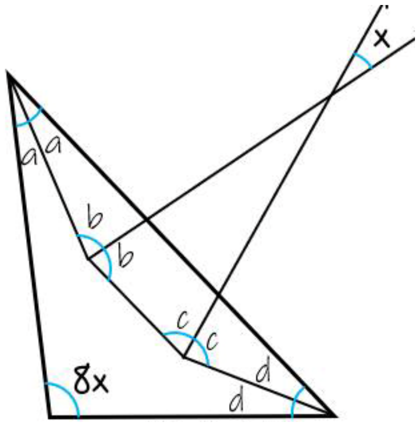


obr. 8

1.10 Určete velikost úhlu označeného symbolem x na obr. 10.

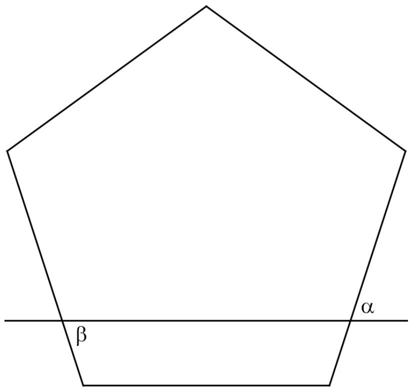


obr. 9



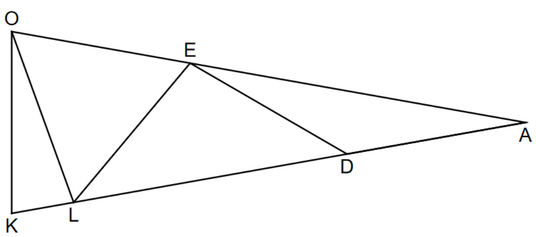
obr. 10

1.11 Určete hodnoty vyznačených úhlů na obr. 11, na kterém je sestrojen pravidelný pětiúhelník.

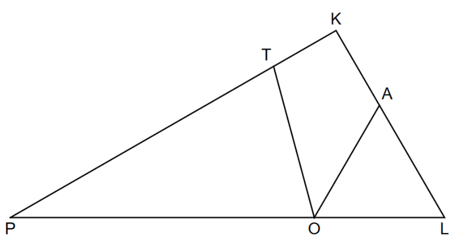


obr. 11

1.12 V rovnoramenném trojúhelníku KAO (viz obr. 12) platí: $|KO| = |OL| = |LE| = |ED| = |DA|$. Určete velikost úhlu KAO.



obr. 12



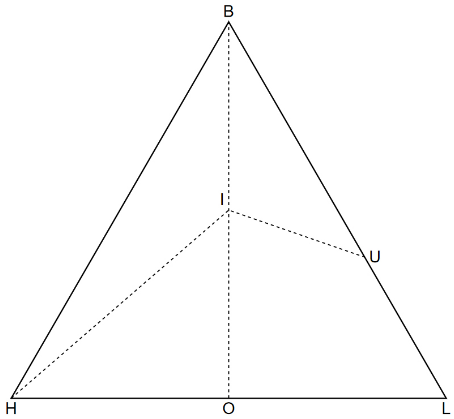
obr. 13

1.13 V pravoúhlém trojúhelníku PLK s pravým úhlem při vrcholu K (viz obr. 13) jsou sestrojeny dva rovnoramenné trojúhelníky POT (se základnou OT) a OLA (se základnou OA). Určete hodnotu úhlu TOA.

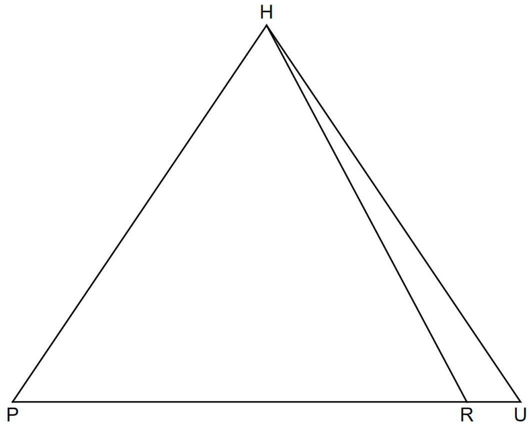
1.14 Na stranách rovnoramenného trojúhelníka CAR se základnou CA leží po řadě body V, U a Z tak, že trojúhelník VUZ je rovnostranný. Hodnota úhlu VUA je $30°$ a hodnota úhlu RZU je $70°$. Určete hodnotu úhlu CVZ.

1.15 V rovnostranném trojúhelníku HLB platí $|LU| = 15\ j$, $|UB| = 25\ j$ a $|OI| = |IB|$ (viz obr. 14). Určete hodnotu úhlu HIU. Úsečka OB je výška trojúhelníka HLB.

1.16 V útvaru zobrazeném na obr. 15 platí: $|PR| = |UH|$, $|\sphericalangle PUH| = 56°$ a $|\sphericalangle UHR| = 6°$. Určete hodnotu úhlu RHP.



obr. 14



obr. 15

2. Trojúhelníky

2.1 Kružnice zobrazená na obr. 16 má poloměr $18\ j$ a délka oblouku AC je $7\pi\ j$. Vypočtěte velikost úhlu ABC.

2.2 Trojúhelník PUK má délky stran 5,4 cm, 7,8 cm a 6 cm. Trojúhelník SAD má délky stran 8,1 cm, 11,7 cm a 9 cm. Jsou trojúhelníky PUK a SAD podobné? Zdůvodněte.

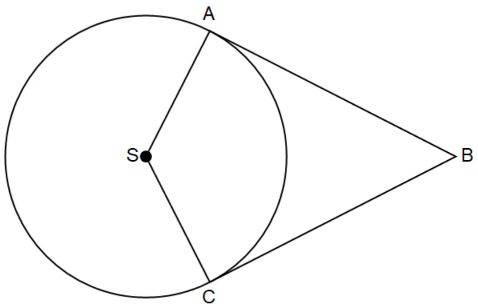
2.3 Trojúhelník MOC má délky stran 6,4 cm, 7,2 cm a 5,2 cm. Trojúhelník HUL má délky stran 4,8 cm, 5,4 cm a 3,7 cm. Jsou trojúhelníky MOC a HUL podobné? Zdůvodněte.

2.4 Jedna z odvěsen pravoúhlého trojúhelníku MOK má délku 14 cm. V jaké vzdálenosti od druhé odvěsny leží střed přepony?

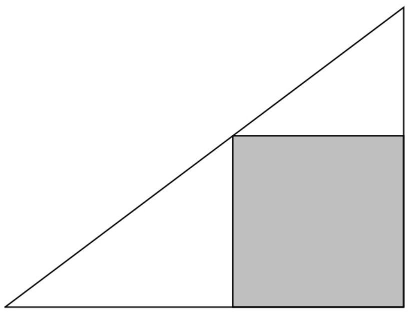
2.5 Trojúhelník TMA má v pořadí vrcholů délky stran 8 cm, 10 cm a 6 cm. V trojúhelníku NOC má strana *o* délku 15 cm. Určete délky zbývajících stran trojúhelníku NOC, jestliže trojúhelníky TMA a NOC jsou podobné.

2.6 Trojúhelník LSD má délky stran 12 cm, 16 cm a 20 cm. Určete délky stran trojúhelníka HIV, který je s trojúhelníkem LSD podobný, je-li poměr podobnosti roven jedné osmině.

2.7 Určete obsah vyšrafovaného čtverce zobrazeného na obr. 17, jestliže délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka jsou 3 j a 4 j.



obr. 16

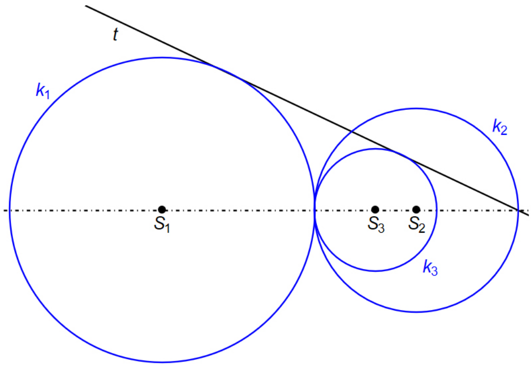


obr. 17

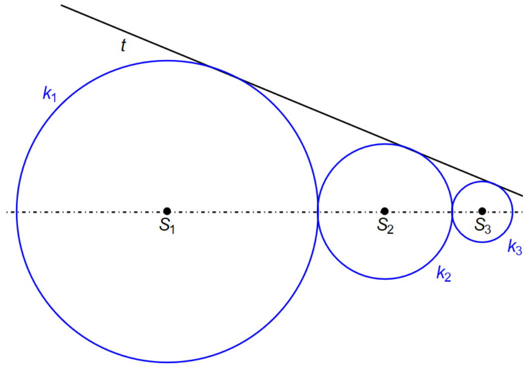
2.8 Na straně SU trojúhelníka SUK leží bod B tak, že $|BU| = 9\ j$. Na straně KU leží bod A tak, že $|AU| = 8\ j$ a $|KA| = 12\ j$. Dále platí $|\sphericalangle KSU| = |\sphericalangle UAB|$. Určete délku úsečky SB.

2.9 Přímka *t* je tečnou kružnic k_1 a k_3. Poloměr kružnice k_1 je 15 j a poloměr kružnice k_2 je 10 j (viz obr. 18). Určete poloměr kružnice k_3.

2.10 Přímka t je společnou tečnou dotýkajících se kružnic k_1, k_2 a k_3 (viz obr. 19). Poloměry kružnic jsou po řadě r_1, r_2 a r_3. Vyjádřete poloměr r_2 v závislosti na poloměrech r_1 a r_3.

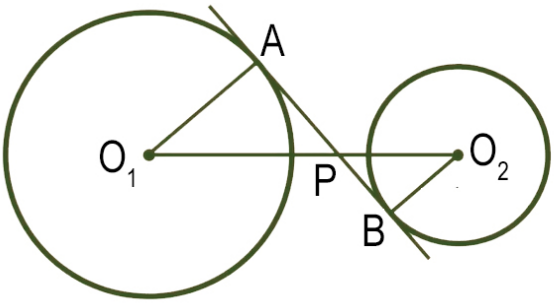


obr. 18

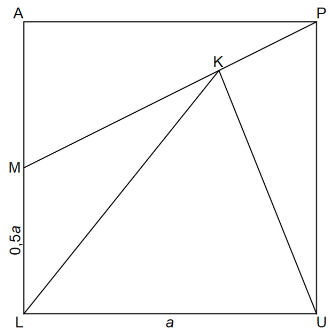


obr. 19

2.11 Větší kružnice zobrazená na obr. 20 má poloměr 24 j, menší 15 j a vzdálenost jejich středů je 52 j. Společná tečna obou kružnic, která se dotýká první kružnice v bodě A a druhé v bodě B, protíná spojnici středů kružnic v bodě P. Jak dlouhé jsou úsečky PO_1 a PO_2?



obr. 20

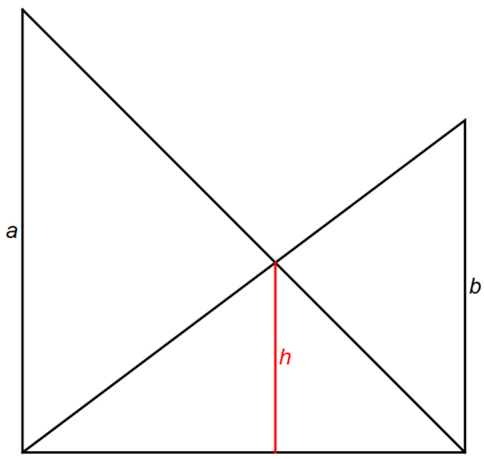


obr. 21

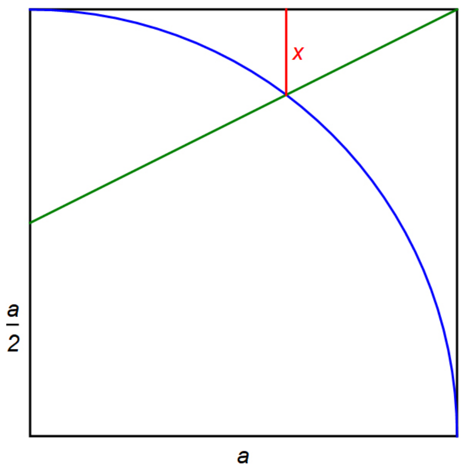
2.12 Určete obsah trojúhelníka LUK zobrazeného na obr. 21, jestliže obsahy trojúhelníků LKM a UPK jsou stejné a délka strany čtverce je 6 j.

2.13 Určete délku úsečky h, je-li $a = 8$ j a $b = 6$ j (viz obr. 22).

2.14 Vypočtěte délku x úsečky v závislosti na délce a strany čtverce (viz obr. 23).



obr. 22



obr. 23

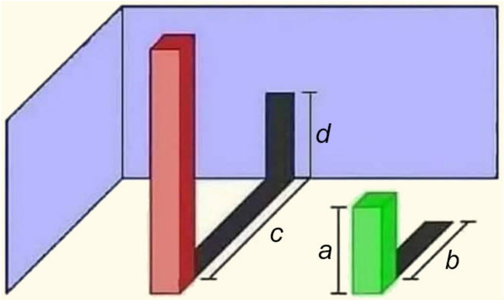
2.15 Určete délku vyššího hranolu (viz obr. 24), jestliže $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 6$ m a $d = 4$ m.

2.16 V trojúhelníku LOM platí: $|LT| = |TO|$ a $|LA| = |AM|$ (viz obr. 25). Dokažte, že trojúhelníky TOK a MAK mají stejné obsahy.

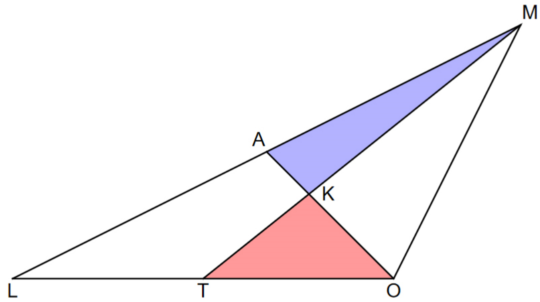
2.17 Obsah každého z malých čtverců umístěných ve vrcholech velkého čtverce zobrazeného na obr. 26 je $5\ \text{j}^2$. Jaký je obsah vyznačeného čtyřúhelníku?

2.18 V lichoběžníku ROTA je délka základny RO 12 cm, délka základny TA 8 cm a délka úsečky RS je 6 cm; bod S je průsečík úhlopříček. Jaká je délka celé úhlopříčky RT?

2.19 Délky stran trojúhelníka JAS jsou (v pořadí vrcholů) 7 cm, 9 cm a 12 cm. Obvod trojúhelníka DEN, který je s trojúhelníkem JAS podobný, je 56 cm. Určete délky stran trojúhelníka DEN.

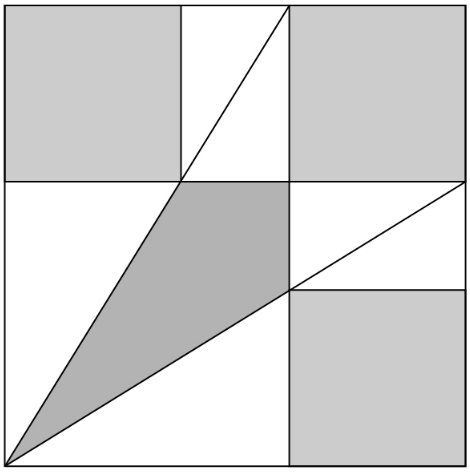


obr. 24

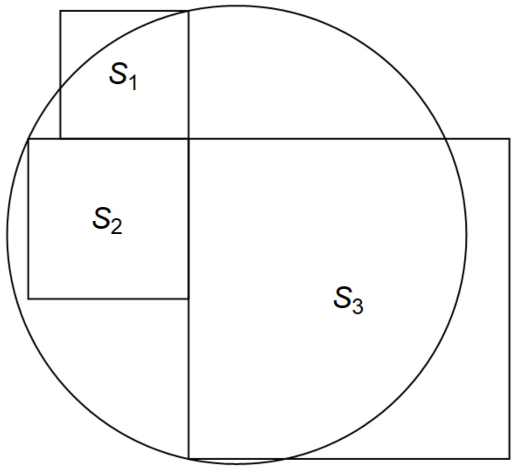


obr. 25

2.20 Pravoúhlý trojúhelník ODS má délky odvěsen 3 cm a 4 cm. Trojúhelník MUF, který je s trojúhelníkem ODS podobný, má obsah $24\ \mathrm{cm}^2$. Určete délku přepony trojúhelníku ODS a délky všech stran trojúhelníku MUF.



obr. 26



obr. 27

2.21 V rovnostranném trojúhelníku BOK je bod L střed strany OK. Z bodu L je spuštěna kolmice na stranu BO a její patou je bod Z. Kolik procent obsahu trojúhelníka BOK tvoří trojúhelník ZLO?

2.22 V trojúhelníku LEM leží bod S ve třetině délky úsečky LE blíže bodu L, bod T leží ve třetině délky úsečky SE blíže bodu S a bod U leží na úsečce EM tak, že platí $|\sphericalangle \mathrm{SME}| = |\sphericalangle \mathrm{TUE}|$. Určete poměr obsahů trojúhelníků: a) LEM a SEM, b) LEM a TEM, c) SEM a TEM, d) LEM a TEU.

2.23 Do rovnoramenného trojúhelníku TAM je vepsán čtverec KUDY tak, že strana KU čtverce leží na základně TA trojúhelníka, bod D leží na straně AM a bod Y leží na straně TM. Délka základny trojúhelníka je 12 cm a výška trojúhelníku na jeho základnu má délku 8 cm. Jaká je délka strany vepsaného čtverce?

2.24 Obsah lichoběžníku PIVO je $48\ \mathrm{cm}^2$, poměr délek jeho základen je $\frac{|\mathrm{PI}|}{|\mathrm{VO}|} = \frac{5}{3}$. Vypočítejte obsah trojúhelníka PIT, kde bod T je průsečík přímek PO a IV.

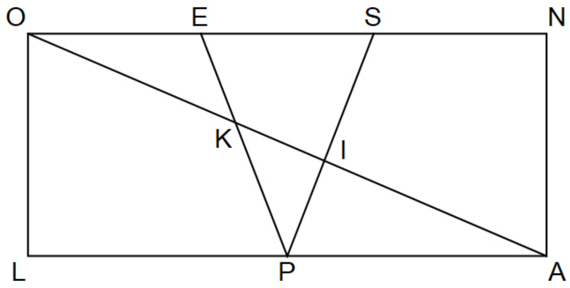
2.25 Úhlopříčky lichoběžníku JARO se základnami JA a RO protnou jeho střední příčku v bodech K a L. Vypočítejte délku úsečky KL, jestliže základny lichoběžníku mají délky 12 cm a 4 cm.

2.26 Rovnoramenný trojúhelník FOK má být rozdělen úsečkou rovnoběžnou s jeho základnou tak, aby vzniklé dva útvary měly stejný obsah. Jak daleko od základny trojúhelníka s délkou 10 cm má být úsečka vedena? Výška na základnu trojúhelníka FOK má délku 12 cm.

2.27 Plocha obdélníka LANO zobrazeného na obr. 28 je $100\ \mathrm{j}^2$ a dále platí: $|\mathrm{LP}| = |\mathrm{PA}|$ a $|\mathrm{OE}| = |\mathrm{ES}| = |\mathrm{SN}|$. Určete obsah trojúhelníka PIK.

2.28 Určete obsah kruhu vyznačeného na obr. 27, jestliže obsahy čtverců jsou $S_1 = 64\ \mathrm{j}^2$, $S_2 = 100\ \mathrm{j}^2$ a $S_3 = 400\ \mathrm{j}^2$.

2.29 Jarda, jehož oči jsou ve výšce 160 cm nad zemí, stojí na vodorovné cestě ve vzdálenosti 20 m od věže vysoké 12 m. Jak daleko od sebe musí Jarda položit na zem zrcátko, aby v něm viděl vrchol věže?



obr. 28

2.30 Podle pravidel silničního provozu mohou potkávací světla auta osvětlovat cestu do vzdálenosti maximálně 30 m od vozidla. Kvůli kontrole dosahu potkávacích světel svého auta zastavil Jarda ve vzdálenosti 2 m od zdi. Potkávací světla jsou na autě ve výšce 60 cm nad zemí. V jaké výšce nad zemí musí Jarda nakreslit na zdi značku, aby mohl zjistit, zda potkávací světla auta svítí správně?

2.31 Parcela ve tvaru trojúhelníka je na plánu v měřítku 1:2500 zakreslena jako trojúhelník se stranami 12 mm, 16 mm a 22 mm. Kolik metrů pletiva je nutné na oplocení této parcely?

2.32 Svislá metrová tyč vrhá stín 125 cm dlouhý. Jak vysoký je sloup, který stojí vedle tyče a který ve stejný okamžik vrhá stín dlouhý 20 m?

2.33 Přímá cesta stoupá na každých 100 m o 25 cm. Na jaké vzdálenosti bude činit výškový nárůst 2,5 m?

2.34 Do stanu ve tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu s délkou podstavné hrany 3 m a výškou 2,5 m má být schován válcový sud. Poměr výšky a průměru sudu je 2:3. Jaké mohou být největší rozměry sudu, aby se do stanu vešel?

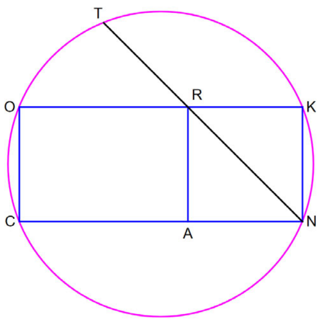
2.35 Rozdělte zadanou úsečku KL bodem W tak, aby platilo a) $|KW|:|WL| = 1:5$, b) $|KW|:|WL| = 5:3$.

2.36 Sestrojte trojúhelník SUD, jestliže je dáno: délka strany d, výška na stranu d a velikost vnitřního úhlu u vrcholu D.

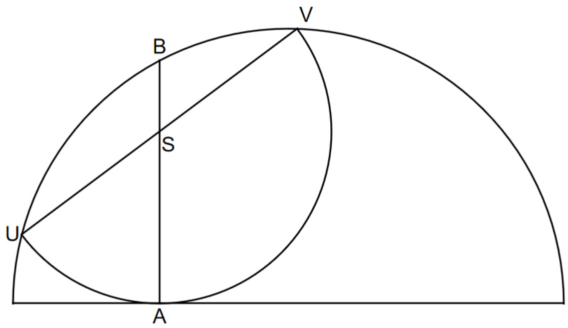
2.37 Sestrojte trojúhelník KUS, jestliže délka strany k je rovna 5 cm, velikost vnitřního úhlu u vrcholu K je $30°$ a délka těžnice na stranu k je 6 cm.

2.38 Sestrojte trojúhelník SAD, jestliže délka strany a je rovna 6 cm, velikost vnitřního úhlu u vrcholu A je $50°$ a délka strany s je rovna 5 cm.

2.39 Sestrojte rovnoběžník DOMA, je-li délka strany d rovna 5 cm, délka strany o rovna 3 cm a velikost úhlu DSO je $\sigma = 135°$. Bod S je průsečíkem úhlopříček daného rovnoběžníku.



obr. 29



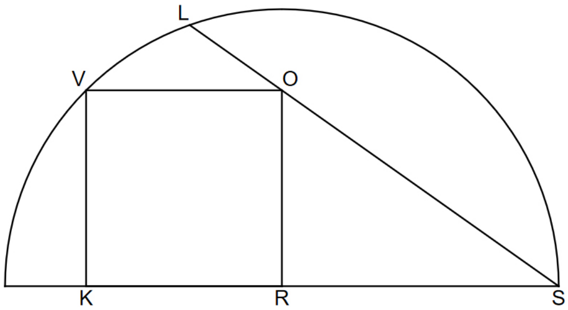
obr. 30

2.40 Určete obvod obdélníka KOCN vepsaného do kružnice (viz obr. 29), jestliže délka úsečky TN je 5 j. Útvar KRAN je čtverec.

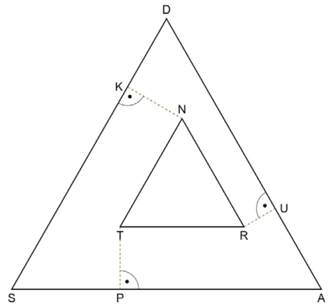
2.41 Určete poměr délek úseček UV a AB zobrazených na obr. 30.

2.42 V kružnici se středem R je narýsován čtverec KROV. Určete poměr délek úseček LO a OS a obsah čtverce KROV v závislosti na délce úsečky LO (viz obr. 31).

2.43 Rovnostranný trojúhelník TRN se sranou délky $\frac{a}{3}$ je umístěn v rovnostranném trojúhelníku SAD se stranou délky a tak, že strana TR je rovnoběžná se stranou SA. Určete součet délek úseček PT, UR a KN.



obr. 31



obr. 32

2.44 V pravoúhlém trojúhelníku KRA s pravým úhlem při vrcholu K je délka úsečky AK rovna 12 j a délka úsečky RA rovna 15 j. Na straně KR leží bod P takový, že úsečka AP dělí úhel RAK na polovinu. Určete délku úsečky AP.

3. Pythagorova věta a Euklidovy věty

3.1 S využitím Pythagorovy věty, Eukleidovy věty o výšce a Eukleidovy věty o odvěsně sestrojte úsečku délky: a) $\sqrt{20}$ j, b) $\sqrt{21}$ j, c) $\sqrt{18}$ j, d) $\sqrt{12}$ j, e) $\sqrt{8}$ j, f) $\sqrt{7}$ j.

3.2 Dřevěná deska ve tvaru obdélníka má délku úhlopříčky 125 cm. Délky stran desky jsou v poměru 2:1. Určete délky stran desky.

3.3 Úhlopříčka televizní obrazovky s poměrem délek stran 16:9 má délku 102 cm. Určete rozměry obrazovky.

3.4 V pravoúhlém trojúhelníku KRB je délka odvěsny BK o 6 jednotek delší než délka odvěsny KR. Přepona RB je o 7 jednotek delší než délka odvěsny KR. Určete délky stran trojúhelníka KRB.

3.5 Vypočítejte délky stěnových úhlopříček kvádru o rozměrech 240 j, 117 j a 44 j (jedná se o tzv. Eulerovu cihlu).

3.6 Zahrada má tvar obdélníka, jehož jedna strana je o 7 metrů delší než druhá. Délka cesty, která vede úhlopříčně přes zahradu, je 13 m. Určete rozměry zahrady.

3.7 Délka strany KL obdélníku KLUS je 16 j a délka strany LU je 12 j. Na straně KL je zvolen bod V a na straně US bod A tak, že útvar VLAS je kosočtverec. Určete délku úsečky VA.

3.8 Úhlopříčka čtverce HLAS má délku $20\sqrt{2}$ j. Na straně HS leží body Y tak, že délka úsečky AY je 25 j. Určete délku úsečky YH.

3.9 Obsah pravoúhlého trojúhelníku je 1944 j^2 a jeho obvod 216 j. Určete délky jeho stran.

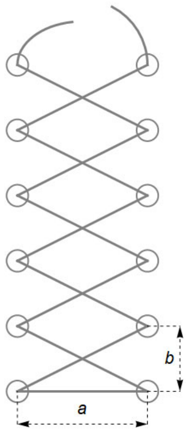
3.10 Běžně používané šněrování tkaniček, které většina z nás používá v botách s tkaničkami, není jediné možné. Způsobů šněrování lze nalézt celou řadu. Určete délky tkaniček pro realizaci šněrování zobrazených na obr. 33 až obr. 37, jestliže $a = 5$ cm a $b = 2$ cm. Na oba konce tkaniček, které jsou nutné na jejich zavázání (a které nemusejí být na obrázcích zobrazeny v měřítku) je přitom potřeba 46 cm délky tkaničky.

3.11 V trojúhelníku HIC s pravým úhlem při vrcholu C je délka strany h 12 cm a délka těžnice na stranu h je 8 cm. Určete délku strany c a délku těžnice na stranu i.

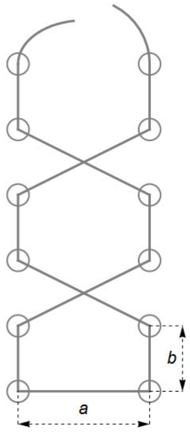
3.12 V pravoúhlém trojúhelníku LES s pravým úhlem u bodu S je na straně LE sestrojen body Y, přičemž platí: $|LS| = 15$ j, $|LY| = 19$ j a $|YE| = 6$ j. Určete obsah trojúhelníka YES.

3.13 Rozhodněte, zda každý trojúhelník, jehož strany mají délky $2n$, $n^2 + 1$ a $n^2 - 1$ (ve vhodných jednotkách) pro libovolné přirozené n větší než 1, je pravoúhlý.

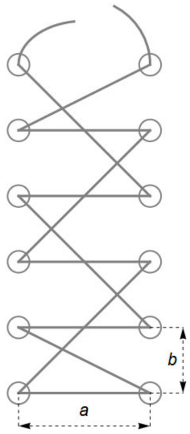
3.14 Rozhodněte, zda trojúhelník, jehož strany mají velikost $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$ a $2uv$ (ve vhodných jednotkách) pro $u, v \in \mathbb{N}$ a současně $u > v$, je pravoúhlý.



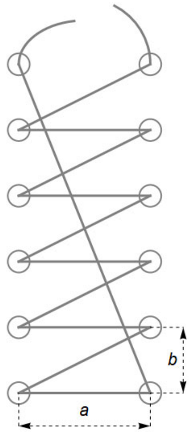
obr. 33



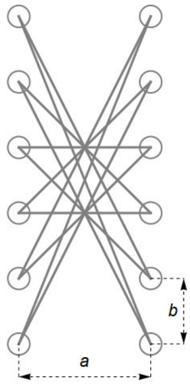
obr. 34



obr. 35



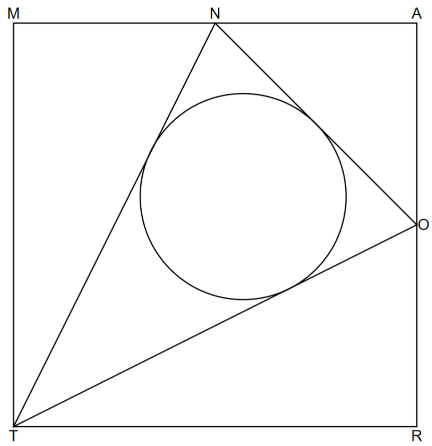
obr. 36



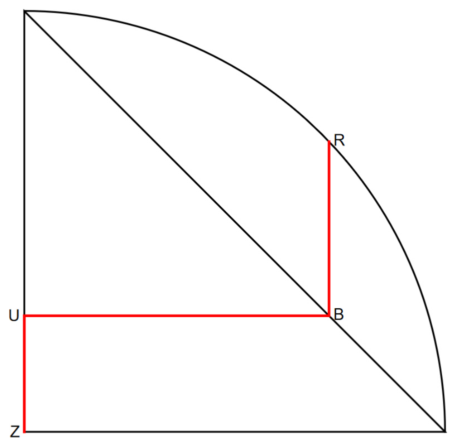
obr. 37

3.15 Ve čtverci TRAM se stranou délky a je sestrojen rovnoramenný trojúhelník TON, přičemž délky úseček RO, OA, AN a NM jsou stejné (viz obr. 38). V trojúhelníku TON je vepsána kružnice. Určete její poloměr.

