1. Kombinatorická pravidla součtu a součinu

1.1 Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá cifra vyskytuje: a) právě jednou, b) nejvýše jednou, c) právě dvakrát, d) nejvýše dvakrát, e) právě třikrát, f) nejvýše třikrát.

1.2 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu není nula a ze zbývajících číslic je každá použita nejvýše jednou. Kolik z těchto čísel je větších než 9000? Kolik jich je menších než 3000?

1.3 Určete počet všech přirozených čtyřciferných čísel, jejichž dekadický zápis je tvořen z číslic 1, 2, 3, 4 a 5, která jsou dělitelná a) pěti, b) dvěma, c) čtyřmi, d) třemi. Číslice se v zadaném čísle neopakují.

1.4 Určete kolika způsoby je možné vybrat na šachovnici 8 x 8 dvě různobarevná políčka tak, aby neležela v téže řadě ani v tomtéž sloupci.

1.5 Z místa *A* do místa *B* vedou tři turistické cesty, z místa *B* do místa *C* vede 5 turistických cest. Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu: a) z *A* do *C*, b) z *A* do *C* a zpět, c) z *A* do *C* a zpět tak, že žádná z cest není použita dvakrát, d) z *A* do *C* tak, že z těchto osmi cest je jedna použita dvakrát, e) z *A* do *C* tak, že z těchto osmi cest jsou dvě použity dvakrát.

1.6 Na vrchol hory vede pět turistických cest a lanovka. Určete počet způsobů, kterými je možné dostat se: a) na vrchol a zpět, b) na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol, c) na vrchol a zpět tak, aby alespoň jednou byla použita lanovka, d) na vrchol a zpět tak, aby lanovka byla použita právě jednou.

1.7 Je dán čtverec *ABCD*. Na každé jeho straně je dáno *n* vnitřních bodů. Určete počet trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v daných bodech (ne ve vrcholech čtverce) na různých stranách čtverce.

2. Variace

2.1 K sestavení vlajky, která má být složená ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté. Kolik vlajek lze z těchto látek na základě uvedených pravidel sestavit? Kolik z nich má modrý pruh? Kolik z nich má modrý pruh uprostřed? Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

2.2 Určete počet všech nejvýše pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou. Kolik z nich je menších než 40000?

2.3 Pro 12 soutěžících je připravena zlatá, stříbrná a bronzová medaile. Kolik různých slavnostních přehledů vítězů je nutno připravit pro titulkovací zařízení? Na medailových pozicích může být vždy jen jeden soutěžící.

2.4 Ve třídě se vyučují následující předměty: Č, ON, D, BI, M, F, CH, DG, V, TV. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh pro tuto třídu na jeden den, má-li den šest vyučovacích hodin a každý předmět má nejvýše jednu hodinu denně? V kolika z nich se vyskytuje matematika? V kolika z nich je matematika první hodinu?

2.5 O telefonním čísle si Pepík zapamatoval pouze toto: je devítimístné, začíná šestkou, neobsahuje žádné dvě číslice stejné a je dělitelné dvaceti pěti. Kolik telefonních čísel připadá v úvahu? Jak dlouho bude muset Pepík v nejhorším případě zkoušet, které je to pravé, trvá-li vytočení jednoho čísla a následné spojení čtvrt minuty? Kolik to bude stát, je-li průměrná denní cena za spojení 2,50 Kč?

2.6 Určete z kolika prvků je možné vytvořit 240 dvoučlenných variací?

2.7 Z kolika prvků je možné vytvořit dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací?

2.8 Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší počet tříčlenných variací a) desetkrát, b) o 150. Jaký je původní počet prvků?

2.9 Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, jejichž dekadický zápis je tvořen z číslic 0, 1, 2, 3, 5, 7. Kolik z těchto čísel končí jedničkou? Kolik těchto čísel je lichých?

2.10 Určete, kolika způsoby lze „přemístit“ písmena slova BEROUNKA, aby nějaká skupina po sobě jdoucích písmen vytvořila a) slovo BERAN, b) slova NERO a KUBA v libovolném pořadí, c) slova BUK a NORA v libovolném pořadí, d) BUK nebo NORA.

3. Permutace

3.1 V recitační soutěži má vystoupit šest dětí: Lucka, Hanka, Iveta, Pepa, Jarda a Franta. Kolik je všech možných pořadí jejich vystoupení? Kolik je pořadí, v nichž vystupuje Hanka po Pepovi? Kolik je pořadí vystoupení, v nichž vystupuje Hanka ihned po Pepíkovi?

3.2 Třída, která má 30 žáků, je na škole v přírodě. Kolika způsoby může nastoupit ráno na rozcvičku a) do řady, b) do řady, v níž je předseda třídy na kraji řady, c) do řady, v níž nestojí Karel a Felix vedle sebe, d) do řady, v níž stojí Karel a Felix vedle sebe a Zdeněk, Milan a Jarda také vedle sebe, e) do kruhu, v němž záleží jen na vzájemném rozmístění žáků třídy, nikoliv na umístění žáků vůči okolním předmětům?

