# Komplexní čísla

## *1. Operace s komplexními čísly*

Jsou dána komplexní čísla $a = 3 - \mathrm{j}$, $b = -2 + 3\mathrm{j}$, $c = 1 + \mathrm{j}$ a $d = -4 - 2\mathrm{j}$. Vypočtěte:

**1.1** $a + b$;

**1.2** $c - d$;

**1.3** $a \cdot d$;

**1.4** $c - b \cdot d$;

**1.5** $a' - \overline{b}$;

**1.6** $a + \overline{b} \cdot c'$;

**1.7** $\dfrac{a}{b}$;

**1.8** $\dfrac{c}{b'}$;

**1.9** $\dfrac{d}{\overline{a}}$;

**1.10** $\dfrac{3a - d}{c}$;

**1.11** $\dfrac{c \cdot a'}{2\overline{d}}$;

**1.12** $\dfrac{a - 2\overline{b}}{4c + d}$.

**1.13** Vypočtěte: $2 + \dfrac{3 - \mathrm{j}}{1 + \mathrm{j}}$.

**1.14** Vypočtěte: $\dfrac{2 - 3\mathrm{j}}{2 + \mathrm{j}} - 3\mathrm{j}$.

**1.15** Vypočtěte: $\dfrac{2 - \mathrm{j}}{\mathrm{j}} - \dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}}$.

**1.16** Vypočtěte: $\dfrac{2 + \mathrm{j}}{\mathrm{j}} + \dfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j} + 1} - \dfrac{2\mathrm{j} + 1}{\mathrm{j} - 1}$.

## *2. Absolutní hodnota komplexních čísel*

Vypočtěte absolutní hodnotu zadaných komplexních čísel:

**2.1** $4 + 2\mathrm{j}$;

**2.2** $-3 + 4\mathrm{j}$;

**2.3** $5 - 2\mathrm{j}$;

**2.4** $-12\mathrm{j}$;

**2.5** $\sqrt{3} - \mathrm{j}$;

**2.6** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}\mathrm{j}$;

**2.7** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}$;

**2.8** $\dfrac{\sqrt{5}}{4} - \dfrac{1}{2}\mathrm{j}$

**2.9** $\dfrac{1}{3\mathrm{j}}$;

**2.10** $\dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{2 - \mathrm{j}}$;

**2.11** $\dfrac{2 + \mathrm{j}}{3 - \mathrm{j}} + \dfrac{3}{\mathrm{j}}$;

**2.12**

**2.13** $\dfrac{\overline{3\mathrm{j} - 2} \cdot (\mathrm{j} - 1)}{1 - 2\mathrm{j}}$;

**2.14** $\dfrac{(2 + \mathrm{j}) \cdot (3 - \mathrm{j})'}{1 - \mathrm{j}}$;

**2.15** $\dfrac{(4 + 3\mathrm{j})' \cdot \overline{1 - 2\mathrm{j}}}{5(2 - \mathrm{j})}$;

**2.16** $\dfrac{3 - 2\mathrm{j} \cdot \overline{1 - 2\mathrm{j}}}{1 + 2\mathrm{j}} + 3\mathrm{j}$.

**2.17** Zjistěte, zda komplexní číslo $z=\dfrac{2\mathrm{j}+4}{2+\mathrm{j}}$ je komplexní jednotkou.

**2.18** Zjistěte, zda komplexní číslo $k=\dfrac{\overline{3-\mathrm{j}}}{1+2\mathrm{j}}$ je komplexní jednotkou.

**2.19** Zjistěte, zda komplexní číslo $r=4\dfrac{2+\mathrm{j}}{4+8\mathrm{j}}$ je komplexní jednotkou.

**2.20** Zjistěte, zda komplexní číslo $q=\dfrac{\mathrm{j}-1}{2+\mathrm{j}}+1$ je komplexní jednotkou.

**2.21** Určete reálnou část $a$ komplexního čísla $m=a+\dfrac{3}{5}\mathrm{j}$ tak, aby komplexní číslo $m$ bylo komplexní jednotkou.

**2.22** Určete imaginární část $b$ komplexního čísla $p=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+b\mathrm{j}$ tak, aby komplexní číslo $p$ bylo komplexní jednotkou.

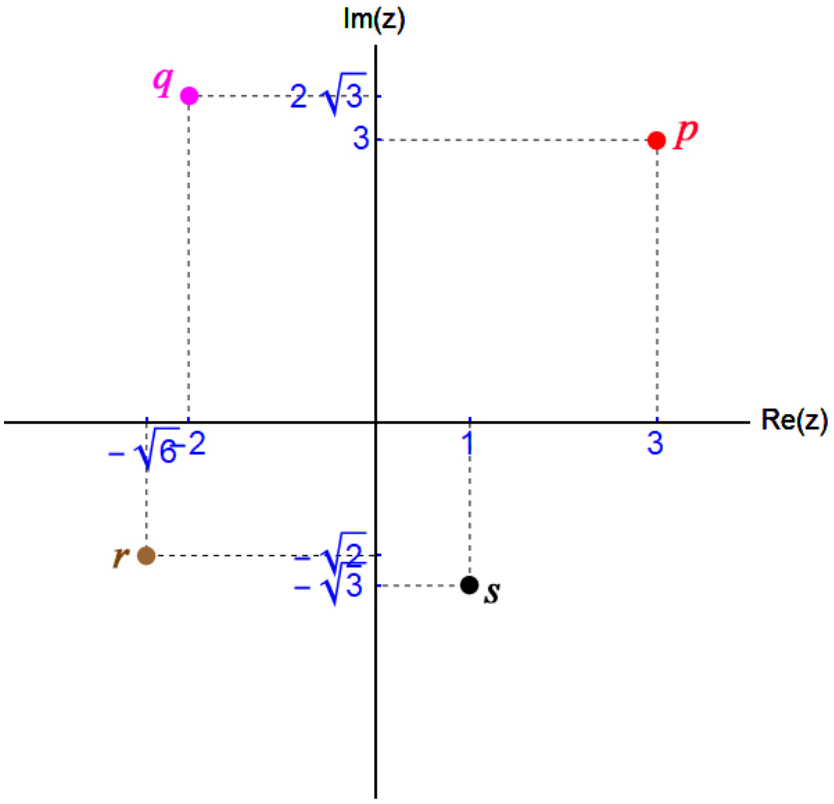
**2.23** Určete reálnou část $c$ komplexního čísla $u=c+2\mathrm{j}$ tak, aby komplexní číslo $u$ bylo komplexní jednotkou.

**2.24** Určete imaginární část $d$ komplexního čísla $q=\sqrt{2}-d\mathrm{j}$ tak, aby absolutní hodnota komplexního čísla $q$ byla rovna třem.

**2.25** Určete reálnou část $a$ komplexního čísla $k=a-4\mathrm{j}$ tak, aby absolutní hodnota komplexního čísla $k$ byla rovna pěti.

## *3. Gaussova rovina*

**3.1** Zapište v algebraickém tvaru komplexní čísla zobrazená na obr. 1.




*obr. 1*

Zobrazte v Gaussově rovině komplexní čísla:

**3.2** $a = 2 + 3\mathrm{j}$;

**3.3** $b = 2\mathrm{j}$;

**3.4** $c = -3 + \mathrm{j}$;

**3.5** $d = -3\mathrm{j}$;

**3.6** $e = -1 - \mathrm{j}$;

**3.7** $f = 1 - 4\mathrm{j}$.

Vypočtete argument komplexních čísel:

**3.8** $z = 1 - \mathrm{j}$;

**3.9** $r = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$;

**3.10** $m = -3 + \sqrt{3}\mathrm{j}$;

**3.11** $p = -\sqrt{3} - 1\mathrm{j}$;

**3.12** $u = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{j}$;

**3.13** $k = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}\mathrm{j}$.

## *4. Goniometrický tvar komplexních čísel*

Vyjádřete zadané komplexní číslo v goniometrickém i algebraickém tvaru:

**4.1** $z = 2 + 2\mathrm{j}$;

**4.2** $r = -3 + 3\sqrt{3}\mathrm{j}$;

**4.3** $u = -\sqrt{15} - \sqrt{5}\mathrm{j}$;

**4.4** $p = \sqrt{3} - \mathrm{j}$;

**4.5** $c = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

**4.6** $w = 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{7}{6}\pi\right)$;

**4.7** $q = \cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{7}{4}\pi$;

**4.8** $s = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

**4.9** $v = -4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{5}{6}\pi\right)$;

**4.10** $d = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi - \mathrm{j}\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right)$;

**4.11** $a = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{j}\cdot\sin\frac{7}{6}\pi\right)$;

**4.12** $t = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{j}\cdot\sin\frac{5}{6}\pi\right)$;

**4.13** $g = 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{5}{4}\pi\right)$;

**4.14** $b = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi - \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

**4.15** $n = \sqrt{5}\left(\sin\frac{2}{3}\pi - \mathrm{j}\cdot\cos\frac{2}{3}\pi\right)$;

**4.16** $m = 3\sqrt{2}\left(\sin\frac{11}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{11}{6}\pi\right)$;

Vypočtěte součin daných komplexních čísel:

**4.17** $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$ a $b = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

**4.18** $u = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{8}\right)$ a $v = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

**4.19** $k = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$ a $l = 5\left(\cos\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\pi\right)$;

**4.20** $m=\frac{2}{5}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ a $n=\frac{15}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Vypočtěte podíl daných komplexních čísel:

**4.21** $c=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$ a $d=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

**4.22** $p=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$ a $q=3\left(\cos\frac{3\pi}{8}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

**4.23** $\alpha=15\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\right)$ a $\beta=5\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

**4.24** $r=2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ a $s=2\left(\cos\frac{7\pi}{24}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{7\pi}{24}\right)$.

Vypočtěte:

**4.25** $\mathrm{j}^3$;

**4.26** $\mathrm{j}^5$;

**4.27** $-\mathrm{j}^4$;

**4.28** $\mathrm{j}^7$;

**4.29** $\mathrm{j}^{10}$;

**4.30** $\mathrm{j}^8-\mathrm{j}^3$;

**4.31** $\mathrm{j}^3-\mathrm{j}^5+\mathrm{j}^7-\mathrm{j}^9$;

**4.32** $\mathrm{j}-\mathrm{j}^4+\mathrm{j}^5-\mathrm{j}^{12}$.

Vypočtěte:

**4.33** $(1+\mathrm{j})^4$;

**4.34** $(1-\mathrm{j})^6$;

**4.35** $\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}\right)^5$;

**4.36** $\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}\right)^{12}$;

**4.37** $\left(\sqrt{3}-\mathrm{j}\right)^4$;

**4.38** $\left(-3-\sqrt{3}\mathrm{j}\right)^8$;

**4.39** $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{j}\right)^3$;

**4.40** $\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{j}\right)^9$.

**4.41** Odvoďte vztah pro a) $\sin 2x$; b) $\cos 3x$.

## *5. Exponenciální tvar komplexních čísel*

Vyjádřete zadané číslo v algebraickém tvaru:

**5.1** $b=2\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{j}}$;

**5.2** $n=4\cdot\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.3** $o=\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{j}}$;

**5.4** $d=3\cdot\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{j}}$;

**5.5** $g=5\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.6** $h=-2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{j}}$.

Vyjádřete zadané komplexní číslo v exponenciálním tvaru:

**5.7** $z=5\left(\cos\frac{\pi}{7}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{7}\right)$;

**5.8** $q=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

**5.9** $k=10\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{j}\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

**5.11** $w=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{j}$;

**5.12** $a=-1+\sqrt{3}\mathrm{j}$;

**5.13** $t=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\mathrm{j}$;

**5.14** $u=\sqrt{7}+\sqrt{21}\mathrm{j}$.

**5.10** $p = \cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}$;

Vypočtěte:

**5.15** $2\cdot e^{\frac{\pi}{6}\mathrm{j}}\cdot 3\cdot e^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.16** $4\cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}$;

**5.17** $2\cdot e^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}$;

**5.18** $\frac{2}{5}\cdot e^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{j}}\cdot 10\cdot e^{\frac{4\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.19** $4\cdot e^{-\frac{4\pi}{3}\mathrm{j}}\cdot 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}}$;

**5.20** $\frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{7\pi}{6}\mathrm{j}}\cdot 6\cdot e^{-\pi\mathrm{j}}$;

**5.21** $\dfrac{\frac{1}{5}\cdot e^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{j}}}{\frac{10}{3}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}}$;

**5.22** $\dfrac{2\cdot e^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{j}}}{4\cdot e^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{j}}}$;

**5.23** $\dfrac{e^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{j}}}{2\cdot e^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}$;

**5.24** $\dfrac{4\cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}}{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{j}}}$;

**5.25** $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}}\right)^4$;

**5.26** $\left(2\sqrt{3}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}\right)^6$;

**5.27** $\left(3\cdot e^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{j}}\right)^3$;

**5.28** $\left(2\cdot e^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}\right)^5$.

## *6. Lineární rovnice*

Najděte reálné číslo (resp. čísla) splňující zadanou rovnici:

**6.1** $\frac{2+\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}} - u - \frac{4}{5}\mathrm{j} = u\cdot(1-\mathrm{j})(\mathrm{j}-5) - 6u\cdot\mathrm{j}$

**6.2** $2a + b\mathrm{j} = 3 - 4\mathrm{j}$;

**6.3** $\mathrm{j} - 2m + n\cdot\mathrm{j} = 4$;

**6.4** $\frac{2-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} + x - 3y\mathrm{j} = \mathrm{j}$;

**6.5** . $p(4+\mathrm{j}) - 2 = 7\mathrm{j} - q(5-2\mathrm{j})$.

Řešte v množině komplexních čísel danou rovnici:

**6.6** $3 - \mathrm{j} - 3x = 3 - 4\mathrm{j}$

**6.7** $\mathrm{j} - 2\mathrm{j}k = 4$;

**6.8** $2z = 3 - 2\mathrm{j}$;

**6.9** $3z - \overline{z} = \mathrm{j}$;

**6.10** $3q' - 2\mathrm{j} = \overline{q}$;

**6.11** $2u + 1 - \overline{u} + 3\mathrm{j} = 2u' - 2\mathrm{j} + 3$;

**6.12** $3\overline{a}\cdot a + 4 = 1$;

**6.13** $\overline{x} + x' = 3\mathrm{j} - 1$;

**6.14** $v - \overline{v} = 4\mathrm{j}$;

**6.17** $\overline{c} + 2(1 - c') = \mathrm{j}\cdot(\mathrm{j} - c)$;

**6.18** $n - 2\overline{n} + n' = \frac{1+\mathrm{j}}{2+\mathrm{j}} - \mathrm{j}$;

**6.19** $3\overline{x} - x' - x = \frac{3-\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}\cdot\frac{3+2\mathrm{j}}{1-2\mathrm{j}}$;

**6.20** $\frac{2z+1}{\overline{z}} + 2 + 3\mathrm{j} = 6 + \mathrm{j}$;

**6.21** $\frac{1-\overline{y}}{(2-y)\cdot\mathrm{j}} + 2(\mathrm{j}+1) = \mathrm{j}\cdot(3-\mathrm{j})$;

**6.15** $\overline{r}+r=r'-\mathrm{j}+1$;

**6.16** $s-\overline{s}+s'=3-2\mathrm{j}$;

**6.22** $2-\dfrac{2-g}{1-\overline{g}}+3\mathrm{j}\cdot(2\mathrm{j}-1)=3(1-\mathrm{j})$.

## *7. Kvadratické rovnice*

V množině komplexních čísel řešte rovnice:

**7.1** $x^2+5=4x$;

**7.2** $2u^2+6(u+2)=u(u+2)-1$;

**7.3** $2(n^2+2n-4)=3n^2-4(n-3)$;

**7.4** $2-(k-4)^2=2(10+k)$;

**7.5** $4-c(5-c)=5(c-5)$;

**7.6** $(b-5)^2-5=\dfrac{b^2}{2}-2(2b+3)$;

**7.7** $\dfrac{13}{d-4}=10-d$;

**7.8** $\dfrac{9+q}{1-q}-3(q-1)=3-2q$;

**7.9** $y-2=8-\dfrac{5}{y-6}$;

**7.10** $\dfrac{34}{r+1}-(5-r)=\dfrac{5}{r+1}-2$.

**7.11** Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má jeden kořen roven $4-\mathrm{j}$. Jaký je druhý kořen rovnice?

**7.12** Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty má jeden kořen roven $2\mathrm{j}$. Jaký je druhý kořen rovnice?

**7.13** Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejímž jedním kořenem je číslo $2+3\mathrm{j}$.

**7.14** Napište kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, jejímž jedním kořenem je číslo $-\mathrm{j}$.

V množině komplexních čísel řešte rovnice:

**7.15** $q^2+4q=4\mathrm{j}\cdot q$;

**7.16** $v(v+4\mathrm{j})=-(2+v^2)$;

**7.17** $p(p+2\mathrm{j})=-\dfrac{p(\mathrm{j}+p)}{2}-1$;

**7.18** $4x\mathrm{j}=x(x-\mathrm{j})-2(2x^2-1)$;

**7.19** $3m(m-\mathrm{j})=\dfrac{m(3m-\mathrm{j})}{2}+1$;

**7.20** $4(q+\mathrm{j})+\dfrac{\mathrm{j}}{q}=2q-1$;

**7.21** $\dfrac{b^2}{2\mathrm{j}}-(b-1)=\dfrac{2j-b}{\mathrm{j}}$;

**7.22** $3y-2\mathrm{j}=\dfrac{2y^2+\mathrm{j}}{y+1}$;

**7.23** $\dfrac{20n^2}{3\mathrm{j}-2}-\dfrac{\mathrm{j}}{2-3\mathrm{j}}=\dfrac{8n(n-1)}{3\mathrm{j}-2}-2n$;

**7.24** $4(a-\mathrm{j})=-\dfrac{2(1-a^2)}{a}-\mathrm{j}$;

**7.25** $\dfrac{2(b^2-1)}{b-4\mathrm{j}}=b$.

## *8. Binomické rovnice*

V množině komplexních čísel řešte rovnice:

**8.1** $x^3-1=0$;

**8.2** $y^3+1=0$;

**8.3** $z^4+1=0$;

**8.4** $t^3+2=0$;

**8.5** $u^4+\mathrm{j}=0$;

**8.6** $v^3-\mathrm{j}=0$;

**8.7** $q^4-1-\mathrm{j}=0$;

**8.8** $p^3+1-\sqrt{3}\mathrm{j}=0$;

**8.9** $2r^3-\sqrt{3}+\mathrm{j}=0$;

**8.10** $\sqrt{3}b^4+2\sqrt{3}+6\mathrm{j}=0$;

Řešte v množině komplexních čísel kvadratické rovnice:

**8.11** $x^2 + 5\mathrm{j}x - 3x = 4(1 + 2\mathrm{j})$;

**8.12** $\frac{a^2}{2} + (5 + \mathrm{j})a + \frac{5}{2} = 1 - 3(\mathrm{j} - a)$;

**8.13** $w^2 + (4 - \mathrm{j})w - \frac{\mathrm{j}}{2} = w - (\mathrm{j} + 2)$;

**8.14** $4(5 - 3\mathrm{j})c + 2\mathrm{j} = \mathrm{j} - 8(1 + c^2)$;

**8.15** $5r \cdot (r + \mathrm{j}) + 2 + \mathrm{j} = r \cdot (r + 3\mathrm{j} - 6)$.

## *9. … a něco navíc*

Zobrazte množiny bodů daných vlastností:

**9.1** $|z| = 1$;

**9.2** $|z| > 2$;

**9.3** $|z + 2| < 3$;

**9.4** $|z - 3\mathrm{j}| \geq 1$;

**9.5** $|z + 1 - 2\mathrm{j}| \leq \frac{3}{2}$;

**9.6** $z = \overline{z}$;

**9.7** $z = z'$;

**9.8** $2z = \overline{z}$;

**9.9** $z' = \overline{z}$;

**9.10** $|z| = |z + 1|$;

**9.11** $|z| = |z - \mathrm{j}|$;

**9.12** $|z + 1 - 2\mathrm{j}| = |z - 2 - \mathrm{j}|$;

**9.13** $|z + 2 + \mathrm{j}| > |z - 1 + 3\mathrm{j}|$.

# Řešení

## 1. Operace s komplexními čísly

**1.1** $1+2\mathrm{j}$;

**1.2** $5+3\mathrm{j}$;

**1.3** $-2(7+\mathrm{j})$;

**1.4** $-13+9\mathrm{j}$;

**1.5** $-1+4\mathrm{j}$;

**1.6** $2+4\mathrm{j}$;

**1.7** $-\frac{9}{13}-\frac{7}{13}\mathrm{j}$;

**1.8** $-\frac{1}{13}+\frac{5}{13}\mathrm{j}$;

**1.9** $-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\mathrm{j}$;

**1.10** $6-7\mathrm{j}$;

**1.11** $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\mathrm{j}$;

**1.12** $\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{j}$;

**1.13** $3-2\mathrm{j}$;

**1.14** $\frac{1}{5}-\frac{23}{5}\mathrm{j}$;

**1.15** $-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{j}$;

**1.16** 1.

## 2. Absolutní hodnota

**2.1** $2\sqrt{5}$;

**2.2** 5;

**2.3** $\sqrt{29}$;

**2.4** 12;

**2.5** 2;

**2.6** $\frac{\sqrt{13}}{4}$;

**2.7** 1;

**2.8** $\frac{3}{4}$

**2.9** $\frac{1}{3}$;

**2.10** 1;

**2.11** $\frac{\sqrt{26}}{2}$;

**2.12** $\frac{\sqrt{130}}{5}$;

**2.13** 5;

**2.14** 1;

**2.15** $\frac{\sqrt{10}}{5}$;

**2.16** 2;

**2.17** $\sqrt{2}$;

**2.18** 1;

**2.19** 1;

**2.20** $\pm\frac{4}{5}$;

**2.21** $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$;

**2.22** nelze;

**2.23** $\pm\sqrt{7}$;

**2.24** $\pm 3$.

## 3. Gaussova rovina

**3.1** $p=3+3\mathrm{j}$; $q=-2+2\sqrt{3}\mathrm{j}$; $r=-\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{j}$; $s=1-\sqrt{3}\mathrm{j}$;

**3.2** viz obr. 2;

**3.3** viz obr. 2;

**3.4** viz obr. 2;

**3.5** viz obr. 2;

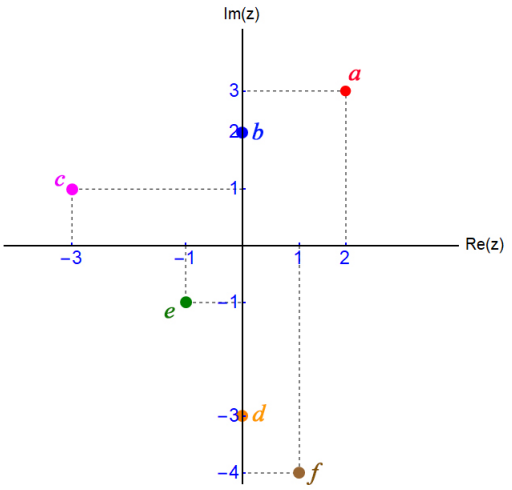
**3.6** viz obr. 2;

**3.7** viz obr. 2;

**3.8** $\frac{7}{4}\pi$;

**3.9** $\frac{\pi}{3}$;

**3.10** $\frac{5}{6}\pi$;




*obr. 2*

**3.11** $\frac{4}{3}\pi$;

**3.12** $\frac{\pi}{4}$;

**3.13** $\frac{11}{6}\pi$.

## 4. Goniometrický tvar komplexních čísel

**4.1** $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

**4.2** $r = 6\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

**4.3** $u = 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{7}{6}\pi\right)$;

**4.4** $p = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{11}{6}\pi\right)$;

**4.5** $c = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}$;

**4.6** $w = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{j}$;

**4.7** $q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}$;

**4.8** $s = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{j}$;

**4.9** $v = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{j} = 4\left(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{11}{6}\pi\right)$;

**4.10** $d = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{2}{3}\pi\right)$;

**4.11** $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

**4.12** $t = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{7}{4}\pi\right)$;

**4.13** $g = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{j} = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{5}{4}\pi\right)$;

**4.14** $b = -1 - \sqrt{3}\mathrm{j} = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{4}{3}\pi\right)$;

**4.15** $n = \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{j} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{11}{6}\pi\right)$;

**4.16** $m = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{j} = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{5}{4}\pi\right);$

**4.17** $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right);$

**4.18** $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}\right);$

**4.19** $5\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{13\pi}{12}\right);$

**4.20** $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{25\pi}{14} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{25\pi}{14}\right);$

**4.21** $8\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right);$

**4.22** $\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}\right);$

**4.23** $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + \mathrm{j}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right);$

**4.24** $\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{j}\cdot\sin\frac{\pi}{8};$

**4.25** $-\mathrm{j};$

**4.26** $\mathrm{j};$

**4.27** $-1;$

**4.28** $-\mathrm{j};$

**4.29** $-1;$

**4.30** $1+\mathrm{j};$

**4.31** $-4\mathrm{j};$

**4.32** $-2+2\mathrm{j};$

**4.33** -4;

**4.34** 8j;

**4.35** $-\frac{1}{64} - \frac{\sqrt{3}}{64}\mathrm{j};$

**4.36** 729;

**4.37** $-8-8\sqrt{3}\mathrm{j};$

**4.38** $-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^8}{2} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^8}{2}\sqrt{3}\mathrm{j};$

**4.39** $-\frac{16\sqrt{2}}{27};$

**4.40** $-4^9\,\mathrm{j};$

**4.41** a) $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$; b) $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\cdot\sin^2 x$.

## *5. Exponenciální tvar komplexních čísel*

**5.1** $b = \sqrt{3} + \mathrm{j};$

**5.2** $n = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{j};$

**5.3** $o = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j};$

**5.4** $d = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{j};$

**5.5** $g = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{j};$

**5.6** $h = \sqrt{3} + \mathrm{j};$

**5.7** $z = 5\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{7}\mathrm{j}};$

**5.8** $q = 2\cdot\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}};$

**5.9** $k = 10\cdot\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{j}};$

**5.10** $p = \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{j}};$

**5.15** $6\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}};$

**5.16** $4\cdot\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{j}};$

**5.17** $\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{12}\mathrm{j}};$

**5.18** $4\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}};$

**5.19** $8\cdot\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\mathrm{j}};$

**5.20** $2\cdot\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{j}};$

**5.21** $\frac{3}{50}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}};$

**5.22** $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{12}\mathrm{j}};$

**5.23** $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{19\pi}{12}\mathrm{j}};$

**5.11** $w = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{6}\mathrm{j}}$;

**5.12** $a = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.13** $t = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{j}}$;

**5.14** $u = 2\sqrt{7} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{j}}$;

**5.24** $8 \cdot \mathrm{e}^{\frac{17\pi}{12}\mathrm{j}}$;

**5.25** 4;

**5.26** $64 \cdot 27$;

**5.27** $27 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{j}}$;

**5.28** $32 \cdot \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}\mathrm{j}}$.

## *6. Lineární rovnice*

**6.1** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$;

**6.2** $\mathrm{P} = \left\{\left[\frac{3}{2}; -4\right]\right\}$;

**6.3** $\mathrm{P} = \{[-2; -1]\}$;

**6.4** $\mathrm{P} = \left\{\left[-\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}\right]\right\}$;

**6.5** $\mathrm{P} = \{[3; -2]\}$;

**6.6** $\mathrm{P} = \{\mathrm{j}\}$;

**6.7** $\mathrm{P} = \left\{\frac{1}{2} + 2\mathrm{j}\right\}$;

**6.8** $\mathrm{P} = \left\{\frac{3}{2} - \mathrm{j}\right\}$;

**6.9** $\mathrm{P} = \left\{\frac{1}{4}\mathrm{j}\right\}$;

**6.10** $\mathrm{P} = \{-\mathrm{j}\}$;

**6.11** $\mathrm{P} = \left\{\frac{2}{3} - \mathrm{j}\right\}$;

**6.12** $\mathrm{P} = \emptyset$;

**6.13** $\mathrm{P} = \emptyset$;

**6.14** $\mathrm{P} = \{a + 2\mathrm{j}; a \in \mathbb{R}\}$;

**6.15** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{1}{3} - \mathrm{j}\right\}$;

**6.16** $\mathrm{P} = \{-3 - 2\mathrm{j}\}$;

**6.17** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{j}\right\}$;

**6.18** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{3}{10} - \frac{2}{5}\mathrm{j}\right\}$;

**6.19** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{2}{3} - \mathrm{j}\right\}$;

**6.20** $\mathrm{P} = \left\{\frac{3}{8} - \frac{\mathrm{j}}{8}\right\}$;

**6.21** $\mathrm{P} = \{2 - \mathrm{j}\}$;

**6.22** $\mathrm{P} = \left\{\frac{9}{8}\right\}$.

## *7. Kvadratické rovnice*

**7.1** $\mathrm{P} = \{2 \pm \mathrm{j}\}$;

**7.2** $\mathrm{P} = \{-2 \pm 3\mathrm{j}\}$;

**7.3** $\mathrm{P} = \{4 \pm 2\mathrm{j}\}$;

**7.4** $\mathrm{P} = \{3 \pm 5\mathrm{j}\}$;

**7.5** $\mathrm{P} = \{5 \pm 2\mathrm{j}\}$;

**7.6** $\mathrm{P} = \{6 \pm 4\mathrm{j}\}$;

**7.7** $\mathrm{P} = \{7 \pm 2\mathrm{j}\}$;

**7.8** $\mathrm{P} = \{\pm 3\mathrm{j}\}$;

**7.17** $\mathrm{P} = \left\{\frac{\mathrm{j}}{3}; -2\mathrm{j}\right\}$;

**7.18** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{2}{3}\mathrm{j}; -\mathrm{j}\right\}$;

**7.19** $\mathrm{P} = \left\{\frac{2}{3}\mathrm{j}; \mathrm{j}\right\}$;

**7.20** $\mathrm{P} = \left\{-\frac{1}{4} + \left(\pm\frac{\sqrt{15}}{4} - 1\right)\mathrm{j}\right\}$;

**7.21** $\mathrm{P} = \{-1 + \mathrm{j}\}$;

**7.9** $\mathrm{P}=\{8\pm\mathrm{j}\}$;

**7.10** $\mathrm{P}=\{1\pm 5\mathrm{j}\}$;

**7.11** $4+\mathrm{j}$;

**7.12** $-2\mathrm{j}$;

**7.13** $\alpha\left(x^2-4x+13\right)=0;\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

**7.14** $\alpha\left(x^2+1\right)=0;\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

**7.15** $\mathrm{P}=\{0;-4+4\mathrm{j}\}$;

**7.16** $\mathrm{P}=\left\{-\mathrm{j}\pm\mathrm{j}\sqrt{2}\right\}$;

**7.22** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}+\mathrm{j}\right\}$;

**7.23** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{1}{6}-\frac{3\pm\sqrt{5}}{12}\mathrm{j}\right\}$;

**7.24** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{1}{2}\mathrm{j};2\mathrm{j}\right\}$;

**7.25** $\mathrm{P}=\left\{\left(-2\pm\sqrt{2}\right)\mathrm{j}\right\}$.

## *8. <u>Binomické rovnice</u>*

**8.1** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j};-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j};1\right\}$;

**8.2** $\mathrm{P}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j};\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j};-1\right\}$;

**8.3** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j};-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j};\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j};\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{j}\right\}$;

**8.4** $\mathrm{P}=\left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right);\sqrt[3]{2}\left(\cos\pi+\mathrm{j}\cdot\sin\pi\right);\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)\right\}$;

**8.5** $\mathrm{P}=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8}\right);\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right);\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right);\right.$
$\left.\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right\}$;

**8.6** $\mathrm{P}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{j};-\mathrm{j};\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{j}\right\}$;

**8.7** $\mathrm{P}=\left\{\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right);\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right);\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{16}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{17\pi}{16}\right)\right);\right.$
$\left.\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{16}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{25\pi}{16}\right)\right)\right\}$;

**8.8** $\mathrm{P}=\left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right);\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right);\right.$
$\left.\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{14\pi}{9}\right)\right)\right\}$;

**8.9** $\mathrm{P}=\left\{\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right);\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right);\cos\left(\frac{35\pi}{18}\right)+\mathrm{j}\cdot\sin\left(\frac{35\pi}{18}\right)\right\}$;

**8.10** $P=\left\{\sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+j\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right);\sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+j\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right);\sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+j\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right);\right.$
$\left.\sqrt[4]{4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+j\cdot\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\right\};$

**8.11** $P=\{2-2j;-1-3j\}$;

**8.12** $P=\{-3;-1-2j\}$;

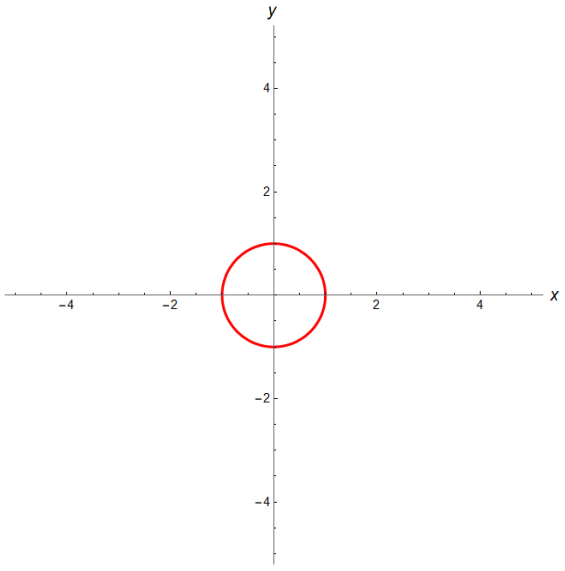
**8.13** $P=\left\{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}j;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right\}$;

**8.14** $P=\left\{-\frac{9}{4}+\frac{7}{4}j;-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}j\right\}$;

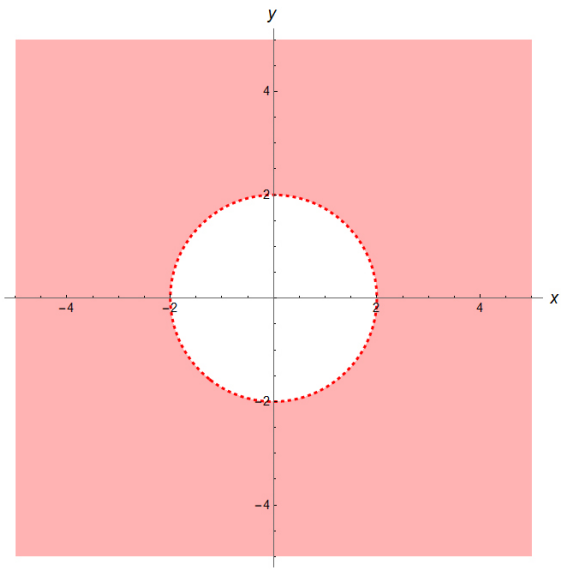
**8.15** $P=\left\{-1-\frac{1}{2}j;-\frac{1}{2}\right\}$.

## *9. … a něco navíc*

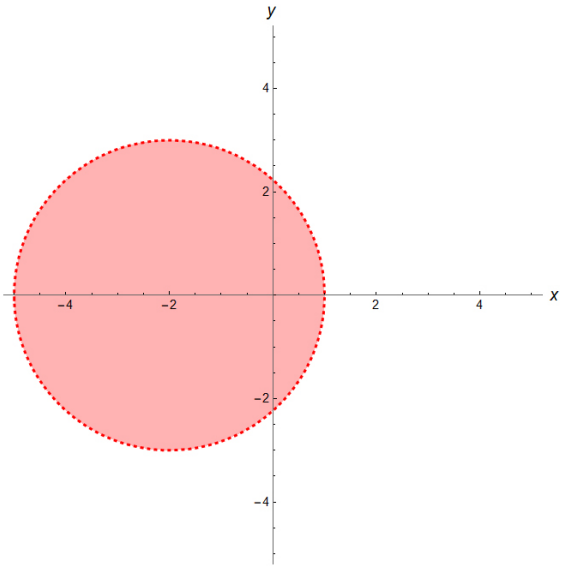
**9.1** viz obr. 3;
**9.2** viz obr. 4;
**9.3** viz obr. 5;
**9.4** viz obr. 6;
**9.5** viz obr. 7;
**9.6** viz obr. 8;
**9.7** viz obr. 9;
**9.8** viz obr. 10;
**9.9** viz obr. 11;
**9.10** viz obr. 12;
**9.11** viz obr. 13;
**9.12** viz obr. 14;
**9.13** viz obr. 15.



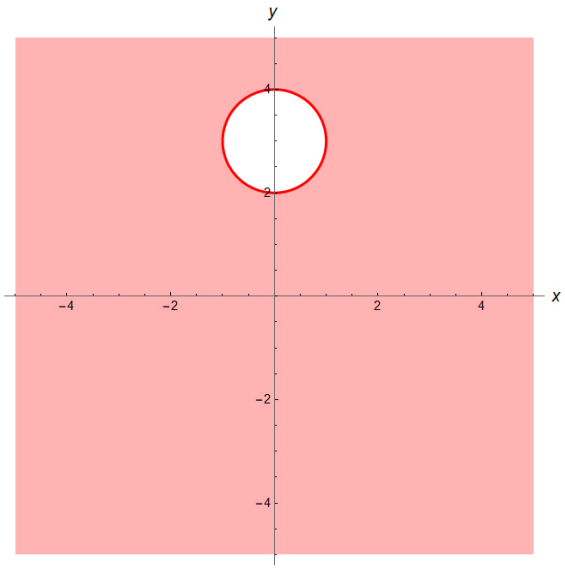

*obr. 3*



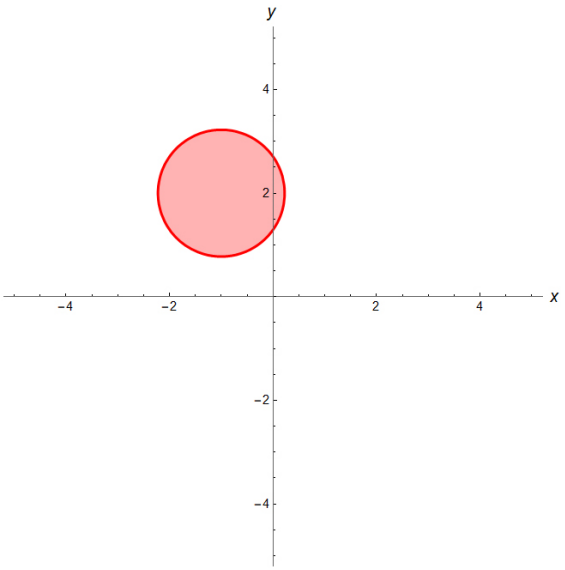

*obr. 4*



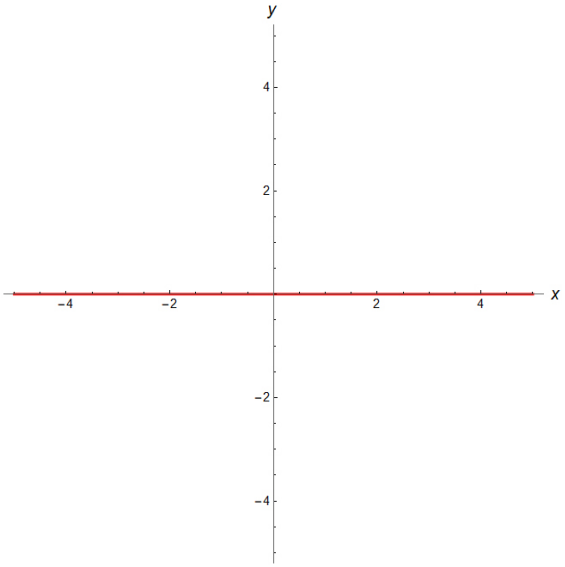

*obr. 5*



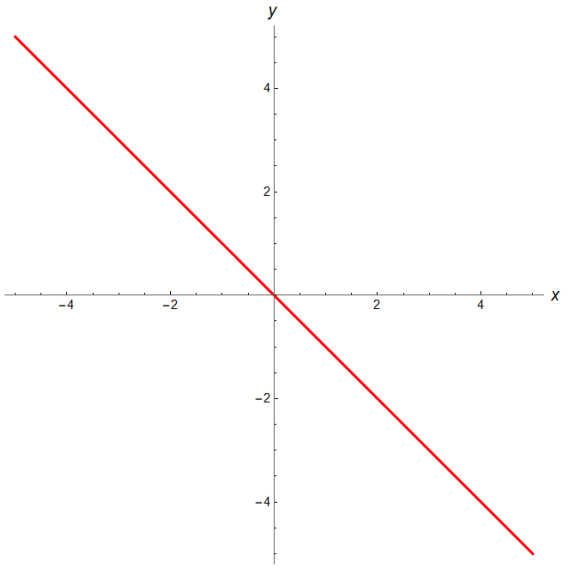

*obr. 6*



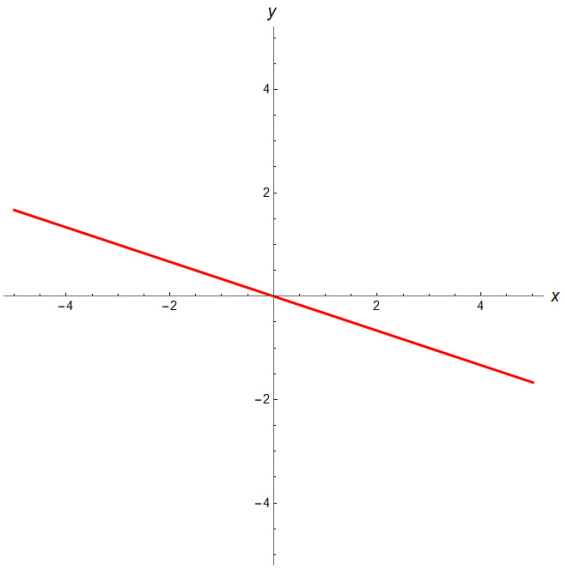

*obr. 7*



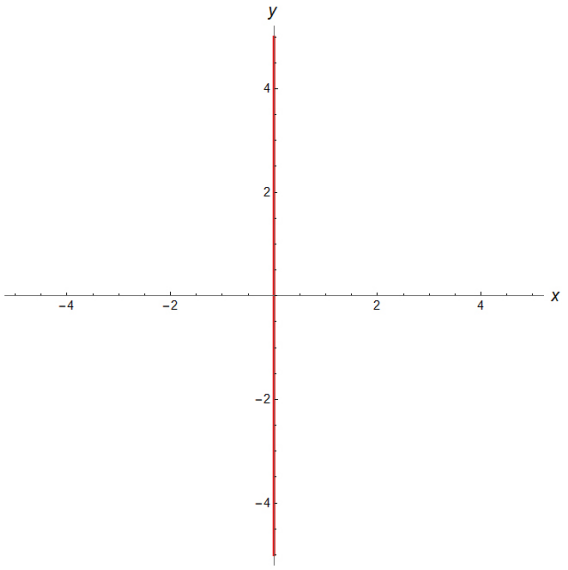

*obr. 8*



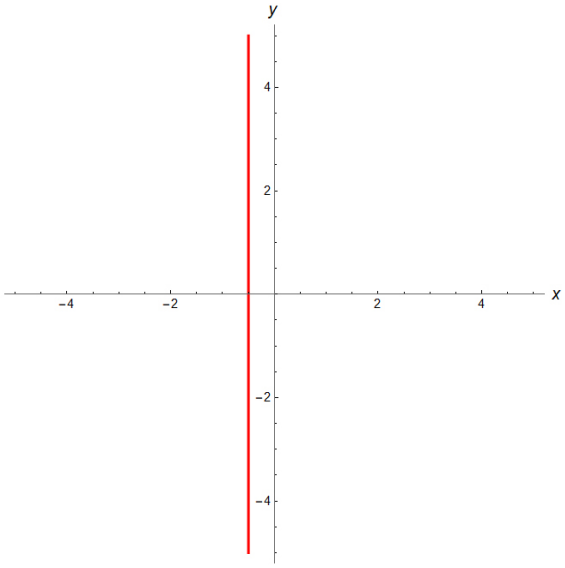

*obr. 9*



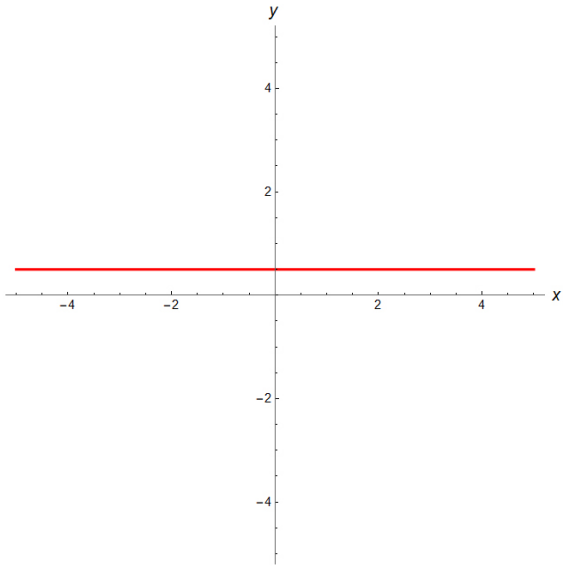

*obr. 10*



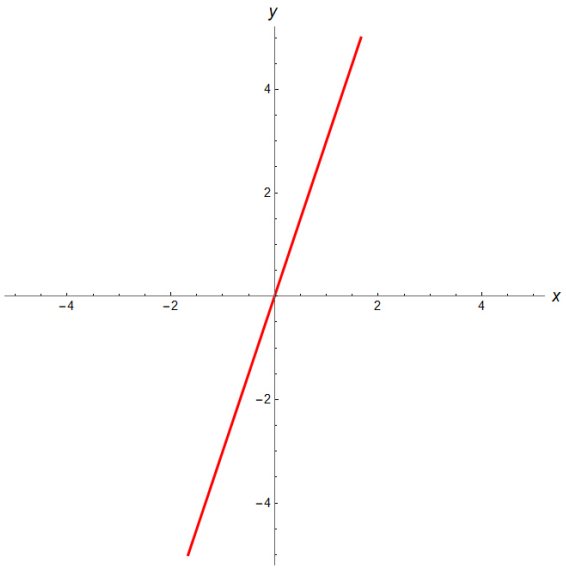

*obr. 11*



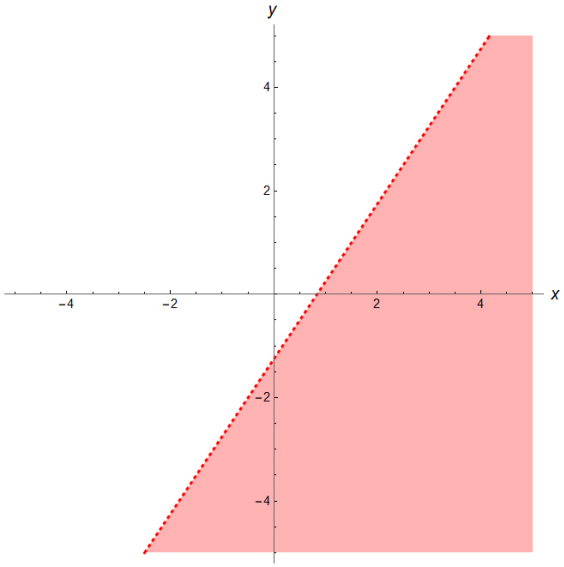

*obr. 12*




*obr. 13*




*obr. 14*




*obr. 15*