3.16 Ve čtvrtkružnici je sestrojena lomená čára ZUBR, přičemž její úhly u bodů U a B jsou pravé (viz obr. 39). Délka úsečky UB je b a délka úsečky BR je a. Určete délku úsečky ZU a poloměr kružnice.



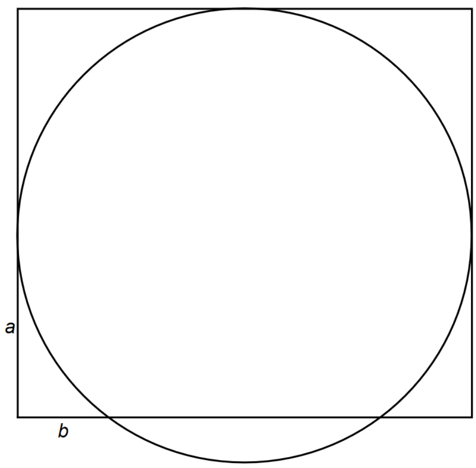
obr. 38



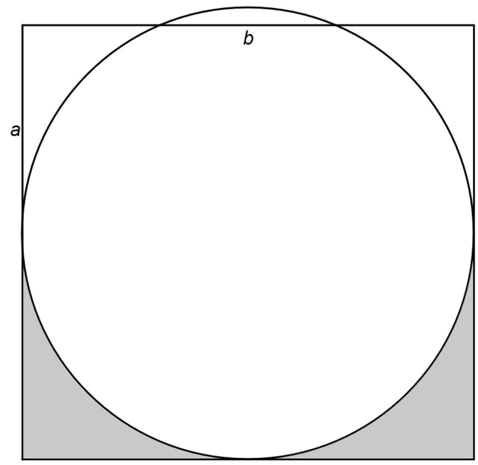
obr. 39

3.17 Určete obsah obdélníka zobrazeného na obr. 40, jestliže a = 4 cm a b = 2 cm.

3.18 Určete rozměry obdélníka na obr. 41, poloměr zobrazené kružnice a obsah vyšrafované části útvaru, jestliže a = 6 j a b = 5 j.



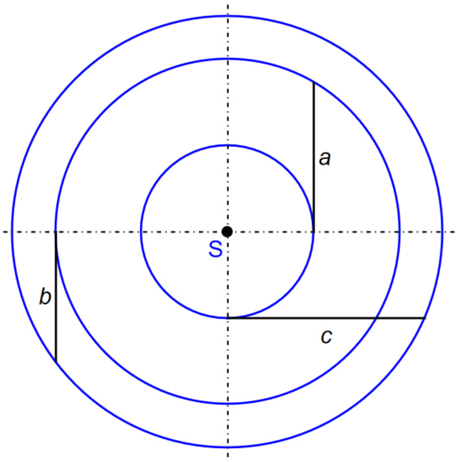
obr. 40



obr. 41

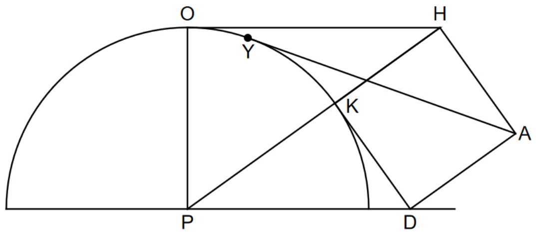
3.19 Pro délky úseček, které jsou sestrojené ve třech soustředných kružnicích, platí: a = 20 j a b = 21 j (viz obr. 42). Určete délku úsečky c.

3.20 Délka úsečky OH je 4 j, délka úsečky YA je 5 j a úsečky OH, YA a KD jsou tečny zobrazené půlkružnice (viz obr. 43). Určete délku strany čtverce DAHK. (Obrázek je ilustrační, nesnažte se ho rýsovat!)

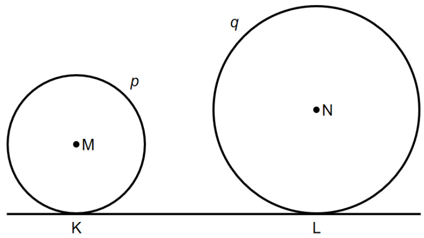


obr. 42

3.21 Určete délku úsečky MN, jestliže poloměry kružnic jsou 8 j a 17 j a délka úsečky KL je 40 j (viz obr. 44). Obrázek není nakreslen ve správném měřítku.



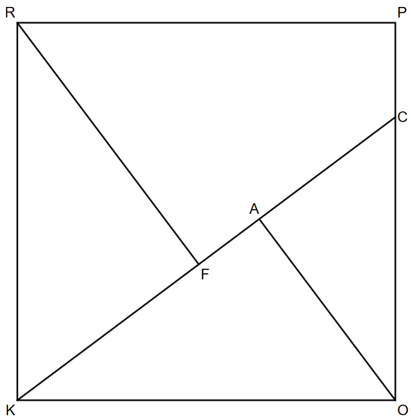
obr. 43



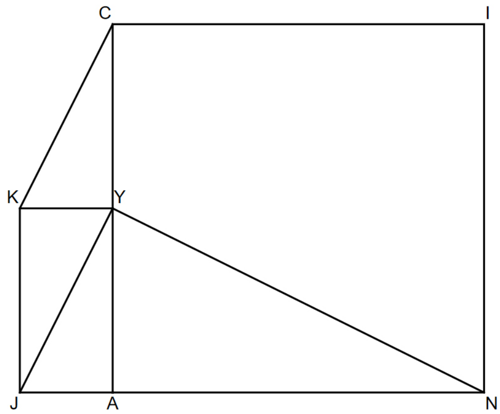
obr. 44

3.22 Ve čtverci KOPR jsou sestrojeny dva pravoúhlé trojúhelníky KFR a OCA (viz obr. 45). Délka úsečky FR je 5 j, délka úsečky OA jsou 4 j. Určete délku strany čtverce.

3.23 Délka strany čtverce ANIC je 16 j, délka úsečky JA jsou 4 jednotky a úhly JYN a KYC jsou pravé (viz obr. 46). Určete délku strany CK.

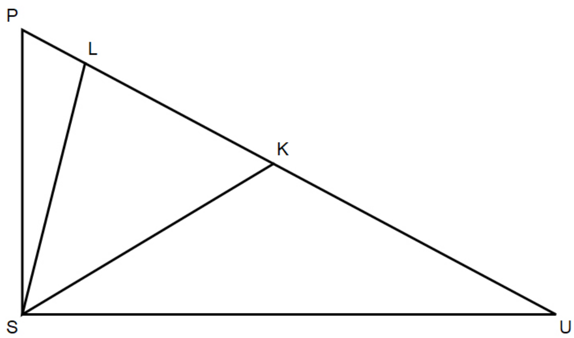


obr. 45

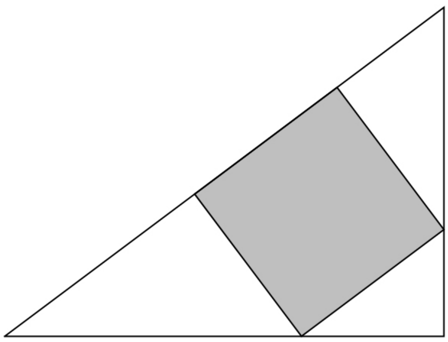


obr. 46

3.24 V kružnici jsou sestrojeny dvě navzájem rovnoběžné tětivy o délkách 14 cm a 18 cm, jejichž vzájemná vzdálenost (měřená přes střed kružnice) je 8 cm. Určete poloměr kružnice.



obr. 47

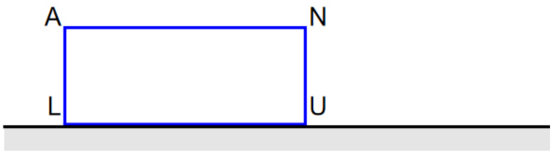


obr. 48

3.25 V pravoúhlém trojúhelníku SUP (viz obr. 47) je dáno: $|SU| = 15\ \text{j}$, $|SP| = 8\ \text{j}$, $|UK| = 9\ \text{j}$ a $|KL| = 6\ \text{j}$. Vypočítejte velikost úhlu KSL.

3.26 Do pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délek 3 j a 4 j je vepsán čtverec tak, jak je zobrazeno na obr. 48. Určete délku jeho strany.

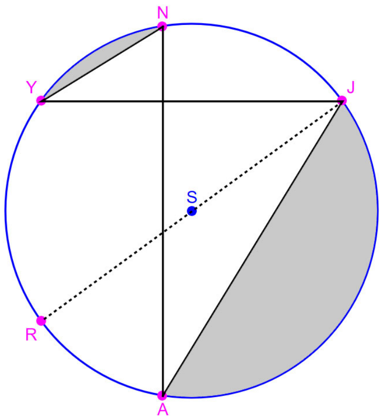
3.27 Obdélník LUNA o rozměrech 12 j a 5 j je položen na vodorovné podložce podle obr. 49. Tento obdélník se začne valit tak, že se začne otáčet kolem bodu U. Jakou dráhu urazí bod A během takového valení, než se octne podruhé na podložce (tj. pozici bodu U v počáteční poloze obdélníka)?



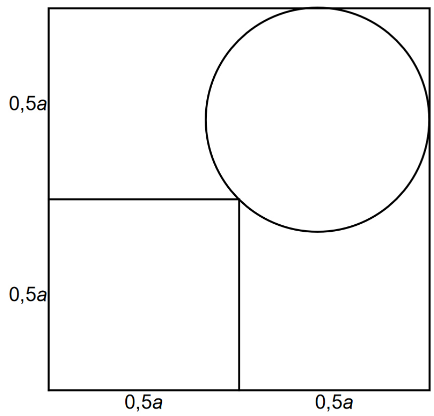
obr. 49

3.28 Určete obsah vyšrafované oblasti zobrazené na obr. 50, jestliže délka úsečky YN jsou 4 j a délka úsečky JA je 8 j. Úsečky NA a JY jsou navzájem kolmé.

3.29 Určete poloměr kružnice vepsané podle obr. 51 do čtverce se stranou délky a.



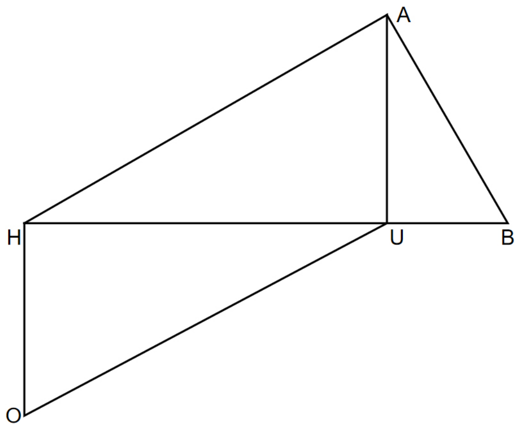
obr. 50



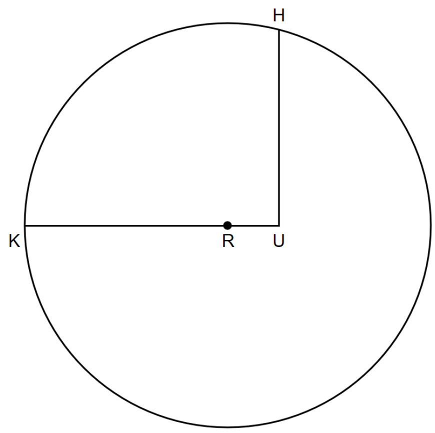
obr. 51

3.30 V útvaru zobrazeném na obr. 52 platí: $|HO| = 8\ \text{j}$, $|OU| = 17\ \text{j}$ a $|UB| = 5\ \text{j}$. Úhly OHU, HUA a HAB jsou pravé. Určete délku úsečky HA.

3.31 Určete poloměr kružnice se středem R, která je zobrazená na obr. 53. Délka úsečky KU je 10 j a délka úsečky UH je 5 j.



obr. 52



obr. 53

3.32 Spodní kružnice o poloměru 2 j válce o výšce 5 j zobrazeného na obr. 54 zůstává nehybná, horní kružnice se otočila o $90°$. Jaká je po tomto otočení vzdálenost obou kružnic (podstav válce)? Spojnice jednotlivých bodů jsou úsečky konstantních délek.

3.33 Určete obsah pravoúhlého trojúhelníka DEN s pravým úhlem při vrcholu E, jestliže: $e = 13$ j a $d + n = 17$ j.

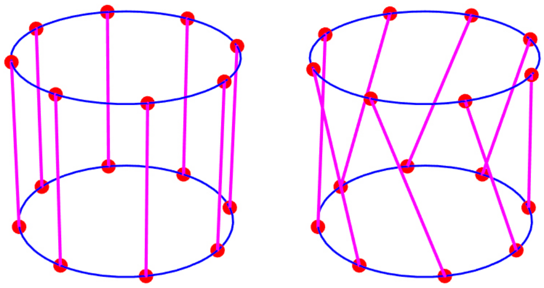
3.34 Délky stran trojúhelníka SRP jsou $s = 5$ j, $r = 7$ j a $p = 6$ j. Bod K je patou kolmice spuštěné z bodu P. Určete délku úsečky SK.

3.35 Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru 10 cm, víte-li, že tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru $2:3$.

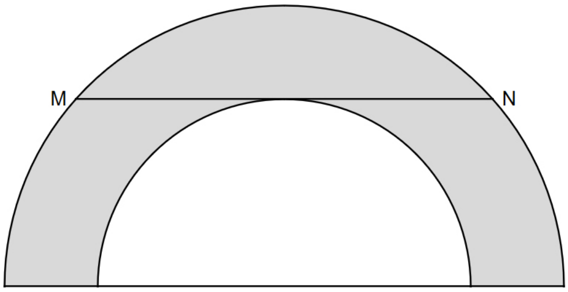
3.36 V kružnici o poloměru *r* je vedena sečna ve vzdálenosti *b* od středu kružnice. Určete délku tětivy, kterou sečna na kružnici vytíná.

3.37 Určete poloměry kružnice vepsané a opsané čtverci, jehož strana má délku *a*.

3.38 Určete obsah vyšrafovaného útvaru, který je ohraničen polovinami dvou soustředných kružnic, jestliže délka úsečky MN je 20 j (viz obr. 55).



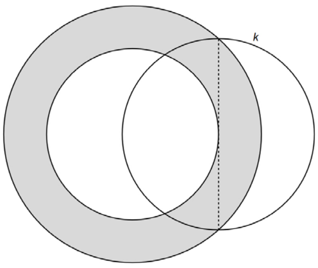
obr. 54



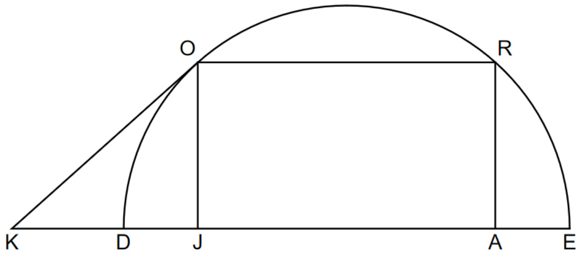
obr. 55

3.39 Obsah mezikruží zobrazeného na obr. 56 je $70\ \mathrm{j}^2$. Určete obsah kružnice *k*.

3.40 Určete rozměry obdélníka JARO vepsaného do polokružnice (viz obr. 57), jestliže délka úsečky KD jsou 3 j a délka úsečky AE jsou 2 j.



obr. 56



obr. 57

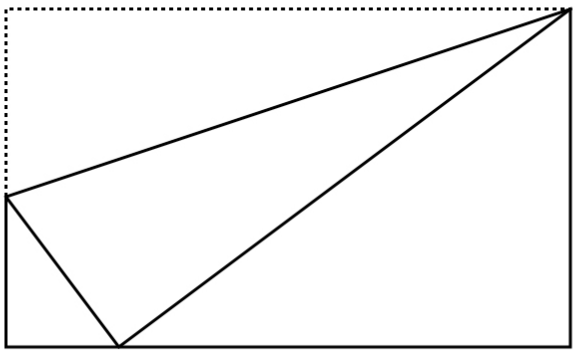
3.41 Pravidelný šestiúhelník je vepsán do kružnice o poloměru *r*. Určete obvod a obsah tohoto šestiúhelníku.

3.42 Pravidelný šestiúhelník je opsán kružnici o poloměru *r*. Určete obvod a obsah tohoto šestiúhelníku.

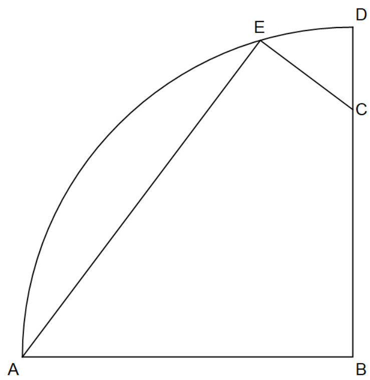
3.43 Železniční most má délku *l*. Konstrukce mostu je ohraničena kružnicí o poloměru *r*. Jak vysoko nad železnicí je nejvyšší bod konstrukce?

3.44 Obdélníkový papír o rozměrech 15 cm a 9 cm byl přeložen tak, jak je zobrazeno na obr. 58. Určete délku hrany, podél níž byl papír přeložen.

3.45 Podle obr. 59 platí: $|\mathrm{AE}| = 24\ \mathrm{j}$, $|\mathrm{EC}| = 7\ \mathrm{j}$ a úhel při bodu E je pravý. Určete poloměr zobrazené čtvrtkružnice a délku úsečky BC.



obr. 58

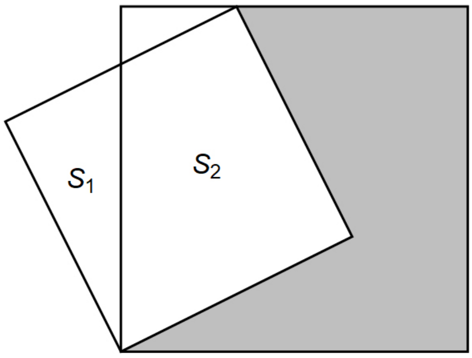


obr. 59

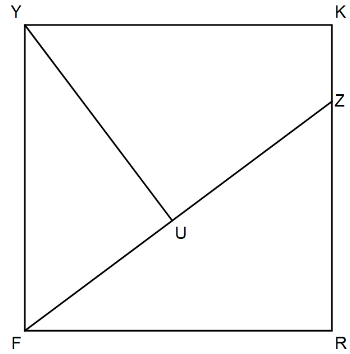
3.46 V trojúhelníku PUK platí: $|\mathrm{PK}| = 18\ \mathrm{cm}$, $|\mathrm{KU}| = 30\ \mathrm{cm}$ a $|\sphericalangle \mathrm{KPU}| = 2|\sphericalangle \mathrm{PUK}|$. Určete obsah trojúhelníka PUK.

3.47 V pravoúhlém trojúhelníku VRT s pravým úhlem při vrcholu R je na stranu *r*, která má délku 10 j, spuštěna těžnice. Jak je tato těžnice dlouhá?

3.48 Do rovnoramenného trojúhelníka s délkou ramen *a* je vepsána kružnice. Určete její poloměr.



obr. 60



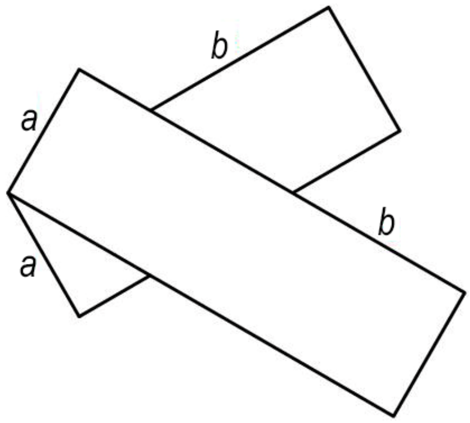
obr. 61

3.49 Určete obsah vyšrafovaného obrazce zobrazeného na obr. 60, jestliže $S_1 = 1\ \mathrm{j}^2$ a $S_1 = 3\ \mathrm{j}^2$. Strana malého čtverce protíná stranu velkého čtverce ve svém středu.

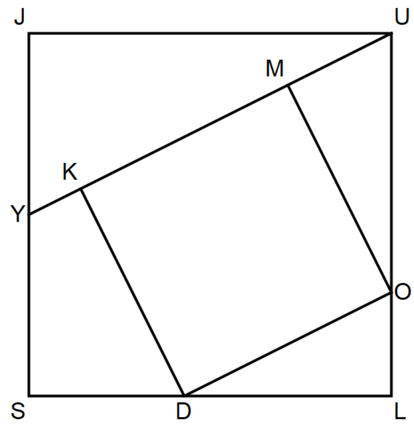
3.50 Délka strany čtverce FRKY (viz obr. 61) je 20 j a délka úsečky FZ je 25 j. Určete délku úsečky UY.

3.51 Obdélníkový proužek papíru šířky *a* = 4 cm je třemi sklady přeložen do pravidelné „mašličky“ zobrazené na obr. 62. Určete délku proužku papíru, jestliže *b* = 6 cm.

3.52 Ve čtverci SLUJ zobrazeném na obr. 63 platí: $|\mathrm{SD}| = 3\ \mathrm{j}$ a $|\mathrm{DL}| = 4\ \mathrm{j}$. Určete délku úsečky JY. Útvar DOMK je čtverec.

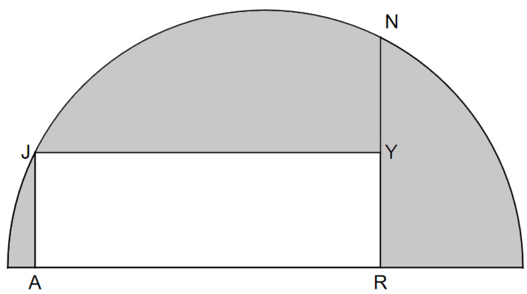


obr. 62

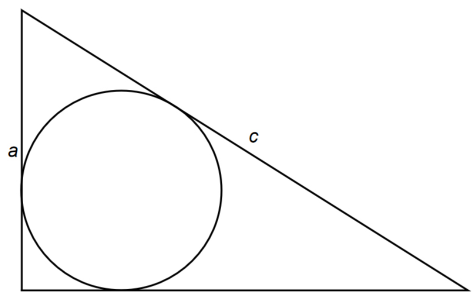


obr. 63

3.53 Určete obsah vyšrafované části polokruhu zobrazeného na obr. 64, je-li dáno: $|\mathrm{AR}| = 6\ \mathrm{j}$ a $|\mathrm{RY}| = |\mathrm{YN}| = 2\ \mathrm{j}$.



obr. 64

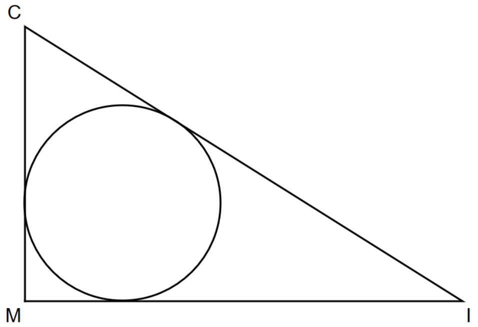


obr. 65

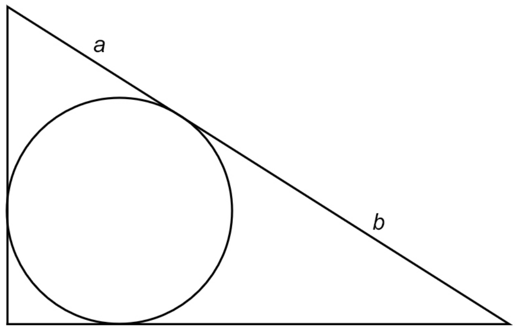
3.54 V pravoúhlém trojúhelníku platí: *a* = 8 j a *c* = 17 j. Určete poloměr kružnice zobrazené na obr. 65.

3.55 Do pravoúhlého trojúhelníku MIC, jehož strana MI je dlouhá 40 j, je vepsána kružnice o poloměru 4 j (viz obr. 66). Určete délky zbývajících stran trojúhelníka.

3.56 Určete obsah trojúhelníku zobrazeného na obr. 67, jestliže *a* = 3 j a *b* = 5 j.



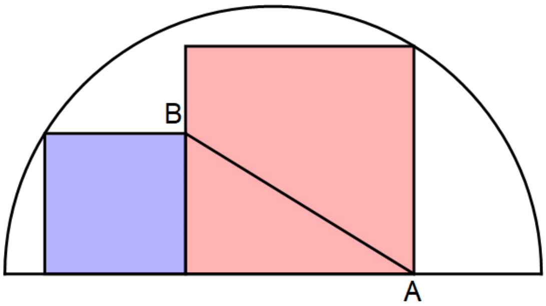
obr. 66



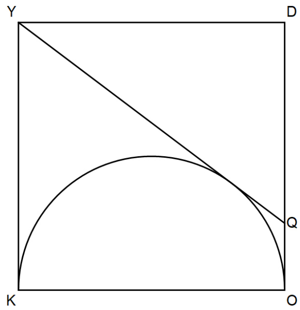
obr. 67

3.57 Určete poloměr kružnice, do jejíž poloviny jsou vepsány dva čtverce (viz obr. 68). Délka úsečky AB je 2 j.

3.58 Do čtverce KODY, jehož strana má délku a, je vepsána polokružnice dle obr. 69. Určete délku úsečky QY, která leží na tečně vepsané polokružnice.



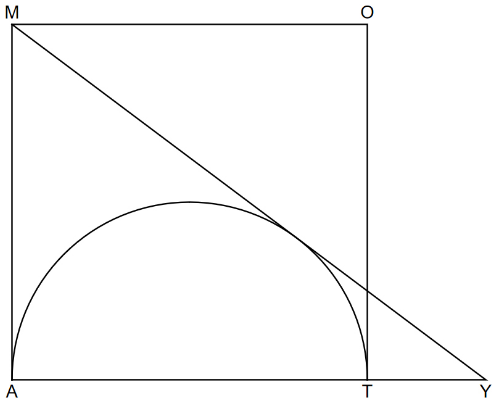
obr. 68



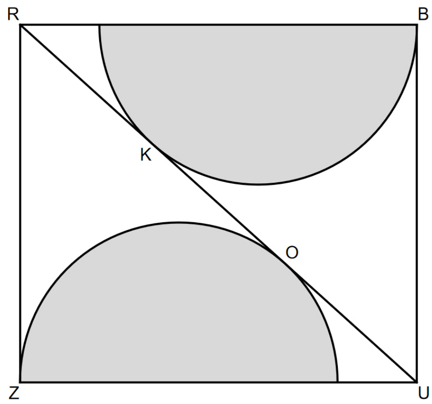
obr. 69

3.59 Ve čtverci ATOM se stranou délky u je sestrojena půlkružnice a její tečna MY (viz obr. 70). Určete poměr délky úsečky TY a délky poloměru sestrojené kružnice.

3.60 Určete součet obsahů vyšrafovaných polokruhů (viz obr. 71), jestliže délka strany čtverce ZUBR je 5 j a dále platí $|RK| = |KO| = |OU|$.



obr. 70



obr. 71

3.61 Jaká je délka strany vyšrafovaného čtverce zobrazeného na obr. 72, je-li délka strany většího čtverce a?

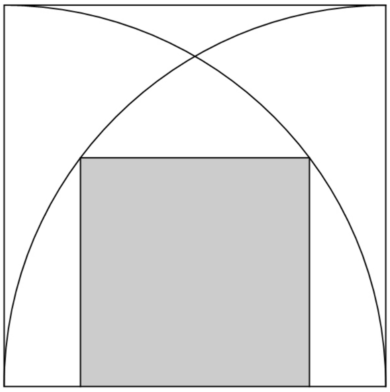
3.62 Do čtvrtkružnice o poloměru $r = \sqrt{5}$ j je vepsán čtverec (viz obr. 73). Určete obsah tohoto čtverce.

3.63 Jaký je poloměr vyšrafovaného kruhu vepsaného do čtvrtkružnice (viz obr. 74)? Rozměry obdélníka jsou a = 3 j a b = 4 j.

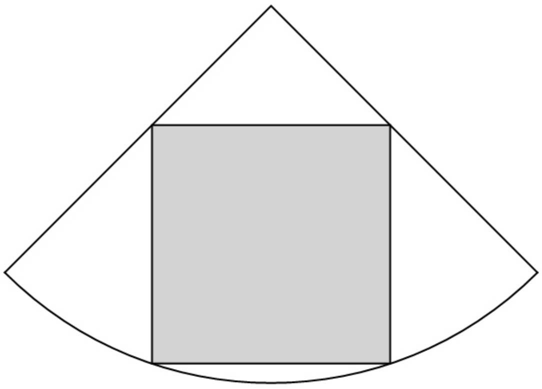
3.64 Určete poloměr vyšrafovaného kruhu zobrazeného na obr. 75. Délka strany čtverce je a.

3.65 Délka strany čtverce TRAM je 8 j. Určete obvod a obsah trojúhelníka TRK, jestliže bod K je středem zobrazené kružnice (viz obr. 76).

3.66 Určete poloměr malých kružnic zobrazených na obr. 78, je-li poloměr velké kružnice r.

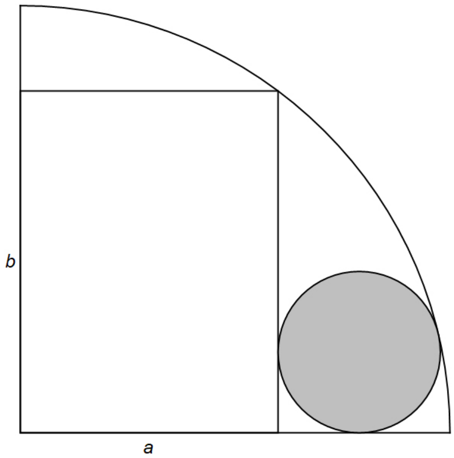


obr. 72

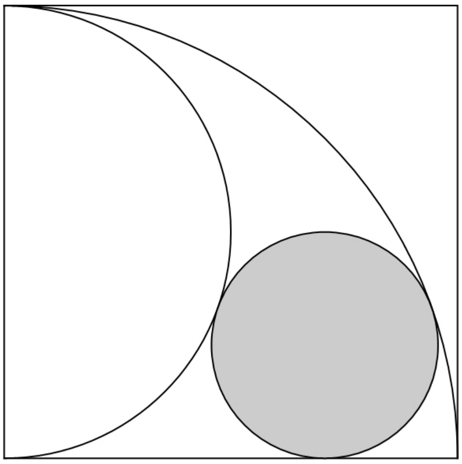


obr. 73

3.67 Určete poloměr nejmenší kružnice zobrazené na obr. 79, jestliže poloměry ostatních dvou kružnic jsou 2 j a 4 j.

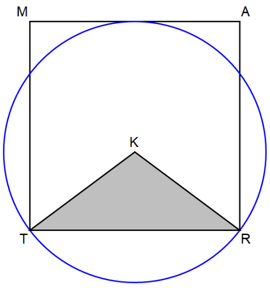


obr. 74

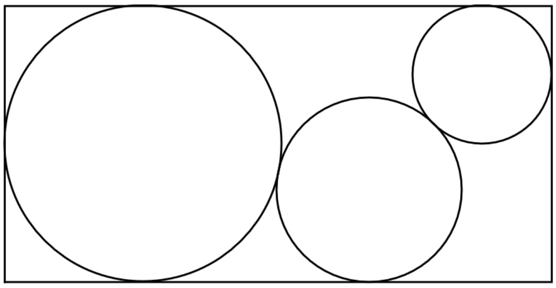


obr. 75

3.68 Do obdélníka jsou vepsány kružnice o poloměrech 3 j, 2 j a 1,5 j podle obr. 77. Určete obsah obdélníka.

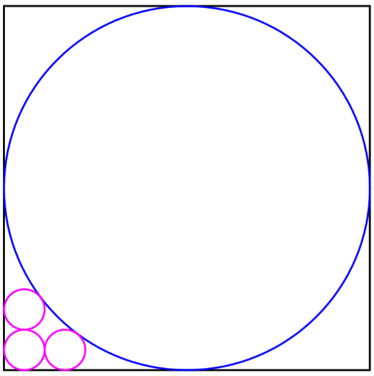


obr. 76

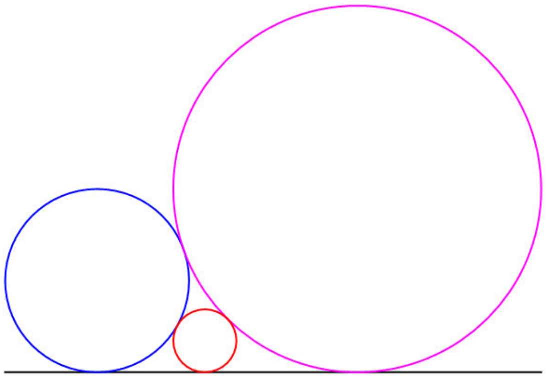


obr. 77

3.69 Poloměr kružnice k_1 zobrazené na obr. 80 je r. Vyznačené body tvoří středy zakreslených kružnic. Vypočítejte poloměr kružnic k_2 a k_3.

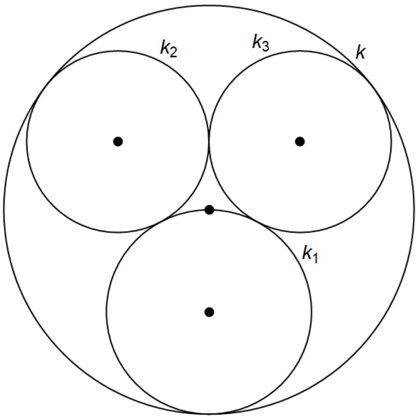


obr. 78

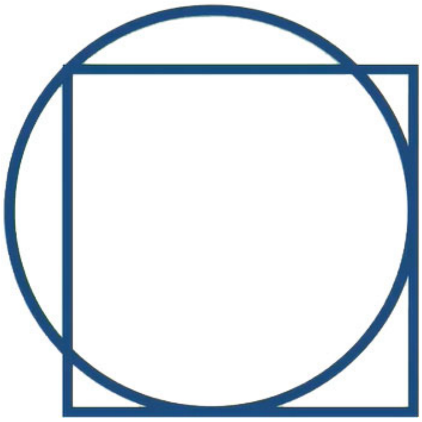


obr. 79

3.70 Jaká je délka strany čtverce zobrazeného na obr. 81, jestliže poloměr zobrazené kružnice je r.



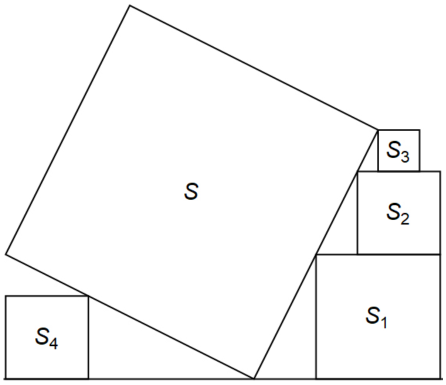
obr. 80



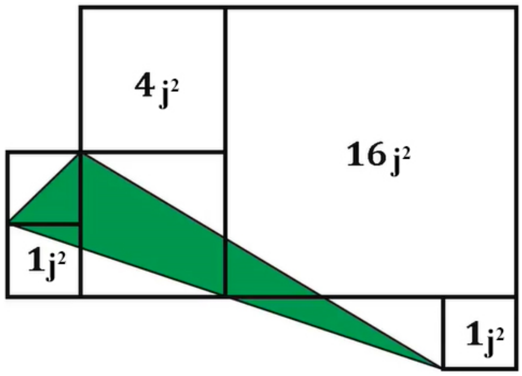
obr. 81

3.71 Určete obsah S velkého čtverce zobrazeného na obr. 82, mají-li malé čtverce obsahy $S_1 = 27\ \text{j}^2$, $S_2 = S_4 = 12\ \text{j}^2$ a $S_3 = 3\ \text{j}^2$.

3.72 Určete obsah vyšrafovaného trojúhelníka zobrazeného na obr. 83.



obr. 82



obr. 83

3.73 Do rovnoramenného lichoběžníku je vepsána kružnice (viz obr. 84). Určete jeho obsah, je-li $a = 18$ j a $b = 8$ j.

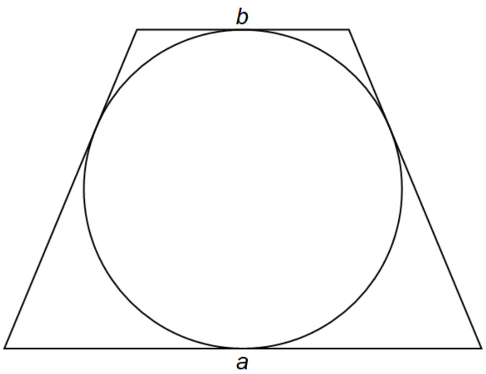
3.74 Ve čtyřúhelníku PUMA platí: $|\text{PU}| = 7\sqrt{2}$ j, $|\text{UM}| = 4$ j, $|\text{MA}| = 3$ j a $|\sphericalangle \text{APU}| = |\sphericalangle \text{PUM}| = 45°$. Určete délku strany PA.

3.75 Ve čtyřúhelníku KUNA platí: $|\text{KU}| = 7\sqrt{2}$ j, $|\text{UN}| = 4$ j, $|\text{AK}| = 3$ j a $|\sphericalangle \text{AKU}| = |\sphericalangle \text{KUN}| = 45°$. Určete délku strany NA.

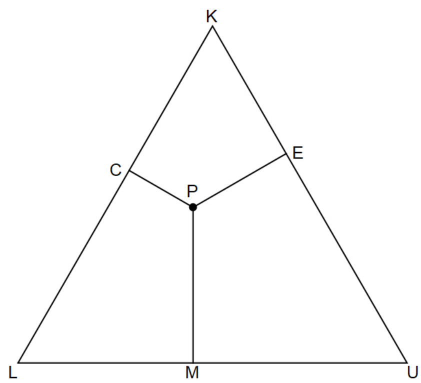
3.76 V rovnostranném trojúhelníku LUK zobrazeném na obr. 85 je $|\text{CK}| = 7$ cm, $|\text{LM}| = 8$ cm a $|\text{UE}| = 10$ cm. Úsečky PM, PE a PC jsou kolmé na příslušné strany. Určete délku strany trojúhelníka.

3.77 V pravoúhlém trojúhelníku je délka přepony 26 cm. Jak dlouhé úseky vytíná na přeponě výška na tuto přeponu dlouhá 12 cm?

3.78 Výška pravoúhlého trojúhelníku dělí přeponu na dva úseky o délkách 4 cm a 6 cm. Určete délky stran tohoto trojúhelníku a délku výšky na přeponu.



obr. 84



obr. 85

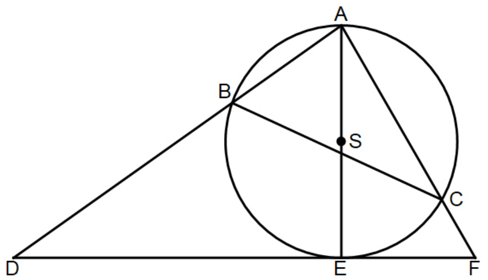
3.79 Délky dvou kratších stran zahrady ve tvaru pravoúhlého trojúhelníku mají délky 120 m a 50 m. Jakou délku má třetí strana zahrady? Jak dlouhá je kolmice vedená k nejdelší straně zahrady z protilehlého vrcholu?

3.80 Je dána kružnice $k(\mathrm{S}; 4\ \mathrm{cm})$ a bod A, pro který platí $|\mathrm{AS}| = 10\ \mathrm{cm}$. Vypočítejte vzdálenost bodu A od spojnice bodů dotyku tečen vedených z bodu A ke kružnici *k*.

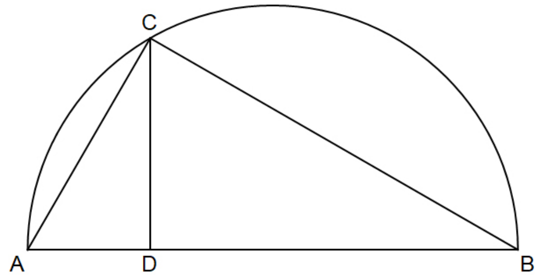
3.81 Je dána kružnice *k* se středem S a poloměrem 2 j. Úsečka AP, která prochází bodem P kružnice *k* a která leží na tečně této kružnice, má délku 3 j. Bod C je koncový bod průměru PC kružnice *k*. Úsečka AC protíná kružnici *k* v bodě B. Jak dlouhá je úsečka BC?

3.82 Na obr. 86 je zobrazena kružnice a její tečna DF. Určete poloměr kružnice, délku úsečky CF, délku úsečky DE a velikost úhlu EAF, jestliže $|\mathrm{AB}| = 4\ \mathrm{cm}$, $|\mathrm{BD}| = 8\ \mathrm{cm}$ a $|\mathrm{AC}| = 6\ \mathrm{cm}$.

3.83 Obsah trojúhelníka ADC zobrazeného na obr. 87 je $7\ \mathrm{j}^2$ a obsah trojúhelníku BDC je $28\ \mathrm{j}^2$. Určete obvod a obsah poloviny kruhu, na jehož průměru leží jedna strana každého trojúhelníka.



obr. 86



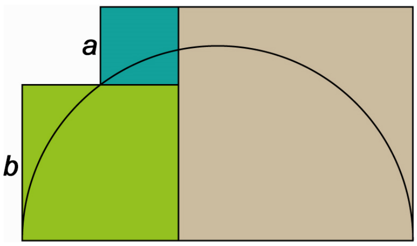
obr. 87

3.84 Podle obr. 90 platí: $|\mathrm{AE}| = 8\ \mathrm{j}$, $|\mathrm{EB}| = 2\ \mathrm{j}$ a body E a D leží na kolmici k úsečce AB. Určete délku úsečky PQ.

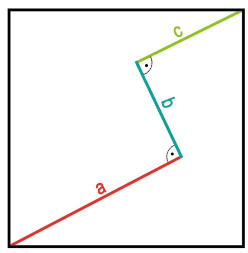
3.85 Určete délky stran všech tří čtverců zobrazených na obr. 88. Průměr zobrazené kružnice je *d*.

3.86 Určete délku strany čtverce zobrazeného na obr. 89.

3.87 Ve čtverci o straně délky 10 j je narýsována kružnice (viz obr. 91). Délky vyznačených úseček jsou *a* = *b* = 6 j a *c* = 8 j. Určete poloměr kružnice.

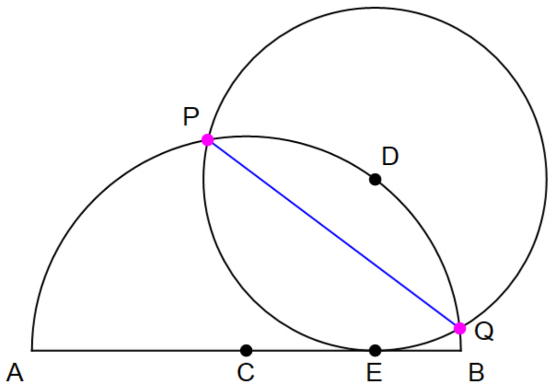


obr. 88

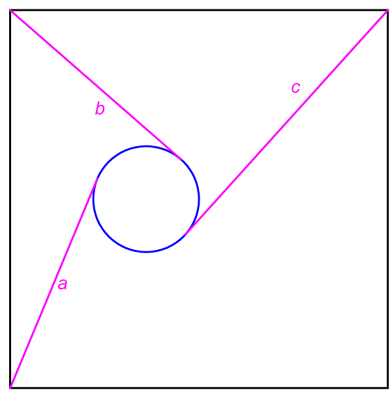


obr. 89

3.88 Délka úsečky KO na obr. 92 je 2 j, délka úsečky OT je 5 j a délka úsečky TE je 3 j. Určete délku strany čtverce ZUBR.

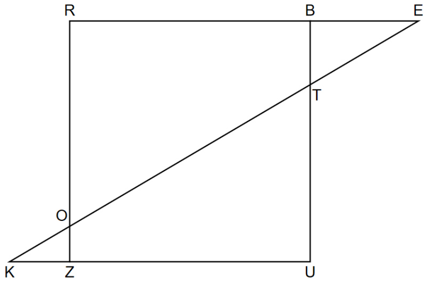


obr. 90

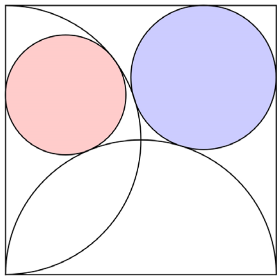


obr. 91

3.89 Určete poměr poloměrů větší a menší vyšrafované kružnice na obr. 93. Délka strany čtverce je *a*.



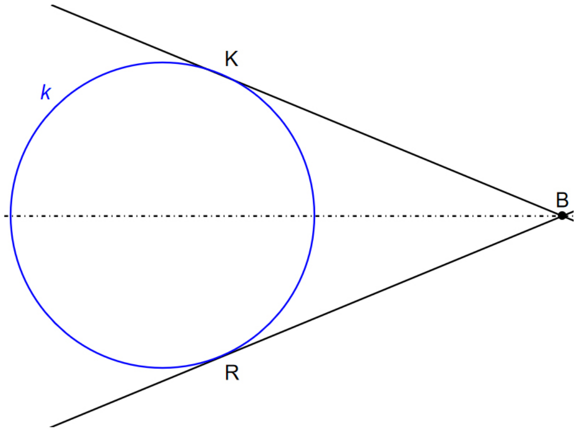
obr. 92



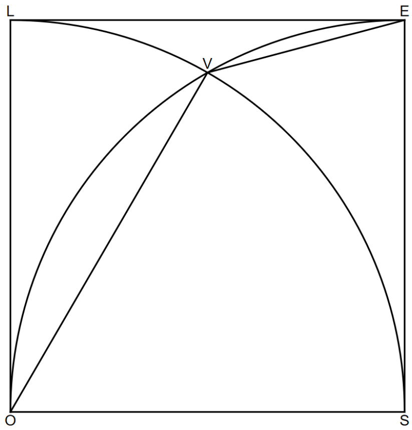
obr. 93

3.90 Určete délku úsečky KB, jestliže přímka KB (resp. RB) je tečnou kružnice *k* o poloměru 30 j (viz obr. 94). Délka úsečky KR, která spojuje body dotyku tečen a kružnice, má délku 48 j.

3.91 Ve čtverci OSEL se stranou délky *a* jsou sestrojeny dvě čtvrtkružnice, které se protínají v bodě V (viz obr. 95). Určete poměr délek úseček VE a OV.



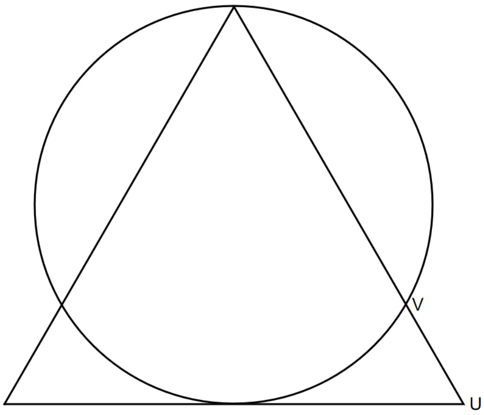
obr. 94



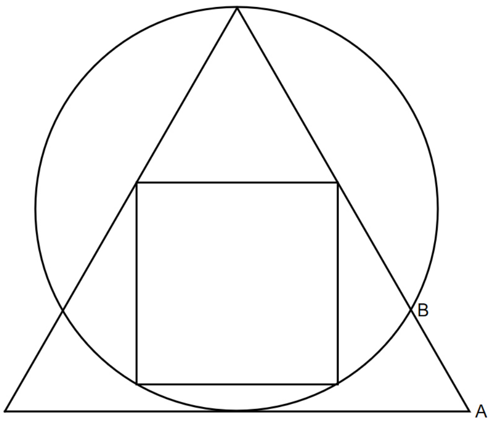
obr. 95

3.92 Určete poloměr kružnice, jestliže zobrazený trojúhelník je rovnostranný a délka úsečky UV je rovna *b* (viz obr. 96).

3.93 Určete obsah čtverce, jestliže zobrazený trojúhelník je rovnostranný a délka úsečky AB je rovna *a* (viz obr. 97).



obr. 96



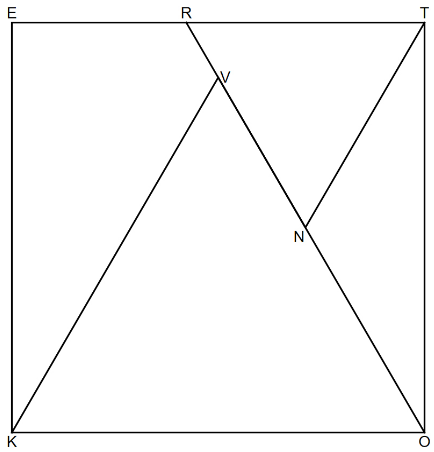
obr. 97

3.94 Ve čtverci KOTE jsou sestrojeny dva rovnostranné trojúhelníky KOV a TRN (viz obr. 98). Délka úsečky RV je 1 j. Určete délku úsečky VN a délku strany čtverce.

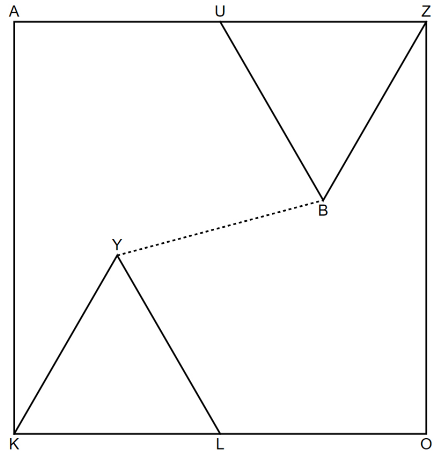
3.95 Ve čtverci KOZA jsou sestrojeny dva rovnostranné trojúhelníky KLY a ZUB se stranou délky rovné polovině délky strany čtverce (viz obr. 99). Délka úsečky YB je $\sqrt{2}$ j. Určete délku strany čtverce.

3.96 Ve výšce *h* nad povrchem Země, která má tvar koule o poloměru *r*, obíhá družice. Určete vzdálenost družice od místa na povrchu Země, z něhož by bylo možné pozorovat družici právě na horizontu. Jaká je výška kulového vrchlíku Země, který je možné z družice pozorovat?

3.97 Jaká část největšího kruhu o poloměru *r* (viz obr. 100) je vyšrafována?

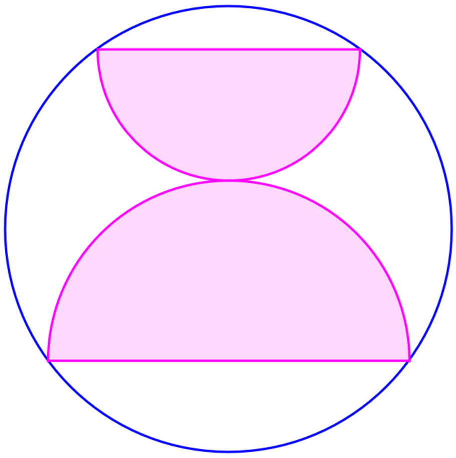


obr. 98

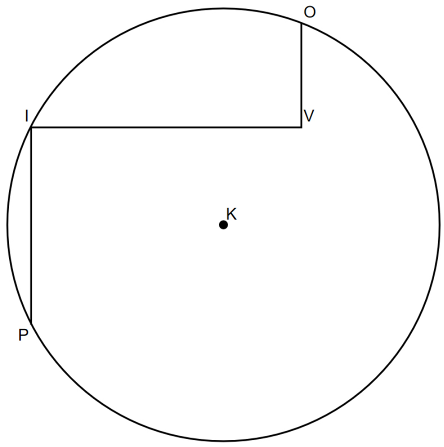


obr. 99

3.98 Určete poloměr kružnice se středem K zobrazené na obr. 101, jestliže $|PI| = 4$ j, $|IV| = 6$ j a $|VO| = 2$ j.



obr. 100

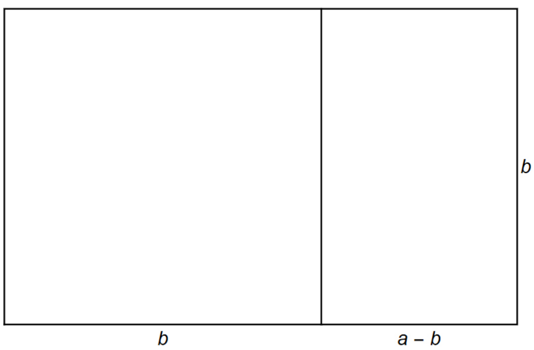


obr. 101

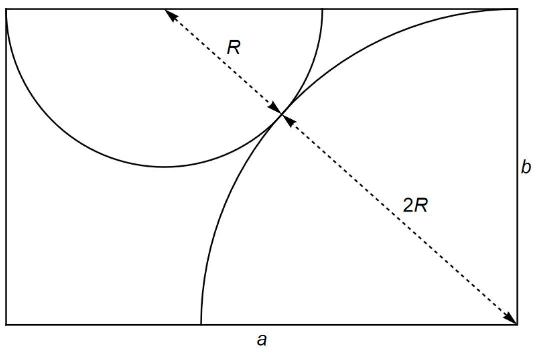
4. Zlatý řez

4.1 V obdélníku s délkami stran a a b je sestrojen čtverec (viz obr. 102) tak, že původní obdélník a nově vytvořený obdélník jsou podobné. Dokažte, že platí $\frac{a}{b} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.

4.2 V obdélníku s délkami stran a a b jsou sestrojeny polokružnice a čtvrtkružnice (viz obr. 103). Dokažte, že platí $\frac{a}{b} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.



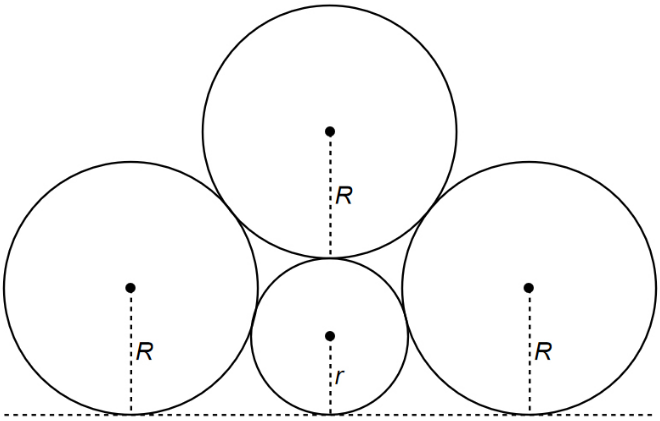
obr. 102



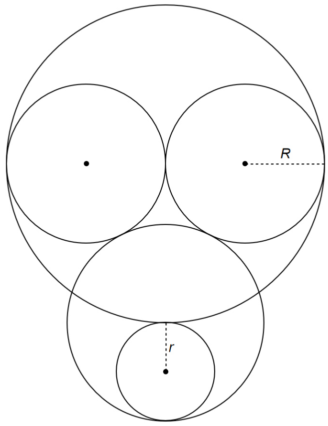
obr. 103

4.3 Dokažte, že pro poloměry r a R kružnic zobrazených na obr. 104 platí: $\frac{R}{r} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.

4.4 Dokažte, že pro poloměry r a R kružnic zobrazených na obr. 105 platí: $\frac{R}{r} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez. Střed kružnice s poloměrem r leží na největší kružnici.



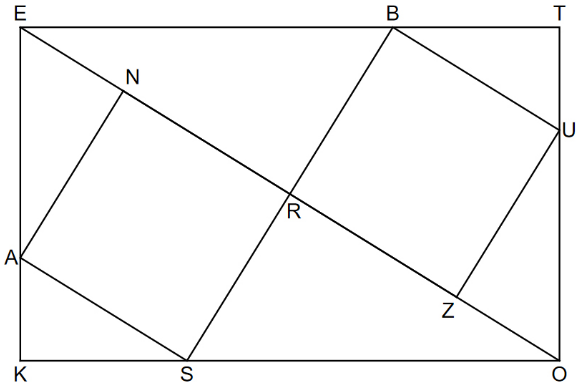
obr. 104



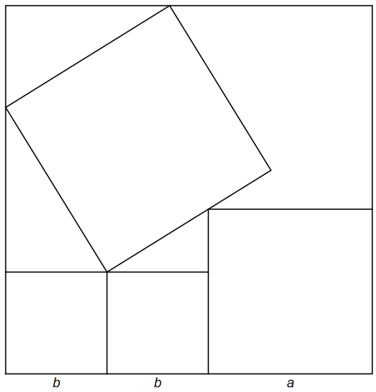
obr. 105

4.5 V obdélníku KOTE jsou vepsány čtverce ZUBR a SRNA (viz obr. 106). Dokažte, že platí: $\frac{|RO|}{|ZU|} = \frac{|RE|}{|NA|} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.

4.6 Dokažte, že pro délky stran a a b čtverců zobrazených na obr. 107 platí: $\frac{a}{b} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez. Všechny pravoúhelníky zobrazené na obrázku jsou čtverce.

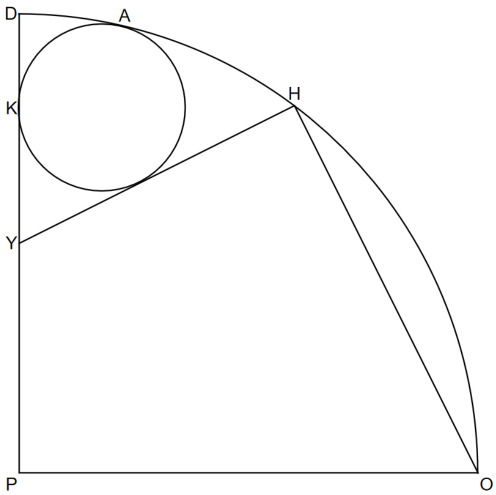


obr. 106

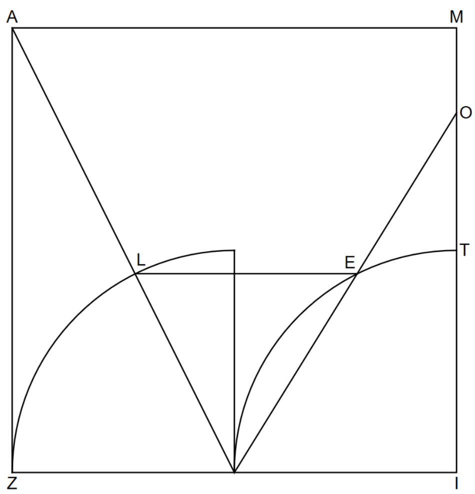


obr. 107

4.7 Dokažte, že pro délku úsečky KY a poloměr r na obr. 108 zobrazené kružnice platí: $\frac{|KY|}{r} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez. Délky úseček DY a YP jsou stejné a úhel YHO je pravý.



obr. 108

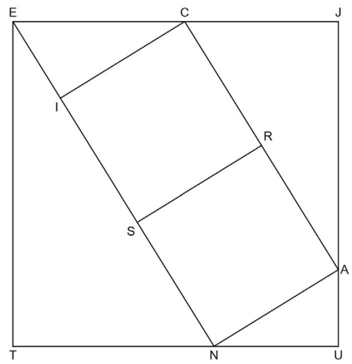


obr. 109

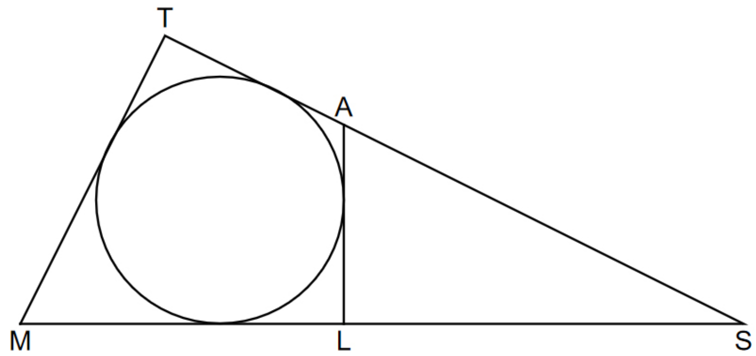
4.8 Ve čtverci ZIMA jsou sestrojeny dvě stejné čtvrtkružnice (viz obr. 109). Úsečky ZI a LE jsou navzájem rovnoběžné. Dokažte, že platí: $\frac{|IT|}{|TO|} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.

4.9 Ve čtverci TUJE jsou sestrojeny dva stejné čtverce NARS a SRCI (viz obr. 110). Dokažte, že platí: $\frac{|TE|}{|TN|} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.

4.10 V pravoúhlém trojúhelníku MST s pravým úhlem při vrcholu T je sestrojena kružnice a její tečna LA, která je kolmá k úsečce MS (viz obr. 111). Obvod čtyřúhelníku MLAT je stejný jako obvod trojúhelníku SAL Dokažte, že platí: $\frac{|MT|}{|LA|} = \varphi$, kde φ je tzv. zlatý řez.



obr. 110

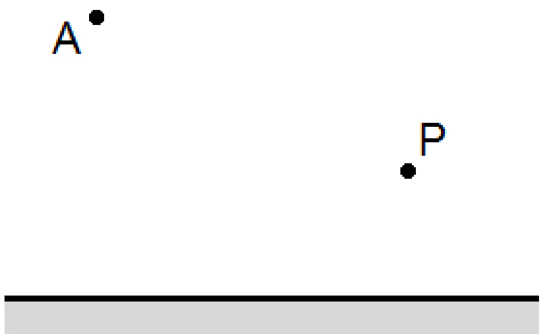


obr. 111

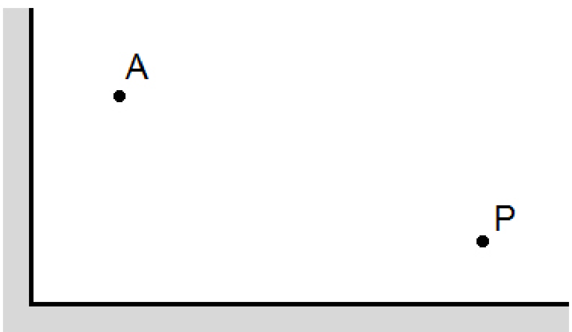
5. Osová souměrnost

5.1 Bodem A umístěným před rovinným zrcadlem veďte světelný paprsek tak, aby odražený paprsek procházel daným bodem P (viz obr. 112).

5.2 Bodem A umístěným před dvěma rovinnými zrcadly veďte světelný paprsek tak, aby světlo po odrazu od obou zrcadel prošlo daným bodem P (viz obr. 113).



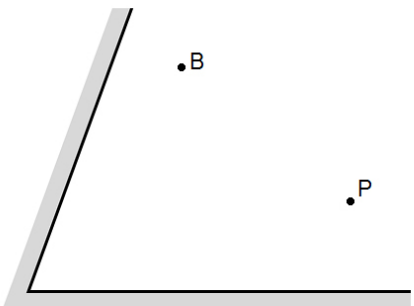
obr. 112



obr. 113

5.3 Bodem B umístěným před dvěma rovinnými zrcadly veďte světelný paprsek tak, aby světlo po odrazu od obou zrcadel prošlo daným bodem P (viz obr. 114).

5.4 Bodem B umístěným před dvěma rovinnými zrcadly veďte světelný paprsek tak, aby světlo po odrazu od obou zrcadel prošlo daným bodem P (viz obr. 115).



obr. 114

obr. 115

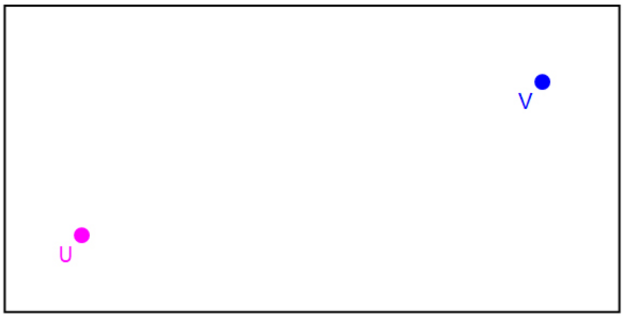
5.5 Určete osy osových souměrností, v nichž jsou samodružné útvary mající tvar velkých tiskacích písmen A, B, C, D, E, H, I, K, M, O, T, U, V, W, X a Y. (Patky u zobrazených písmen neuvažujte, „bříška“ písmene B považujte za stejná, „nožičky“ písmena K za stejně dlouhé a stejně strmé.)

5.6 Na kulečníkovém stole (viz obr. 116) jsou dvě koule – U a V. Určete trajektorii pohybu koule U tak, aby trefila kouli V a přitom se odrazila a) právě jednou od jednoho mantinelu stolu (ale postupně od každého), b) právě dvakrát od dvou různých mantinelů, c) právě třikrát od tří různých mantinelů. Použitý postup fyzikálně a matematicky zdůvodněte. Koule považujte za dostatečně malé. (Řešitelnost některých částí úlohy závisí na umístění koulí na stole.)

5.7 Na obdélníkovém kulečníkovém stole ABCD o rozměrech $|\mathrm{AB}| = 1{,}5\ \mathrm{m}$ a $|\mathrm{BC}| = 2\ \mathrm{m}$ leží dvě koule *X* a *Y*. Koule *X* je vzdálena 30 cm od strany AB a 50 cm od strany AD stolu. Koule *Y* je vzdálena 60 cm od strany DC a 20 cm od strany BC stolu. Určete graficky i výpočtem, pod jakým úhlem je třeba vystřelit kouli *X*, aby se po odrazech od strany AB a BC stolu trefila do koule *Y*. Jak dlouhou dráhu koule *X* urazí? Koule považujte za dostatečně malé.

5.8 Sestrojte trojúhelník JAS, jestliže délka strany *a* je 5 cm, součet délek stran *j* a *s* je 10 cm a vnitřní úhel při vrcholu J má velikost $50°$.

5.9 Sestrojte trojúhelník PCR, je-li jeho obvod 9 cm, velikost vnitřního úhlu při vrcholu C je $60°$ a výška na stranu *r* má délku 4 cm.



obr. 116

5.10 Sestrojte trojúhelník LSD, jestliže je dáno: velikost úhlu při vrcholu S, výška na stranu *l* a součet $|\mathrm{SD}| + |\mathrm{DN}| + |\mathrm{NL}|$, kde bod N je střed strany LS daného trojúhelníka.

5.11 Jsou dány dva různé body K a L neležící na dané přímce *u*. Sestrojte bod Z ležící na přímce *u* tak, aby součet vzdáleností $|\mathrm{KZ}| + |\mathrm{LZ}|$ byl nejmenší.

5.12 Jsou dány dvě různoběžky *p* a *q* se společným bodem V. Uvnitř ostrého úhlu s vrcholem V leží bod T. Sestrojte trojúhelník KAT tak, aby $\mathrm{K} \in p$, $\mathrm{A} \in q$ a trojúhelník KAT měl minimální obvod.

5.13 V kartézské soustavě O*xy* je dán bod $\mathrm{A} = [3; 2]$. Na ose *x* sestrojte takový bod D, aby lomená čára ODA měla délku 8 j.

5.14 Je dána přímka *p*. V každé z opačných polorovin, na které rozděluje danou rovinu přímka *p*, leží jedna kružnice. Sestrojte kosočtverec ZIMA tak, aby úhlopříčka IM ležela na přímce *p*, její délka byla rovna 5 cm a body Z a A ležely každý na jedné ze zadaných kružnic.

5.15 Sestrojte trojúhelník PUK, jestliže jdou dány délky jeho stran *p* a *u* a velikost úhlu $\alpha - \beta$, kde α je vnitřní úhel při vrcholu P a β je vnitřní úhel při vrcholu U.

5.16 Sestrojte lichoběžník JUDO, jestliže je dáno: délka strany UD je rovna 8 cm, délka strany DO je rovna 5 cm a délka strany OJ je rovna 6 cm a $|\sphericalangle \mathrm{OJU}| - |\sphericalangle \mathrm{JUD}| = 30°$.

5.17 Sestrojte čtyřúhelník ABCD, jestliže je dáno: $|\mathrm{AB}| = a$, $|\mathrm{BC}| = b$, $|\mathrm{CD}| = c$ a $|\mathrm{DA}| = d$, přičemž $a > d$. Úhlopříčka AC hledaného čtyřúhelníku přitom leží na ose vnitřního úhlu u vrcholu A.

5.18 Přímka *q* rozděluje rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny. V jedné z nich leží kružnice *k* a ve druhé trojúhelník LES. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky PAV s pravým úhlem při vrcholu V, pro které je přímka *q* jejich osou souměrnosti, bod P leží na kružnici *k* a bod A leží na hranici trojúhelníka LES. Diskutuje počet řešení zadané úlohy.

6. Středová souměrnost

6.1 Určete středy středových souměrností, v nichž jsou samodružné útvary mající tvar velkých tiskacích písmen H, I, N, O, S, X a Z. (Patky u zobrazených písmen neuvažujte.)

6.2 Je dán ostrý úhel COP a uvnitř něj (ale ne na ose úhlu) bod M. Sestrojte všechny takové úsečky, které mají krajní body na ramenech OC a OP daného úhlu a jsou bodem M půleny.

6.3 Je dán bod S ležící uvnitř trojúhelníku KOV. Sestrojte takovou příčku trojúhelníka KOV, která je bodem S půlena.

6.4 Je dán bod Q uvnitř ostrého úhlu RUN. Sestrojte čtverec PIVO tak, aby bod P ležel na polopřímce UR, bod V na polopřímce UN a bod Q byl středem čtverce PIVO.

6.5 Jsou dány přímky *u* a *v* a bod S. Sestrojte čtverec VLAK se středem S, aby bod V ležel na přímce *u* a bod A ležel na přímce *v*.

6.6 Jsou dány dvě soustředné kružnice *m* a *n* a bod S ležící na kružnici s menším poloměrem. Sestrojte rovnoběžník KOTE se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

6.7 Jsou dány čtyři kružnice *k*, *l*, *m* a *n* a bod S. Sestrojte rovnoběžník JARO tak, aby platilo $\mathrm{J} \in k$, $\mathrm{A} \in l$, $\mathrm{R} \in m$, $\mathrm{O} \in n$ a bod S ležel na průsečíku úhlopříček rovnoběžníku JARO.

6.8 Jsou dány dvě protínající se kružnice *k* a *l*, které mají různé poloměry. Sestrojte takovou přímku procházející jedním jejich společným bodem, která vytíná na obou kružnicích stejně dlouhé tětivy.

6.9 Je dána kružnice *k* se středem S a poloměrem *r*. V jejím bodě T je ke kružnici vedena tečna *t*. Ve stejné polorovině s hraniční přímkou *t*, jako leží kružnice *k*, zvolte bod N. Sestrojte úsečku, která má jeden krajní bod na kružnici *k*, druhý na přímce *t* a bod N ji půlí. Diskutujte počet řešení úlohy v závislosti na poloze bodu N.

6.10 Je dán čtverec TYGR, přímka *p* a bod S. Sestrojte úsečku UV tak, aby jejím středem byl bod S, bod U ležel na přímce *p* a bod V na obvodu čtverce TYGR. Diskutujte počet řešení úlohy v závislosti na poloze bodu S a přímky *p* vůči čtverci TYGR.

6.11 Sestrojte trojúhelník UFO, je-li dáno: délka strany *o*, délka t_u těžnice na stranu *u* a velikost úhlu ω, který svírá těžnice na stranu *u* se stranou *f*.

6.12 Je dána přímka *q*, kružnice *k* se středem S a poloměrem *r* a navzájem různé body E a F. Sestrojte trojúhelník ODA tak, aby jeho vrchol O ležel na přímce *q*, vrchol D na kružnici *k* a body E a F byly po řadě středy stran OA a DA. Diskutujte počet řešení úlohy v závislosti na vzájemné poloze kružnice *k*, přímky *p* a bodů E a F.

6.13 Je dána kružnice *k* se středem S a poloměrem *r* a její vnější bod A. Sestrojte bod dotyku kružnice *k* s její tečnou procházející bodem A. Při řešení a) použijte Thaletovu kružnici, b) nepoužívejte Thaletovu kružnici.

7. Posunutí

7.1 Jsou dány různoběžky *a* a, *b* a úsečka MN. Sestrojte úsečku AB shodnou a rovnoběžnou s úsečkou MN tak, aby její krajní body A a B ležely po řadě na přímkách *a* a *b*.

7.2 Je dána úsečka AB a trojúhelník KRB. Na hranici trojúhelníku určete takové body U a V, aby úsečka UV byla rovnoběžná s úsečkou AB a byla stejně dlouhá jako úsečka AB.

7.3 Jsou dány rovnoběžné přímky *p* a *q* a bod U (který neleží na ose pásu rovnoběžek). Sestrojte kružnici, která se dotýká přímek *p* a *q* a prochází bodem U.

7.4 Sestrojte příčku dvou rovnoběžek *u* a *v*, která je kolmá k oběma přímkám a která je z daného bodu F vidět pod úhlem $60°$. Diskutujte počet řešení úlohy v závislosti na poloze bodu F.

7.5 Je dána kružnice *k* (S; *r*), přímka *q* a kladné reálné číslo *v*. Sestrojte takovou tětivu kružnice *k*, která je rovnoběžná s přímkou *q* a která má délku *v*.

7.6 Jsou dány dvě kružnice *k* a *l* a dva různé body A a B (neležící na kružnicích). Sestrojte úsečku KL, která je rovnoběžná s úsečkou AB, má stejnou délku jako úsečka AB, bod K leží na kružnici *k* a bod L leží na kružnici *l*.

7.7 Sestrojte lichoběžník VODA, jehož strany VO a DA jsou navzájem rovnoběžné, jestliže platí: $|\mathrm{VO}| = 6\ \mathrm{cm}$, $|\mathrm{DA}| = 2\ \mathrm{cm}$. $|\mathrm{VA}| = 4\ \mathrm{cm}$ a $|\mathrm{OD}| = 5\ \mathrm{cm}$.

7.8 Je dána úsečka MN, kružnice *k* a trojúhelník HIC, přičemž kružnice a trojúhelník nemají žádné společné body. Sestrojte čtverec LUPA tak, aby jeho strana LU byla rovnoběžná s úsečkou MN a měla stejnou velikost jako úsečka MN, bod L ležel na kružnici *k* a bod U na hranici trojúhelníka HIC. Diskutujte počet řešení úlohy.

7.9 Jsou dány dvě přímky *p* a *q* a úsečka EF. Sestrojte čtverec DUNA tak, aby strana DU byla stejně dlouhá jako úsečka EF a byla s ní rovnoběžná, bod D ležel na přímce *p* a bod U ležel na přímce *q*. Diskutujte počet řešení úlohy.

7.10 Je dána kružnice *k* s vyznačeným průměrem PQ a vnější přímka *p* kružnice *k*. Na přímce *p* je vyznačena úsečka AB. Sestrojte bod W na kružnici *k* tak, aby polopřímky PW a QW protínaly přímku *p* v bodech C a D takových, že $|\mathrm{CD}| = |\mathrm{AB}|$. Diskutujte počet řešení úlohy.

7.11 Sestrojte rovnoběžník SOVA, jestliže $|\mathrm{SO}| = a$, $|\mathrm{OV}| = b$ a $|\sphericalangle \mathrm{SUO}| = \varphi$, kde U je průsečík úhlopříček SV a OA.

7.12 Sestrojte čtyřúhelník KOLA, jestliže $|\mathrm{KO}| = a$, $|\mathrm{LA}| = c$, $|\mathrm{KL}| = e$, $|\mathrm{OA}| = f$ a $|\sphericalangle \mathrm{KSO}| = \alpha$, kde S je průsečík úhlopříček KL a OA.

8. Otočení

8.1 Určete velikost úhlu otočení hodinové a minutové ručičky a) od 0:00 do 15:00 téhož dne, b) od 6:30 do 14:15 téhož dne.

8.2 Určete velikost úhlu otočení, který svírají hodinová a minutová ručička a) v 5 hodin, b) ve 3:15, c) v 7:45.

8.3 Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *u* a *v* a mimo ně bod K. Sestrojte rovnostranný trojúhelník VLK tak, aby jeho vrcholy ležely po řadě na přímkách *u* a *v*.

8.4 Jsou dány dvě soustředné kružnice *k* a *l* a bod T ležící na jedné z kružnic. Sestrojte rovnostranný trojúhelník TRN tak, aby bod R ležel na kružnici *k* a bod N ležel na kružnici *l*.

8.5 Jsou dány dvě různé kružnice *m* a *n*, jejichž jeden společný bod označíme D. Sestrojte čtverec DRON tak, aby vrchol R ležel na kružnici *m* a vrchol N ležel na kružnici *n*.

8.6 Je dána kružnice *k*, bod V a úsečka EF. Sestrojte tětivu CD kružnice *k* tak, aby tětiva byla vidět z bodu V pod úhlem $60°$ a současně $|\mathrm{CD}| = |\mathrm{EF}|$.

8.7 Jsou dány dvě různoběžky *p* a *q* a bod S (ne na ose úhlu daných přímek). Sestrojte všechny čtverce AZOR takové, že bod S je jejich středem, bod A leží na přímce *p* a bod Z leží na přímce *q*.

8.8 Jsou dány dvě protínající se kružnice *m* a *n* s různými poloměry. Jeden jejich společný bod označme W. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky WHO tak, aby $|\sphericalangle \mathrm{HWO}| = 120°$, bod H ležel na kružnici *m* a bod O ležel na kružnici *n*.

8.9 Do daného rovnoběžníku TLAK vepište čtverec UDIV tak, aby vrcholy čtverce ležely každý na jiné straně rovnoběžníku.

8.10 Je dána kružnice *k* (S; 3,5 cm) a bod X ležící v její vnitřní oblasti tak, že $|\mathrm{SX}| = 2{,}5\ \mathrm{cm}$. Sestrojte všechny tětivy kružnice *k*, které procházejí bodem X a mají délku 5,5 cm.

8.11 Jsou dány různoběžné přímky *k* a *l*, bod V neležící na žádné z přímek a trojúhelník BUS, který nemá se zadanými přímkami žádné společné body. Sestrojte trojúhelník VRT, který je podobný trojúhelníku BUS, a přitom vrchol R leží na přímce *k* a vrchol T leží na přímce *l*.

8.12 Je dán čtverec LETO a úsečka PR. Sestrojte čtverec ZIMA, jehož každý vrchol leží na jedné straně čtverce LETO a přitom $|\mathrm{ZI}| = |\mathrm{PR}|$.

8.13 Je dána kružnice *k* (S; *r*), bod P ležící ve vnitřní oblasti kružnice *k* a bod Q ležící vně kružnice *k*. Sestrojte rovnoběžky *p* a *q* tak, aby bod P ležel na přímce *p*, bod Q ležel na přímce *q*, přímka *p* protnula kružnici *k* v bodě X a přímka *q* protnula kružnici *k* v bodě Y, přičemž body X a Y omezují čtvrtinu kružnice *k*.

9. Stejnolehlost

9.1 Ve stejnolehlosti $H(\mathrm{T}; 0{,}5)$ sestrojte obraz trojúhelníku EFG. Bod T je těžiště trojúhelníka.

9.2 Ve stejnolehlosti $H(\mathrm{P}, -3)$ sestrojte obraz trojúhelníku KLM. Bod P je průsečík výšek trojúhelníka.

9.3 Sestrojte všechny trojúhelníky PES, v nichž $|\mathrm{PS}|:|\mathrm{ES}| = 5:4$, úhel při vrcholu S má velikost $60°$ a výška na stranu S má délku 5 cm.

9.4 Sestrojte trojúhelník MAK, jestliže velikost vnitřního úhlu u vrcholu M je $60°$, velikost vnitřního úhlu u vrcholu A je $45°$ a těžnice na stranu A má délku 5 cm.

9.5 Sestrojte trojúhelník LUK, jestliže $l:u:k = 4:5:6$ a poloměr kružnice vepsané je 1,5 cm.

9.6 Do daného ostroúhlého trojúhelníku ZOH vepište čtverec KUBA tak, aby strana KU čtverce ležela na straně ZO trojúhelníka, bod B ležel na straně OH a bod A ležel na straně ZH.

9.7 Do kruhové výseče DRN s ostrým středovým úhlem s vrcholem R vepište čtverec LABE tak, aby strana LA ležena na rameni RD, vrchol B ležel na oblouku dané výseče a vrchol E ležel na rameni RN.

9.8 Jsou dány dvě různoběžky *a* a *b* a bod U neležící na žádné z nich. Sestrojte všechny kružnice dotýkající se přímek *a* a *b* a procházející bodem U.

9.9 Sestrojte středy stejnolehlostí dvou daných kružnic $k_1(\mathrm{S}_1; r_1)$ a $k_2(\mathrm{S}_2; r_2)$. Řešte pro případ, že a) $|\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2| > r_1 + r_2$, b) $|\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2| = r_1 + r_2$.

9.10 Sestrojte společné tečny ke dvěma kružnicím z předcházející úlohy.

9.11 Je dána kružnice *k* a v její vnitřní oblasti bod D. Sestrojte všechny tětivy UV kružnice *k* procházející bodem D, které jsou tímto bodem děleny v poměru 1:3.

9.12 Je dán půlkruh vymezený průměrem AB a obloukem ASB, kde S je střed kruhu, jehož půlkruh uvažujeme. Uvnitř půlkruhu leží bod M. Sestrojte všechny příčky daného půlkruhu, které mají krajní body na hranici půlkruhu a jsou bodem M děleny v poměru 1:2.

9.13 Je dán půlkruh vymezený průměrem CD a obloukem CSD, kde S je střed kruhu, jehož půlkruh uvažujeme. Vně půlkruhu leží bod Q. Sestrojte všechny příčky daného půlkruhu, které mají krajní body na hranici půlkruhu, leží na přímce procházející bodem Q a jsou bodem Q děleny v poměru $|\mathrm{QX}|:|\mathrm{QY}| = 2:1$ 1:2.

Řešení

1. Úhly

1.1 $180°$;

1.2 $\gamma = 150°$;

1.3 $\tau = 40°$;

1.4 $\varphi = 105°$;

1.5 $\mu = 15°$;

1.6 $\rho = 44°$;

1.7 $\rho = 54°$;

1.8 $\delta = 125°$;

1.9 $x = 40°$;

1.10 $x = 15°$;

1.11 $\alpha = \beta = 72°$;

1.12 $|\sphericalangle \mathrm{KAO}| = 20°$;

1.13 $|\sphericalangle \mathrm{TOA}| = 45°$;

1.14 $|\sphericalangle \mathrm{CVZ}| = 50°$;

1.15 $|\sphericalangle \mathrm{HIU}| = 120°$;

1.16 $|\sphericalangle \mathrm{RHP}| = 62°$;

2. Trojúhelníky

2.1 $\frac{11}{18}\pi$;

2.2 ano;

2.3 ne;

2.4 7 cm;

2.5 9 cm; 12 cm;

2.6 96 cm; 128 cm; 160 cm nebo 1,5 cm; 2 cm; 2,5 cm;

2.7 $\frac{144}{49}\ \mathrm{j}^2$;

2.8 $\frac{79}{9}\ \mathrm{j}$;

2.9 6 j;

2.10 $r_2 = \sqrt{r_1 \cdot r_3}$;

2.11 32 j, 20 j;

2.12 $15\ \mathrm{j}^2$;

2.13 $\frac{24}{7}\ \mathrm{j}$;

2.14 $\frac{a}{5}$;

2.15 8 m;

2.16 platí;

2.17 $5\ \mathrm{j}^2$;

2.18 10 cm;

2.19 14 cm; 18 cm; 24 cm;

2.20 6 cm; 8 cm; 10 cm;

2.21 25 %;

2.22

2.23 $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{27}$;

2.24 4,8 cm;

2.25 $75\ \mathrm{cm}^2$;

2.26 4 cm;

2.27 $6\left(2-\sqrt{2}\right)\ \mathrm{cm}$;

2.28 $205\pi\ \mathrm{j}^2$;

2.29 $\frac{30}{7}\ \mathrm{j}^2$;

2.30 2,35 m;

2.31 0,56 m;

2.32 125 m;

2.33 16 m;

2.34 1 km;

2.35 1,99 m; 1,33 m;

2.36

2.37

2.38

2.39

2.40

2.41 $10\sqrt{2}\ \mathrm{j}$;

2.42 $\sqrt{2}$;

2.43 $\frac{1}{3}$; $3 \cdot |\mathrm{LO}|^2$;

2.44 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$;

2.45 $4\sqrt{10}\ \mathrm{j}$.

3. Pythagorova věta a Euklidovy věty

3.1 $50\sqrt{5}$ cm ; $25\sqrt{5}$ cm ;

3.2 $\dfrac{9\sqrt{337}}{337}$ cm $\doteq 50$ cm ; $\dfrac{16\sqrt{337}}{337}$ cm $\doteq 89$ cm ;

3.3 267 j; 244 j; 125 j;

3.4 $1+\sqrt{14}$ j ; $7+\sqrt{14}$ j ; $8+\sqrt{14}$ j ;

3.5 5 m; 12 m;

3.6 15 j;

3.7 5 j;

3.8 54 j; 72 j; 90 j;

3.9 104,9 cm; 84,5 cm; 107,4 cm; 109,1 cm; 95,7 cm;

3.10

3.11 13,1 cm; 12,3 cm;

3.12 36 j^2 ;

3.13 je;

3.14 je;

3.15 $\dfrac{a}{12}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$;

3.16 $\dfrac{a^2}{2(b-a)}$; $b+\dfrac{a^2}{2(b-a)}$;

3.17 90 cm^2 ;

3.18 13 j; $\dfrac{25}{2}$ j ; $\dfrac{13}{2}$ j ; $\dfrac{169}{8}(4-\pi)$ j^2 ;

3.19 29 j;

3.20 3 j;

3.21 41 j;

3.22 $\sqrt{41}$ j ;

3.23 $4\sqrt{5}$ j ;

3.24 $\sqrt{85}$ cm ;

3.25 $45°$;

3.26 $\dfrac{60}{37}$ j ;

3.27 $\dfrac{55}{2}\pi$ j ;

3.28 $10\pi-16$ j^2 ;

3.29 $\dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$;

3.30 $10\sqrt{3}$ j ;

3.31 6,25 j;

3.32 $\sqrt{17}$ j ;

3.33 30 j^2 ;

3.34 5 j;

3.35 19,6 cm;

3.58 $\dfrac{5}{4}a$;

3.59 $\dfrac{2}{3}$;

3.60 $\dfrac{225}{64}\pi$ j^2 ;

3.61 $\dfrac{3}{5}a$;

3.62 2 j^2 ;

3.63 $4\sqrt{5}-8$ j ;

3.64 $\dfrac{a}{4}$;

3.65 18 j; 12 j^2 ;

3.66 $\dfrac{r}{9}$;

3.67 $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$ j ;

3.68 $9\left(3+2\sqrt{6}\right)$ j^2

3.69 $\dfrac{8}{9}r$;

3.70 $\dfrac{r}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)$;

3.71 135 j^2 ;

3.72 4 j^2 ;

3.73 156 j^2 ;

3.74 7 j;

3.75 5 j;

3.76 $\dfrac{50}{3}$ cm ;

3.77 8 cm; 18 cm;

3.78 $2\sqrt{10}$ cm ; $2\sqrt{15}$ cm ; 10 cm; $2\sqrt{6}$ cm ;

3.36 $2\sqrt{r^2-b^2}$;

3.37 $\frac{a}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}a$;

3.38 $50\pi\ \mathrm{j}^2$;

3.39 $70\ \mathrm{j}^2$;

3.40 $2\sqrt{5}$ j; $4\left(3-\sqrt{5}\right)$ j;

3.41 $6r$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$;

3.42 $4r\sqrt{3}$; $2r^2\sqrt{3}$;

3.43 $r-\sqrt{r^2-\frac{l^2}{4}}$;

3.44 $5\sqrt{10}$ cm;

3.45 20 j; 15 j;

3.46 $80\cdot\sqrt{11}\ \mathrm{j}^2$;

3.47 5 j;

3.48 $\frac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$;

3.49 $4\ \mathrm{j}^2$;

3.50 16 j;

3.51 $\frac{36+32\sqrt{3}}{3}$ cm;

3.52 $\frac{7}{2}$ j;

3.53 $10\pi-12\ \mathrm{j}^2$;

3.54 3 j;

3.55 9 j; 41 j;

3.56 $15\ \mathrm{cm}^2$;

3.57 2 j;

3.79 130 m; $\frac{600}{13}\ \mathrm{m} \doteq 46{,}2\ \mathrm{m}$;

3.80 8,4 cm;

3.81 $\frac{16}{5}$ j;

3.82 $2\sqrt{3}$ cm; 2 cm; $4\sqrt{6}$ cm; $30°$;

3.83 $\frac{5\sqrt{7}}{2}\pi$ j; $\frac{175}{8}\pi\ \mathrm{j}^2$;

3.84 $\frac{8\sqrt{21}}{5}$ j;

3.85 $\frac{d}{5}$; $\frac{2d}{5}$; $\frac{3d}{5}$;

3.86 $\frac{1}{2}\sqrt{2\left(\left(a+c\right)^2+b^2\right)}$;

3.87 $\frac{7}{5}$ j;

3.88 $2\sqrt{5}$ j;

3.89 $\frac{9}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$;

3.90 40 j;

3.91 $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

3.92 $b\sqrt{3}$;

3.93 $3a^2$;

3.94 $1+\sqrt{3}$ j; $3+2\sqrt{3}$ j;

3.95 $1+\sqrt{3}$ j;

3.96 $\sqrt{h\left(h+2r\right)}$; $\frac{hr}{h+r}$;

3.97 $\frac{1}{2}$;

3.98 $2\sqrt{5}$ j.

4. Zlatý řez

5. Osová souměrnost

6. Středová souměrnost

7. Posunutí

8. Otočení

9. Stejnolehlost

Zdroje

[1] Davidová E.: Řešení planimetrických úloh – konstrukční a početní úlohy, Wichterlovo gymnázium, Ostrava 2006
[2] Šedivý J.: *Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách*, Matematický ústav ČSAV a ÚV ČSM, Mladá fronta, Praha 1962
[3] Šedivý J.: *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*, ÚV MO, Mladá fronta, Praha 1980