3.3 Určete, kolika způsoby může *n* cvičenců nastoupit a) do řady, b) do řady v níž nejsou cvičenci *A* a *B* vedle sebe, c) do řady, v níž je každý ze cvičenců *A* a *B* na kraji, d) do kruhu (v němž záleží jen na vzájemném rozmístění cvičenců).

3.4 Určete počet všech pěticiferných čísel, která je možné sestavit z číslic 0, 1, 3, 4, 7. Kolik z těchto čísel je a) dělitelných pěti, b) dělitelných šesti, c) větších než 70134? Jednotlivé číslice se v číslech přitom neopakují.

3.5 Zjednodušte výrazy:

a) $\frac{1}{n!}-\frac{3}{(n+1)!}-\frac{n^2-4}{(n+2)!}$ b) $\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}$

3.6 Určete počet prvků tak, aby a) při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvýšil 56krát, b) při zmenšení jejich počtu o 2 se počet jejich permutací zmenšil 20krát.

4. Kombinace

4.1 Kolika způsoby lze na šachovnici 8 x 8 políček vybrat: a) trojici políček, b) trojici políček neležících v tomtéž sloupci, c) trojici políček neležících v tomtéž sloupci ani v téže řadě.

4.2 Určete kolika způsoby je možné ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou: a) právě dvě ženy, b) aspoň dvě ženy, c) žádná žena.

4.3 Určete kolika způsoby je možné ze 30 žáků, z nichž jsou 3 dívky, vytvořit třídní samosprávu ve složení předseda, zástupce předsedy, pokladník, služba na třídní knihu a botníkář, má-li být v třídní samosprávě alespoň jedna dívka? Nezáleží, kdo bude vykonávat jakou funkci.

4.4 Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má 10 knih, o které se zajímá Petr. Kolika způsoby se může Petr s Ivanou vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny?

4.5 Určete kolika způsoby může *m* chlapců a *n* dívek vytvořit taneční pár.

4.6 Určete, kolika způsoby je možné vyplnit tiket sportky.

4.7 Je dán konvexní mnohoúhelník, jehož žádné dvě strany nemají tutéž velikost. Určete, kolika způsoby lze dvě jeho strany vybarvit modře, dvě červeně, dvě žlutě a dvě zeleně.

4.8 Určete, kolika způsoby lze rozdat 18 různých předmětů 5 osobám tak, aby čtyři z nich dostaly po 4 předmětech a pátá dva předměty.

4.9 Určete počet prvků tak, aby počet 4členných kombinací z nich vytvořených byl dvacetkrát větší než počet 2členných variací.

4.10 Určete počet prvků tak, aby při zvětšení počtu prvků o jeden se počet 3členných kombinací z nich vytvořených zvětšil o 21.

5. Vlastnosti kombinačních čísel

5.1 Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

a) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{7}{3}$ b) $\binom{10}{10}+\binom{11}{10}+\binom{12}{10}+\binom{13}{10}$

5.2 V množině přirozených čísel řešte rovnici: $\binom{x}{x-2}+\binom{x}{x-1}=\binom{x+1}{2}$.

5.3 V množině všech přirozených čísel řešte nerovnici: $\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-2}{x-4}=4$.

5.4 V množině přirozených čísel řešte nerovnici: $\binom{n+1}{2}+\binom{n+4}{2}+\binom{n+7}{2}<90$.

6. Binomická věta

6.1 Užitím binomické věty vypočtěte: a) $\left(2x^2-\frac{y}{3}\right)^4$, b) $1{,}02^5$, c) $0{,}99^3$, d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^4$.

6.2 Vypočtěte užitím binomické věty: $(1-3i)^4-(2i)^5$.

6.3 Určete devátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(4x^3-\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^{15}$.

6.4 Určete 4. člen binomického rozvoje výrazu $\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)^5$.

6.5 Určete 3. člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^5+y^3\right)^5$.

6.6 Určete absolutní člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$.

7. Variace s opakováním

7.1 V jisté zemi je SPZ automobilu tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři znaky jsou písmena a další čtyři číslice. Určete, kolik SPZ mají v dané zemi k dispozici, jestliže pro první část značky je možné použít každé z 28 písmen?

7.2 Kolik značek Morseovy abecedy je možné utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až čtyřech prvcích?

7.3 Určete počet všech přirozených čísel menších než milion, které lze dekadicky zapsat pouze pomocí číslic 4 a 6.

7.4 Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číselnou číslici. Těchto číslic je na každém kotouči deset. Kolik nejvíce pokusů musí majitel provést, pokud zapomněl heslo? Jak dlouho mu to bude trvat, jestliže k jednomu pokusu potřebuje 10 sekund?

7.5 Na panelu je k žároviček, z nichž každá může svítit žlutě, zeleně nebo červeně. Kolik různých stavů může panel signalizovat?

8. Permutace s opakováním

8.1 Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA. Určete v kolika z nich a) žádná dvojice sousedních písmen není tvořena dvěma písmeny A, b) žádná pětice sousedních písmen není tvořena pěti písmeny A.

8.2 Kolika způsoby lze přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly?

8.3 Kolika způsoby lze přemístit písmena slova BATERKA tak, aby bylo možné po řadě (tj. zleva doprava) přečíst slovo BARKA, přičemž písmena slova BARKA jsou těsně vedle sebe?

8.4 Kolika způsoby lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků) a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8 x 8, b) na libovolné dvě řady šachovnice 8 x 8?

9. Kombinace s opakováním

9.1 Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto množství krychlí?

9.2 Určete, kolika způsoby je možné vybrat čtyři karty ze sady mariášových karet, jestliže se rozlišují a) pouze „barvy“ jednotlivých karet, b) pouze hodnoty jednotlivých karet.

9.3 Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých hracích kostkách při vrhu třemi kostkami? Jedná se o obvyklé kostky s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách.

9.4 Klenotník vybírá do prstenu tři drahokamy. K dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, jsou-li kameny téhož druhu nerozlišitelné?

10. Pravděpodobnosti jevů

10.1 Z čísel 1 až 100 losujeme 3 čísla. Jaká je pravděpodobnost, že při seřazení tažených čísel v pořadí, v jakém byla tažena, dostaneme a) číslo dělitelné 10, b) číslo dělitelné 20, c) číslo začínající 2.

10.2 Určete, jakou pravděpodobnost výhry v pátém pořadí má jedna sázenka sportky. (Výhra v pátém pořadí znamená, že ze šesti čísel sázející uhodne tři.)

10.3 Odběratel dostává každý týden dodávku 50 kusů zboží. Dodávku přijme, jestliže mezi namátkou vybranými a zkontrolovanými 10 kusy není ani jeden vadný. Jaká je pravděpodobnost, že dodávka bude přijata, obsahuje-li ve skutečnosti a) 5 kusů vadných, b) 10 kusů vadných?

10.4 Dva studenti - Adam a Bedřich - skládají zkoušku v různých termínech u téhož zkoušejícího. Pokaždé si zkoušející losuje ze stejných 20 otázek 3 otázky. Jaká je pravděpodobnost, že Adam a Bedřich a) dostanou tytéž tři otázky, b) nedostanou ani jednu stejnou otázku?

10.5 Červeně natřenou dřevěnou krychli o hraně délky $5\,\mathrm{cm}$ rozřežeme na krychličky o hraně délky $1\,\mathrm{cm}$. Určete, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vytažená krychlička má a) jednu, b) dvě, c) jednu nebo dvě stěny obarvené.

11. Sčítání pravděpodobností

11.1 Házíme dvěma kostkami, bílou a černou. Jev A značí „na bílé kostce padne číslo větší nebo rovné 3“, jev B „na černé kostce padne číslo menší nebo rovné třem“. S jakou pravděpodobností nastává jev A, jev B, jev A i jev B současně, jev A nebo jev B?

11.2 10 studentů, mezi nimiž jsou Adam a Břetislav, má ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Břetislav budou mezi vylosovanými?

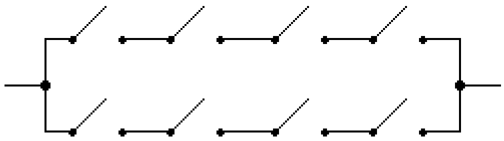
11.3 Při hodu kostkou, nechť jev A znamená, že padnou čísla 1, 2, 3, a jev B nechť znamená, že padnou čísla 2, 4, 6. Určete $P(A \cup B)$ a $P(A' \cap B')$.

11.4 Hodíme 4 kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou buďto samá sudá čísla nebo samá čísla větší než 3?

12. Nezávislé jevy (násobení pravděpodobností)

12.1 Na výrobku se objevují tři druhy vzájemně nezávislých vad. První druh vady se objevuje s pravděpodobností 0,9, druhý druh vady s pravděpodobností 0,05 a třetí druh s pravděpodobností 0,02. Jaká je pravděpodobnost, že výrobek je bez vady? Jaká je pravděpodobnost, že série 10 po sobě jdoucích výrobků je bez vady?

12.2 Na obrázku je schéma elektrického zapojení s 8 vypínači, z nichž každý dáme náhodně a nezávisle do polohy vypnuto nebo zapnuto. Jaká je pravděpodobnost, že soustavou prochází proud?



12.3 Na určité škole propadá v prvním ročníku v průměru 15 % studentů z matematiky, 10 % z fyziky a 5 % z obou těchto předmětů. Jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé?