PANSKÁ

Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Diferenciální a integrální počet

sbírka úloh z matematiky

Jaroslav Reichl

Obsah

1. Elementární funkce

1.1 Jsou dány funkce $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ a $g(x)=x+3$. Určete, zda dané funkce rovnají na množině $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}$.

1.2 Jsou dány funkce $m(x)=\frac{16-x^4}{x^2+4}$ a $n(x)=(x+2)(2-x)$. Určete, zda dané funkce rovnají na množině $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}$.

1.3 Jsou dány funkce $k: y=\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1}$ a $l: y=x-1$. Určete, zda dané funkce rovnají na množině $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}$.

1.4 Jsou dány funkce $u: y=1$ a $v: y=\frac{x}{|x|}$. Určete, zda dané funkce rovnají na množině $\mathrm{M}\subset\mathbb{R}$.

Z následujících funkcí *f* a *g* vytvořte funkci $h=g\circ f$ a $j=f\circ g$, určete jejich definiční obory a funkce načrtněte:

1.5 $f(x)=x+3$ a $g(x)=\sqrt{x}$; **1.6** $f(x)=x^2$ a $g(x)=|x|$; **1.7** $f(x)=\log x$ a $g(x)=-x+1$.

Jsou dány funkce $f: y=2x-3$, $g: y=-4x^3+5$, $h: y=6\sin x-10$, $j: y=\frac{15}{7x+9}$ a $k: y=11\log x-8$. Určete předpis zadané funkce a její definiční obor:

1.8 $l=g\circ h$;
1.9 $m=h\circ k$;
1.10 $n=f\circ j$;
1.11 $p=j\circ k\circ g$;
1.12 $q=g\circ f\circ h$;
1.13 $r=j\circ f\circ k$
1.14 $s=f\circ j\circ h\circ k$;
1.15 $t=g\circ k\circ f\circ j$;
1.16 $u=f\circ g\circ k\circ j$.

2. Limita funkce - výpočty, užití

Vypočtěte následující limity:

2.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+3}{x^2-1}$;
2.2 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+4}{x^2+1}$;
2.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5+10x}{x-5}$;
2.4 $-2.\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\frac{2-4x}{6-8x}$;
2.5 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$;
2.6 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin 2x$;
2.7 $\lim\limits_{x\to -\frac{2\pi}{3}}(-\cos x)$;
2.8 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$;
2.9 $\sqrt{3}.\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\cos x$;
2.10 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$;
2.11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5\cos\frac{x}{2}\right)$;
2.12 $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{-1}{x^2}+\log(x+2)\right)$;

2.13 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$;
2.14 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x+1}$;
2.15 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$;
2.16 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$;
2.17 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{x^3-1}$;
2.18 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-x-2}$;
2.19 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x^2+4x+4}$;
2.20 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x+3}$;
2.21 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$;

2.22 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}+4}{1-x}$;
2.23 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$;
2.26 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x-15}{2-\sqrt{x-1}}$;
2.27 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x-1}{3-\sqrt{8-x}}$;
2.30 $\lim\limits_{x\to -7}\frac{36-12\sqrt{2-x}}{14+2x}$;
2.31 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{4\sqrt{x-1}-8}{5-x}$;

2.24 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

2.25 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$;

2.28 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x+5}{8-2\sqrt{11-x}}$;

2.29 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4\sqrt{x}-8}{8-2x}$;

2.32 $\lim\limits_{x\to \pi^2}\dfrac{\sqrt{2\pi^2-x}-\pi}{\pi^2-x}$;

2.33 $\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$;

2.34 $\lim\limits_{x\to 3a^+}\dfrac{2\sqrt{x-3a}+3\sqrt{x}-\sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$;

2.35 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$;

2.36 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x}$;

2.37 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 4x}{2x}$;

2.38 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos^2 x\sin x}{x}$;

2.39 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\sin^2 2x}{x^2}$;

2.40 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2\, x}{2x^2}$;

2.41 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

2.42 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

2.43 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

2.44 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \mathrm{cotg}\, x$;

2.45 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x.\sin x}$;

2.46 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\mathrm{tg}\, x}{\sin 2x}$;

2.47 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$;

2.48 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\cdot\sin 2x}$;

2.49 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$;

2.50 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\mathrm{tg}\, x}$

2.51 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x}$;

2.52 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

2.53 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, x-\sin x}{x^3}$;

2.54 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\mathrm{tg}^2\, x}{x\cdot\sin x}$;

2.55 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$;

2.56 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

2.57 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

2.58 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(4x^3-2x^2+x-4\right)$;

2.59 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(-4x^3-2x^2+x-4\right)$;

2.60 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(4x^3-2x^2+x-4\right)$;

2.61 $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-4x^3-2x^2+x-4\right)$;

2.62 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}$;

2.63 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-x+15}{3x^3+x^2+x-2}$;

2.64 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2-2x+1}{2x^3-3x^2+2}$;

2.65 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$;

2.66 $\lim\limits_{n\to \infty}\sqrt[2n]{6^n+7^n+9^n}$;

2.67 $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+2x}+x$;

2.68 $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt{x^2+2x}-x$.

2.69 Určete $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x-3}{2x+1}$ a určete, pro která x se budou funkční hodnoty zadané funkce lišit od vypočtené limity o méně než 0,001.

2.70 Určete $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1-2x^2}{2+4x^2}$ a určete, pro která x se budou funkční hodnoty zadané funkce lišit od vypočtené limity o méně než 0,01.

Určete asymptoty grafu zadané funkce:

2.71 $y=x+\dfrac{1}{x}$;

2.72 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

2.73 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$;

2.74 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$;

2.75 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$;

2.76 $y=\dfrac{x^2-x-1}{2x}$;

2.77 $y=\dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$;

2.78 $y=2-\dfrac{3}{x+1}$;

2.79 $y=3x+\dfrac{3}{x-2}$;

2.80 $y=x\cdot 2^{x+3}+4$.

2.81 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y=\dfrac{1}{x}$ v bodě $T=[1;1]$.

2.82 Napište rovnici tečny grafu funkce $g: y = x^2 + 1$ v bodě $T = [-2; y_0]$.

2.83 Napište rovnici tečny grafu funkce $h: y = 2\sin x$ v bodě $T = [0; y_0]$.

3. Derivace - výpočty, tečna grafu funkce

Na základě definice derivace určete derivaci následujících funkcí:

3.1 $f: y = 4$;

3.2 $g: y = -5x + 2$;

3.3 $h: y = x^3 - 2$;

3.4 $k: y = 2x^2 + 4x - 3$;

3.5 $j: y = -\dfrac{1}{x^4}$;

3.6 $l: y = x + \dfrac{2}{x+6}$.

Bez ohledu na definiční obor určete první derivaci funkce:

3.7 $f: y = 3x^4$;

3.8 $g: y = 2\sin x$;

3.9 $h: y = 4\cos x + 3$;

3.10 $j: y = 17\mathrm{e}^x$;

3.11 $k: y = \dfrac{2}{x^3}$;

3.12 $l: y = \sqrt{x}$;

3.13 $m: y = 4\sqrt[3]{x}$;

3.14 $o: y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x^2}$;

3.15 $p: y = \dfrac{x \cdot \sin x + 3x \cdot \ln x - 5x + 2}{x}$;

3.16 $q: y = 2x\left(x^2 + x - 3 + \dfrac{4}{x}\right)$;

3.17 $r: y = 3x\sin x$;

3.18 $s: y = 4\cos x \cdot \sin x$;

3.19 $t: y = 5x \cdot \mathrm{e}^x$;

3.20 $u: y = -2x \cdot \ln x$;

3.21 $v: y = 4x^2 \cdot \cos x$;

3.22 $w: y = -x^3 \cdot \ln x$;

3.23 $z: y = 5\mathrm{e}^x \cdot \sin x$;

3.24 $f: y = 10x^4 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \ln x$;

3.25 $a: y = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\ln x}$;

3.26 $b: y = \dfrac{x^2 + 3x}{\sin x}$;

3.27 $c: y = \dfrac{2x^3 - x^2}{x+1}$;

3.28 $d: y = \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + 1}$;

3.29 $f: y = \dfrac{1 - x^2}{x^3 + 2}$;

3.30 $g: y = \dfrac{3x^2}{\mathrm{e}^x}$;

3.31 $h: y = \dfrac{1 - \mathrm{e}^x}{x^2 - x + 1}$;

3.33 $k: y = \mathrm{tg}\, x$;

3.34 $l: y = \mathrm{cotg}\, x$

3.35 $m: y = \dfrac{x \cdot \sin x}{\cos x}$;

3.36 $n: y = \dfrac{\cos x}{\mathrm{e}^x \cdot \left(x^2 - 1\right)}$;

3.37 $o: y = \sin 2x$;

3.38 $p: y = \mathrm{e}^{x^2}$;

3.39 $q: y = \ln 5x$;

3.40 $r: y = \ln\left(\cos 6x\right)$;

3.41 $s: y = \sin\left(\ln 4x\right)$;

3.42 $t: y = \ln \mathrm{e}^{x^3}$;

3.43 $u: y = \cos^2\left(\mathrm{e}^{3x^2} - 2x\right)$;

3.44 $v: y = \sin\left(2\mathrm{e}^{4x - \cos 3x}\right)$;

3.45 $w: y = \mathrm{e}^{x \ln 2x}$;

3.46 $z: y = 2^{-4x+1}$;

3.47 $\alpha: y = x^x$;

3.48 $a: y = x^{x^2 + 3x}$;

3.49 $\sigma: y = \left(x^2\right)^{x^2}$;

3.50 $b: y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$;

3.51 $c: y = \dfrac{\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-3x}}{2}$;

3.52 $d: y = \sqrt{x^2 + 1}$;

3.53 $f: y = \sqrt[4]{x^2 + \sin^2 3x}$;

3.54 $g: y = \ln \dfrac{2 - x^3}{2 + x^3}$;

3.55 $h: y = \log\left(x^3 \cdot \mathrm{e}^{-\cos 2x}\right)$;

3.56 $j: y = \log_2 \dfrac{x - \sin^3 5x}{x + \sin^3 5x}$;

3.57 $k: y = \ln\left(\dfrac{x + \mathrm{e}^{3x}}{x - \sin 5x}\right)^3$;

3.32 $j: y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$;

3.58 $l: y = \cos^2\left(\dfrac{x^5 + \ln 2x}{\sqrt{4x} - 1}\right)$.

Určete definiční obor funkce a její derivaci v libovolném bodě definičního oboru:

3.59 $y = x^4 + 3x^2 - 2$;

3.60 $y = \dfrac{1}{5x}$;

3.61 $y = \sqrt{x}$;

3.62 $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

3.63 $y = \dfrac{x\sqrt{x^5}}{x^3}$;

3.64 $y = \sin x + 5$;

3.65 $y = -\cos x + \sin x + 2$;

3.66 $y = x^2 + \sin x - \pi$;

3.67 $y = 2x\sqrt{x}$;

3.68 $y = (\sin x)^2$;

3.69 $y = 2x \cdot \sin x$;

3.70 $y = \dfrac{-2}{x} \cdot \cos x$;

3.71 $y = \dfrac{x^3 - x + 2}{x^2}$;

3.72 $y = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$;

3.73 $y = \dfrac{x^2}{x+1}$;

3.74 $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$;

3.75 $y = \left(2x^4 - x\right)^2 - 2$;

3.76 $y = \sin\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$;

3.77 $y = \cos^2\left(x^2 + 3x - 5\right)$;

3.78 $y = \sin^2\left(-x^2 + 3\right)^3$;

3.79 $y = \ln(x + 5)$;

3.80 $y = \ln\left(-x^2 + x\right)$;

3.81 $y = \log^2\left(x^3 + 2x^2 - 15x\right)$;

3.82 $y = \log_\pi^2\left(x^2 - 4\right)^3$;

3.83 $y = \ln\left(\ln\left(\sin x\right)\right)$;

3.84 $y = \ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

3.85 $y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$;

3.86 $y = \dfrac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \ln\dfrac{x\sqrt{3} - 2}{x\sqrt{3} + 2}$;

3.87 $y = 2\mathrm{e}^{3x+2}$;

3.88 $y = -\mathrm{e}^{x^2+x+2}$;

3.89 $y = \mathrm{e}^{x-2} \cdot \operatorname{tg} x^3$;

3.90 $y = 5^{x^2-2} \cdot \operatorname{cotg}^2\left(2x+1\right)^3$;

3.91 $y = 2\sqrt{1-x} \cdot \cos x$;

3.92 $y = \cos x^3 \cdot \operatorname{tg} x^3$;

3.93 $y = \mathrm{e}^{\cos x + \sin x} \cdot \operatorname{cotg} x$;

3.94 $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg} x + x^2} \cdot \left(x^2 + 4x - 7\right)$.

Určete definiční obor zadaných funkcí, nalezněte jejich první derivace a vyjádřete je v co nejjednodušším tvaru ($a = konst. \in \mathbb{R}$):

3.95 $a: y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[6]{x}$;

3.96 $f: y = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} - \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$;

3.97 $b: y = \dfrac{\sqrt{x^3\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x^4}}$;

3.98 $g: y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$;

3.99 $v: y = (4x - 1) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;

3.100 $u: y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$;

3.101 $j: y = \dfrac{4x + 6}{9 - 4x^2}$;

3.102 $k: y = \dfrac{1 + x \cdot \sin x}{1 - x \cdot \sin x}$;

3.103 $f: y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$;

3.104 $n: y = \mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{3\mathrm{e}^{4x}}}$;

3.105 $t: y = \dfrac{4x}{25} + \dfrac{3}{25}\ln\left(4\cos x + 3\sin x\right)$;

3.106 $s: y = \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

3.108 $c: y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

3.109 $q: y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$;

3.110 $r: y = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$;

3.111 $z: y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + \sin ax}{1 - \sin ax} - \dfrac{1}{\sin ax} - \dfrac{1}{3\sin^3 ax}$;

3.112 $l: y = \ln\dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} - \sqrt{x^2 + 1}$;

3.113 $d: y = \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 4\ln\cos x$;

3.114 $v: y = \operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x$;

3.115 $q: y = -2\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}} + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-ax}}\right)$;

3.116 $w: y = \left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{x^3}{2}\right) \cdot \cos 2x + \left(\dfrac{3x}{4} - \dfrac{3}{8}\right) \cdot \sin 2x$;

3.117 $e: y = 2x - \left(1 - x^2\right) \cdot \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

3.118 $m: y = \left(2x^3 + 3x^2\right) \cdot \ln 2x - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$;

3.107 $h: y = \ln \dfrac{3+x}{x-3}$;

3.119 $p: y = \dfrac{3(3x-5)}{16(x-1)} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Určete definiční obor dané funkce a určete její první derivaci:

3.120 $k: y = x^5 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \cdot \sin 2x$;

3.121 $w: y = 5x^4 \cdot \mathrm{e}^{5-2x^6} \cdot \cos\left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right) \cdot \mathrm{tg}\, 6x$;

3.122 $p: y = 4x^6 \cdot \ln \dfrac{x^2}{1-x^2} \cdot \cos^2 5x$;

3.123 $r: y = \dfrac{\left(1+x^2\right) \cdot \mathrm{e}^{4x+\cos 3x}}{1-x^2}$;

3.124 $a: y = \ln\left(\dfrac{1-2\cos x}{1+2\cos x}\right)^3 \cdot \dfrac{\sin^4 2x}{5\mathrm{e}^{-x}+7}$.

Vypočtěte první a druhou derivaci následujících funkcí:

3.125 $f: y = \dfrac{2}{x}$; **3.126** $g: y = \left(x^3 + 3x^2 - 25\right)^2$; **3.127** $y = \dfrac{x^2}{x-1} + 15$; **3.128** $y = \sin^2 3x \cdot \cos 3x$.

3.129 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \dfrac{8}{x^2+4}$ v bodě $\mathrm{T} = [2; y_0]$.

3.130 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce $g: y = 2\sin 3x + 1$ v bodě $\mathrm{T} = \left[\dfrac{\pi}{6}; y_0\right]$.

3.131 Napište rovnici tečny a normály grafu funkce $h: y = x \cdot \ln \dfrac{x}{2}$ v bodě $\mathrm{T} = [2\mathrm{e}; y_0]$.

3.132 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \log x - 3$ v bodě $\mathrm{T} = [1; y_0]$.

3.133 Napište rovnici tečny grafu funkce $f: y = \sin x$ v bodě $\mathrm{T} = \left[\dfrac{\pi}{4}; y_0\right]$.

3.134 Ve kterém bodě má graf funkce $f: y = \sqrt{1-x^2}$ tečnu se směrnicí 1? Napište v tomto bodě rovnici tečny i normály.

3.135 Ve kterém bodě má graf funkce $h: y = \dfrac{x^2}{2} + 2x - 5$ tečnu se směrnicí 3? Napište rovnici příslušné tečny.

3.136 Ve kterém bodě má graf funkce $u: y = x^3 + 3x^2 + x \cdot \sqrt{3} + 1$ tečnu se směrovým úhlem $60°$? Napište rovnici příslušné tečny.

3.137 Ve kterém bodě má graf funkce $p: y = \ln\left(1-x^2\right)$ tečnu rovnoběžnou s přímkou $l: 4x + 3y - 5 = 0$. Napište rovnici příslušné tečny.

3.138 Ve kterém bodě má graf funkce $q: y = \dfrac{x}{\ln x}$ tečnu kolmou na přímku $m: x - 2y + 7 = 0$. Napište rovnici příslušné tečny.

3.139 Ve kterém bodě má graf funkce $b: y = \dfrac{\ln x}{x}$ tečnu rovnoběžnou s osou *x*. Napište rovnici příslušné tečny.

3.140 Ve kterém bodě má graf funkce $k: y = \sqrt{x^2 + 2x}$ tečnu rovnoběžnou s osou *y*. Napište rovnici příslušné tečny.

3.141 Napište rovnice tečen ke grafu funkce $f: y = 4x - x^2$ v jejích průsečících s osou *x* a *y*.

3.142 Určete vzdálenost vrcholu paraboly $y = x^2 - 4x + 5$ od její tečny sestrojené v průsečíku paraboly s osou *y*.

3.143 Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \sin x$ osu *x*?

S využitím rovnice tečny ke grafu příslušné funkce vypočítejte přibližnou hodnotu:

3.144 $\sqrt{10}$; **3.148** $\sqrt[3]{10}$; **3.152** $\sqrt[4]{17}$;

3.145 $\sqrt{39}$; **3.149** $\sqrt[3]{32}$; **3.153** $\sqrt[4]{85}$;

3.146 $\sqrt{78}$; **3.150** $\sqrt[3]{61}$; **3.154** $\sqrt[4]{11}$;

3.147 $\sqrt{98}$; **3.151** $\sqrt[3]{120}$; **3.155** $\sqrt[4]{200}$.

4. Průběh funkce

Určete intervaly monotónnosti následujících funkcí:

4.1 $y = x^3 - 12x$;

4.2 $y = 3x^4 - 8x^3 - 48x^2 + 2$;

4.3 $y = 5x^6 - 6x^5 - 15x^4 - 40$;

4.4 $y = x^5 - x^3$;

4.5 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$;

4.6 $y = \dfrac{1}{x} + x$;

4.7 $y = \dfrac{x}{1-x^2} + 10$;

4.8 $y = \dfrac{x}{1-x} + x$;

4.9 $y = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$;

4.10 $y = 2\mathrm{e}^{-x^2}$;

4.11 $y = x + \sin x$;

4.12 $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce:

4.13 $y = 2x^3 - 3x^2$;

4.14 $y = (2x+3)(x^2+x+1)$;

4.15 $y = x^3 + x^2 + x + 1$;

4.16 $y = \dfrac{\ln x}{4x}$;

4.17 $y = \ln^3 x$;

4.18 $y = \left(\ln\dfrac{x}{2} - 1\right)^2$;

4.19 $y = x - 2\ln x$;

4.20 $y = \sin 2x + 1$;

4.21 $y = \cos^2 x$;

4.22 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

4.23 $y = \mathrm{tg}^2\, x$;

4.24 $y = \mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x$.

4.25 Najděte maximum a minimum funkce $f: y = 2x^3 - 27x^2 - 9$ v intervalu $\langle -4; 2 \rangle$.

Určete intervaly, v nichž je daná funkce konvexní a konkávní a určete jejich inflexní body:

4.26 $y = 4x^2 - 5x + 3$;

4.27 $y = x^3 - 2x^5$;

4.28 $y = x^4 - 4x^3$;

4.29 $y = -x^3 + 6x^2 - 28$;

4.30 $y = \dfrac{1}{x} + 1$;

4.31 $y = \dfrac{1}{(2x+5)^2} - 4$;

4.32 $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$;

4.33 $y = \dfrac{x^2}{x+1} - 10$.

Vyšetřete průběhy funkcí:

4.34 $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x$;

4.35 $f: y = x^3 - 3x^2 + 7$;

4.36 $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$;

4.37 $f: y = \dfrac{5(x-2)}{x^2}$;

4.38 $f: y = \sqrt{x^2 + 4x}$;

4.39 $f: y = x + \sqrt[3]{x^2}$;

4.40 $f: y = x + \dfrac{1}{x}$;

4.41 $f: y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$;

4.46 $f: y = \dfrac{\ln x}{x}$;

4.47 $f: y = \dfrac{x}{\ln x}$;

4.48 $f: y = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x^2}\right)$;

4.49 $f: y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

4.50 $f: y = 2x^2 - \ln x$;

4.51 $f: y = x - \ln(1+x)$;

4.52 $f: y = \ln(1+x^2)$;

4.53 $f: y = x \cdot \ln x$;

4.42 $f: y = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$;

4.43 $f: y = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$;

4.44 $f: y = \mathrm{e}^{x^2}$;

4.45 $f: y = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$;

4.54 $f: y = \sin x + \cos x$;

4.55 $f: y = \sin^2 x$;

4.56 $f: y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$;

4.57 $f: y = x + \cos x$.

4.58 Zjistěte, které z čísel $a = 3{,}14^{\pi}$ a $b = \pi^{3{,}14}$ je větší? (Nápověda: využijte průběh funkce $g: y = \dfrac{\ln x}{x}$).

5. *Využití diferenciálního počtu*

5.1 Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

5.2 Najděte pravoúhelník, který má: a) při daném obvodu maximální obsah, b) při daném obsahu minimální obvod.

5.3 Najděte rovnoramenný trojúhelník, který má při daném obvodu maximální obsah.

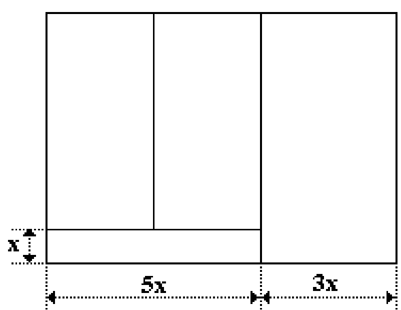
5.4 Do rovnoramenného trojúhelníku vepište pravoúhelník maximálního obsahu. Určete rozměry tohoto pravoúhelníku.

5.5 Ramena a menší základna lichoběžníku mají délku po 10 cm. Určete jeho větší základnu tak, aby obsah lichoběžníku byl největší.

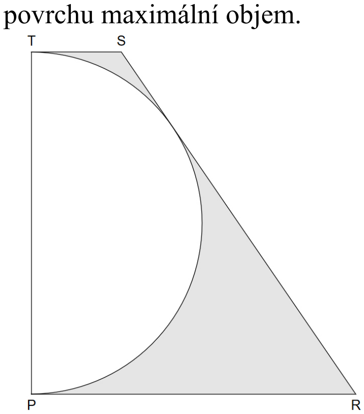
5.6 Drátěným pletivem délky 120 m je třeba ohradit obdélníkový pozemek ze tří stran (na čtvrté straně je dům) tak, aby měl největší obsah. Určete rozměry tohoto pozemku.

5.7 Celková délka všech stěn u domu znázorněného na obr. 1 má být 90 m. Při jaké šířce x chodby bude obsah podlah ostatních tří místností největší?

5.8 Najděte pravidelný čtyřboký hranol, který má při daném povrchu maximální objem.



obr. 1



obr. 2

5.9 Jardova zahrada má tvar obdélníka a v jednom jeho vrcholu sousedí se dvěma domy. Jarda chce pletivem délky 40 m oplotit trojúhelníkovou část zahrady tak, aby využil jako hranici oba domy a současně aby oplotil trojúhelník maximálního obsahu. Jak dlouhé budou strany oploceného trojúhelníka?

5.10 Délka strany PT lichoběžníku PRST je rovna a. Určete délku strany PR tak, aby obsah vyšrafované plochy byl minimální. Polokruh se dotýká strany RS tečně (viz obr. 2).

5.11 V pravoúhlém trojúhelníku LUK je vepsán polokruh ve shodě s obr. 3. Délka strany LU trojúhelníka je 6 j. Určete délku strany LK trojúhelníka tak, aby poměr obsahu polokruhu a obsahu trojúhelníka byl maximální. Jaký je v tom případě poloměr půlkruhu?

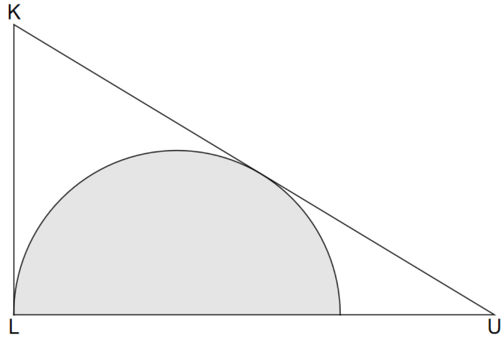
5.12 Do kužele o poloměru podstavy 4 dm a výšce 6 dm je vepsán válec největšího objemu. Zjistěte rozměry válce a jeho objem.

5.13 Kolikrát větší je objem koule než objem největšího válce vepsaného této kouli?

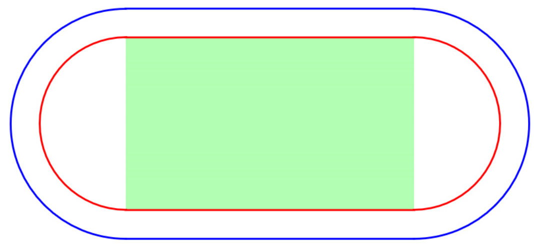
5.14 Na parabole $2x^2 - 2y - 9 = 0$ najděte bod, jehož vzdálenost od počátku soustavy souřadnic je minimální.

5.15 Tvrdý papír tvaru obdélníku má rozměry 60 cm a 28 cm. V rozích se odstřihnou stejné čtverce a zbytek se ohne do tvaru otevřené krabice. Jak dlouhá musí být strana odstřižených čtverců, aby objem krabice byl největší?

5.16 Ve městě plánují stavbu nového stadionu (viz obr. 4). Šířka běžeckého okruhu je 10 m. Určete rozměry obdélníkového trávníku tak, aby jeho plocha byla maximální. Uvažujte, že a) délka vnitřního okraje běžeckého okruhu (červená linka) je 400 m, b) délka vnějšího okraje běžeckého okruhu (modrá linka) je 400 m.



obr. 3



obr. 4

5.17 Jaké rozměry by musela mít podstava krabice na mléko, kdyby se mléko vyrábělo ve dvoulitrových krabicích, aby spotřeba papíru na výrobu krabice byla minimální? Krabici považujte za pravidelný čtyřboký hranol, odpad papíru na lepení, … neuvažujte.

5.18 Zjistěte rozměry otevřeného bazénu se čtvercovým dnem o objemu $32\ \mathrm{m}^3$ tak, aby na vyzdění jeho stěn a dna bylo potřeba co nejmenší množství materiálu.

5.19 Výrobce má vyrobit plechovku ve tvaru uzavřeného válce o objemu $200\ \mathrm{cm}^3$ tak, aby výrobní cena byla minimální. Za jakou cenu lze plechovku vyrobit, jestliže $1\ \mathrm{cm}^2$ stojí 0,5,- Kč? Jaké rozměry bude mít plechovka?

5.20 Tunel má průřez ve tvaru obdélníka s přilehlým půlkruhem. Obvod průřezu je 18 m. Při jakém poloměru půlkruhu bude obsah průřezu největší?

5.21 K baterii o elektromotorickém napětí 10 V a vnitřním odporem $2\ \Omega$ je připojen spotřebič. Při jakém odporu spotřebiče bude jeho výkon maximální?

5.22 Dva světelné zdroje jsou umístěny 30 cm od sebe a poměr jejich svítivosti je 8: 27. Jak daleko od prvního zdroje leží na jejich spojnici bod, který je nejméně osvětlen? Předpokládejte, že světelné zdroje jsou stejného druhu a že paprsky dopadají na uvažované místo kolmo.

5.23 Silnice, která má šířku *b*, je osvětlována lampou, která je nad osou silnice. V jaké výšce nad silnicí musí být lampa, aby okraj silnice byl co nejvíce osvětlen?

5.24 Určete, kdy jsou si nejblíže předmět a skutečný obraz vytvořený spojnou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti *f*.

5.25 Průřez odpadového kanálu má tvar rovnoramenného lichoběžníku. Jeho hloubka je *h*, obsah průřezu *S*. Jaký má být sklon bočních stěn, má-li být spotřeba materiálu na vyzdění kanálu minimální?

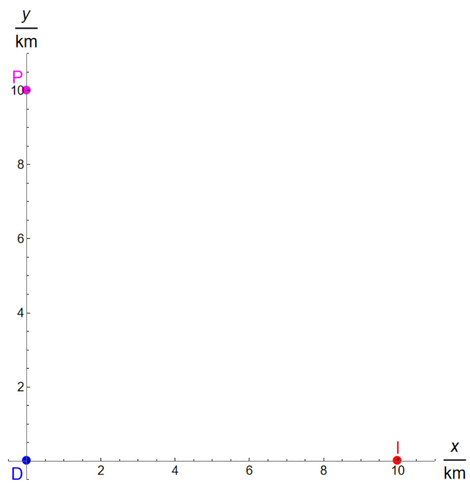
5.26 Základna nakloněné roviny má délku *d*. Určete (při konstantním *d*) výšku nakloněné roviny tak, aby kulička o hmotnosti *m* sjela z vrcholu nakloněné roviny v nejkratším čase. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

5.27 Z bodu D vyjde v 8:00 chodec směrem do bodu I stálou rychlostí o velikosti $4\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Ve stejnou dobu vyjde z bodu I směrem do bodu P druhý chodec stálou rychlostí o velikosti $3\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ (viz obr. 5). V kolik hodin bude vzdálenost mezi nimi minimální?

5.28 Z bodů M a N vyrazí v 9:00 automobily pohybující se stálou rychlostí o velikosti $50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ po vyznačených trajektoriích (viz obr. 6). Za jak dlouho po startu vozidel bude jejich vzájemná vzdálenost minimální?

5.29 Kamil, bydlící v bodě K, a Láďa, bydlící v bodě L, se mají setkat u totemu T stojícím u řeky. Přitom Kamil chce urazit co největší vzdálenost ve srovnání s Láďou. Vypočtěte za uvedených podmínek vzdálenost $|\mathrm{OT}|$ a dráhu, kterou urazí Kamil. Podle obr. 7 platí: $|\mathrm{KL}| = 17\ \mathrm{km}$, $|\mathrm{KO}| = 14\ \mathrm{km}$ a $|\mathrm{LE}| = 6\ \mathrm{km}$. (Nápověda: Hledáme tedy maximum vzdálenosti $|\mathrm{KT}| - |\mathrm{LT}|$.)

5.30 Z drátu délky 1 m vytvoříme drátěný model pravidelného čtyřbokého jehlanu. Určete délku strany podstavy tak, aby obsah pláště takto vytvořeného jehlanu byl maximální. Jaký je v tomto případě obsah pláště?

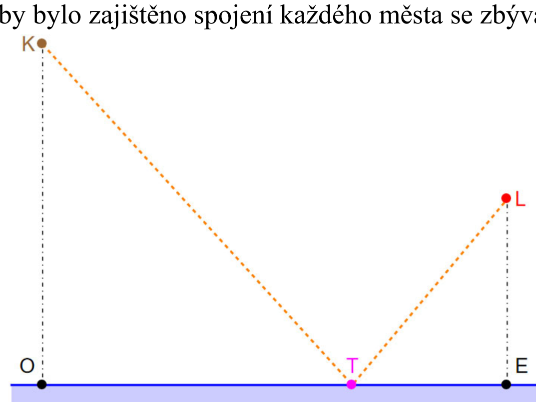


obr. 5

obr. 6

5.31 Drát délky 200 mm rozdělte na dvě části. Jednu potom ohneme do tvaru kruhu, druhou do tvaru čtverce. Rozdělení drátu proveďte tak, aby součet obsahů obou vytvořených ploch byl co nejmenší.

5.32 Čtyři města A, B, C a D leží ve vrcholech čtverce o straně délky *a*. Určete délku nejkratší spojnice těchto měst tak, aby bylo zajištěno spojení každého města se zbývajícími třemi městy.



obr. 7

5.33 Mravenec se pohybuje po ose *x* kartézského systému souřadnic. Svůj pohyb začal v počátku systému souřadnic a pro jeho souřadnici x_M v závislosti na čase platí: $x_\mathrm{M}(t) = \alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma$, kde α, β a γ jsou nenulové konstanty. Vypočtěte časový průběh velikosti rychlosti a velikosti zrychlení mravence. Jaké jednotky mají konstanty α, β a γ?

5.34 Mravenec se pohybuje po ose *x* kartézského systému souřadnic. Svůj pohyb začal v počátku systému souřadnic a pro jeho souřadnici x_M v závislosti na čase platí: $x_\mathrm{M}(t) = 0{,}1 \cdot t^2 - \dfrac{0{,}3}{t}$. Vypočtěte časový průběh velikosti rychlosti a velikosti zrychlení mravence. Vypočtěte velikost jeho rychlosti v čase 2 s po startu a velikost jeho zrychlení v čase 1 s po startu.

5.35 Hybnost hmotného bodu o hmotnosti *m* je popsána vztahem $p(t) = m \cdot \alpha \cdot t + m \cdot \beta \cdot \ln(\gamma \cdot t)$, kde α, β a γ jsou nenulové konstanty. Určete časový průběh velikosti síly, která na uvažovaný hmotný bod působí. Jaké jednotky mají konstanty α, β a γ?

5.36 Okamžitá výchylka *y* tělesa, které kmitá s amplitudou y_m, s úhlovou frekvencí ω a počáteční fází φ_0, je dána vztahem $y = y_\mathrm{m} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Najděte vztah pro časovou závislost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení.

5.37 Okamžitá výchylka *y* tělesa, které kmitá s amplitudou y_m, s úhlovou frekvencí ω a počáteční fází φ_0 v odporujícím prostředí s koeficientem útlumu *b*, je dána vztahem $y = y_\mathrm{m} \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Najděte vztah pro časovou závislost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení. Jakou jednotku má koeficient útlumu *b*?

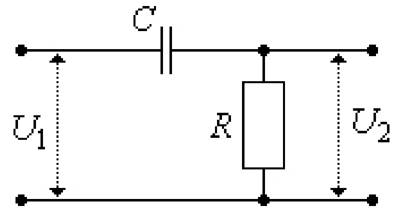
5.38 Magnetický indukční tok Φ v cívce se mění v závislosti na čase podle vztahu $\Phi(t) = \alpha \cdot t$, kde α je nenulová konstanta. Určete průběh indukovaného napětí měřeného na koncích cívky. Jakou jednotku má konstanta α?

5.39 Magnetický indukční tok Φ v cívce se mění v závislosti na čase podle vztahu $\Phi(t) = \alpha \cdot t^3 + \beta \cdot \sin(\gamma \cdot t)$, kde α, β a γ jsou nenulové konstanty. Určete průběh indukovaného napětí měřeného na koncích cívky. Jaké jednotky mají konstanty α, β a γ?

5.40 Magnetický indukční tok Φ v cívce se mění v závislosti na čase podle vztahu $\Phi(t) = L \cdot I_\mathrm{m} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$, kde *L* je indukčnost cívky, I_m amplituda proudu procházejícího cívkou, ω úhlová frekvence tohoto proudu a φ_0 je počáteční fáze proudu. Určete průběh indukovaného napětí měřeného na koncích cívky. Za jak dlouho po dosažení nulové hodnoty dosáhne toto napětí opět nulové hodnoty?

5.41 Nenabitý kondenzátor s kapacitou *C* je připojený přes ochranný rezistor o odporu *R* ke zdroji stejnosměrného napětí U_0. Napětí *u* měřené během nabíjení kondenzátoru na jeho deskách je popsáno vztahem $u = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$. Určete změnu napětí *u* v čase a nakreslete průběh napětí *u* i jeho změny.

5.42 Na vstup zařízení, jehož schéma je zobrazeno na obr. 8, je přivedeno elektrické napětí $U_1 = U_{\mathrm{m}1} \cdot \sin(\omega \cdot t) + U_{\mathrm{m}2} \cdot \sin(3\omega \cdot t) + U_{\mathrm{m}3} \cdot \sin(5\omega \cdot t)$. Jaké napětí U_2 naměříme na výstupu zařízení?



obr. 8

5.43 Vývoj celkového počtu pozitivně testovaných občanů České republiky na nemoc COVID-19 lze v období od 1. 10. 2021 do 28. 8. 2022 popsat aproximační funkcí $f(t) = -34t^2 + 20000t + \dfrac{660000}{t} + 1200000$, kde proměnná *t* představuje dny počítané od počátku sledovaného období. Ve kterých dnech nabýval extremální hodnoty nárůst počtu pozitivně testovaných občanů? Šlo o maximum nebo minimum nárůstu?

6. Neurčitý integrál

K dané funkci určete v jejím definičním oboru primitivní funkci tak, aby graf primitivní funkce procházel daným bodem:

6.1 $f: y = 2\sin x$; $\mathrm{A} = \left[\dfrac{\pi}{3}; 3\right]$;

6.2 $g: y = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}$; $\mathrm{B} = [1; -4]$;

6.3 $h: y = 4\mathrm{e}^x + 5\sin x$; $\mathrm{C} = [0; 5]$;

6.4 $j: y = -1 + \dfrac{4}{x}$; $\mathrm{D} = [\mathrm{e}; -2]$.

Vypočtěte:

6.5 $\int (x^3 + 5x^2 - 4x + 7)\,\mathrm{d}x$;

6.6 $\int (x+3)^2 (x-2)\,\mathrm{d}x$;

6.7 $\int \dfrac{x^5 + 3x^3 + 1}{4x^3}\,\mathrm{d}x$;

6.8 $\int \dfrac{3x^5 + 7x^4 + 4x^3}{2x^4}\,\mathrm{d}x$;

6.9 $\int \dfrac{x\sqrt{x^3} - 2\sqrt[4]{x^5} - 1}{x^2 \sqrt[3]{x^4}}\,\mathrm{d}x$;

6.12 $\int \left(\dfrac{5 - x^2}{x^3}\right)^2 \mathrm{d}x$;

6.13 $\int \left(\dfrac{x + 3a}{a^2}\right)^3 \mathrm{d}x$;

6.14 $\int (4\mathrm{e}^x + \cos x)\,\mathrm{d}x$;

6.15 $\int \dfrac{2\sin 2x}{5\sin x}\,\mathrm{d}x$;

6.16 $\int \dfrac{\sqrt{2}\sin 2x}{3\cos x}\,\mathrm{d}x$;

6.19 $\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$;

6.20 $\int (5\sin^2 x + 5\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$;

6.21 $\int \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

6.22 $\int \dfrac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

6.23 $\int \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}\,\mathrm{d}x$;

6.10 $\int \sqrt[6]{\frac{x^2\sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$;

6.11 $\int \frac{x^3+ax^2+b}{5x}\,\mathrm{d}x$;

6.17 $\int \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

6.18 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

6.24 $\int \mathrm{e}^x\cdot\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$;

6.25 $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$;

6.26 $\int \frac{3-2\cot\mathrm{g}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte:

6.27 $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

6.28 $\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

6.29 $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

6.30 $\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$;

6.31 $\int x^2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$;

6.32 $\int \ln x\,\mathrm{d}x$;

6.33 $\int x^2\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$;

6.34 $\int x^3\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$;

6.35 $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

6.36 $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

6.37 $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$;

6.38 $\int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

6.39 $\int \mathrm{e}^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

6.40 $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$;

6.41 $\int \frac{3\ln x}{5x}\,\mathrm{d}x$;

6.42 $\int x\cdot\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$;

6.43 $\int x\cdot\ln(x-1)\,\mathrm{d}x$;

6.44 $\int \frac{2x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

6.45 $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$;

6.46 $\int x^3\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte:

6.47 $\int (4x+5)^8\,\mathrm{d}x$;

6.48 $\int \frac{1}{(3x+2)^3}\,\mathrm{d}x$;

6.49 $\int \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

6.50 $\int \frac{4x}{\left(x^2-5\right)^3}\,\mathrm{d}x$;

6.51 $\int x\cdot\sqrt{1-4x^2}\,\mathrm{d}x$;

6.52 $\int \sqrt[3]{5-6x}\,\mathrm{d}x$;

6.53 $\int x^3\cdot\sqrt[4]{2+5x^4}\,\mathrm{d}x$;

6.54 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x}}$;

6.55 $\int \frac{x^2}{1-3x^3}\,\mathrm{d}x$;

6.56 $\int \frac{x}{(a-bx)^3}\,\mathrm{d}x$;

6.57 $\int \frac{x-5}{x+2}\,\mathrm{d}x$;

6.58 $\int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

6.59 $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$;

6.60 $\int \frac{4}{\cos^2(3x+2)}\,\mathrm{d}x$;

6.61 $\int x\cdot\sin\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$;

6.62 $\int x^2\cdot\cos\left(2-x^3\right)\mathrm{d}x$;

6.63 $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$;

6.64 $\int \mathrm{e}^{2x+9}\,\mathrm{d}x$;

6.65 $\int x\cdot\mathrm{e}^{1-5x}\,\mathrm{d}x$;

6.66 $\int (x+3)\cdot\mathrm{e}^{x^2+6x}\,\mathrm{d}x$;

6.67 $\int \left(2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)^2\mathrm{d}x$;

6.68 $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

6.69 $\int \mathrm{e}^{x^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x$;

6.70 $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

6.71 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$;

6.72 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$;

6.73 $\int (1+3\cos 2x)\,\mathrm{d}x$;

6.74 $\int (1+3\cos 2x)^2\,\mathrm{d}x$;

6.75 $\int \frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$;

6.76 $\int \frac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x-3\cos x}\,\mathrm{d}x$;

6.77 $\int \frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

6.78 $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$;

6.79 $\int \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

7. Určitý integrál

Vypočtěte:

7.1 $\int_1^2 \left(4x^3-2x+1\right)\mathrm{d}x$;

7.3 $\int_2^4 \left(2\sqrt{x^3}+1\right)\mathrm{d}x$;

7.5 $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$;

7.2 $\int_1^3 \frac{5x^5+3x^2-2x+6}{3x}\,\mathrm{d}x$; **7.4** $0{,}5\int_0^\pi (\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$; **7.6** $\int_{-5}^{10} 4\,\mathrm{d}x$.

7.7 Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$, je-li $f(x)=2x^2$ pro $x\in\langle -1;1\rangle$, $f(x)=x+1$ pro $x\in\langle 1;2\rangle$ a $f(x)=\frac{6}{x}$ pro $x\in\langle 2;5\rangle$.

7.8 Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$, je-li $g(x)=\sin x$ pro $x\in\langle -\pi;\pi\rangle$ a $g(x)=\cos x+1$ pro $x\in\left\langle \pi;\frac{3}{2}\pi\right\rangle$.

Vypočtěte:

7.9 $\int_1^{2\mathrm{e}} \frac{1}{2}\ln x\,\mathrm{d}x$;

7.10 $\int_0^\pi (2x+3)\sin x\,\mathrm{d}x$;

7.11 $\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} x^2\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

7.12 $\int_1^{\mathrm{e}} 4x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$;

7.13 $\int_{\mathrm{e}}^{3\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

7.14 $\int_1^2 x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte:

7.15 $\int_{-4}^{2} 2\sqrt{17-4x}\,\mathrm{d}x$;

7.16 $\int_0^1 \frac{x}{\left(4x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$;

7.17 $\int_{-1}^{1} x^2\left(2x^3-1\right)^{15}\,\mathrm{d}x$;

7.18 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

7.19 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos^2 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$;

7.20 $\int_{-\pi}^{2\pi} 4\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$;

7.21 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin^2\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)}\,\mathrm{d}x$;

7.22 $\int_0^1 3x\cdot\mathrm{e}^{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

7.23 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\cdot e^{-2\cos x}\,\mathrm{d}x$;

7.24 $\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\,\mathrm{d}x$;

7.25 $\int_{\mathrm{e}}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{2x\cdot\ln x}$;

7.26 $\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$;

7.27 $\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

8. Užití integrálního počtu

8.1 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2+2$, $y=0$, $x=-2$ a $x=1$.

8.2 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=(x+2)^3$, $y=0$ a $x=-4$.

8.3 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=-1$ a $x=0$.

8.4 Vypočtěte obsah plochy pod jedním „obloukem“ funkce $y=\sin x$.

8.5 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^3$ a $y=\sqrt{x}$.

8.6 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^3$ a $y=x$.

8.7 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2-6$ a $y=x$.

8.8 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2-1$ a $y=1-x^2$.

8.9 Vypočtěte obsah plochy útvaru, který je ohraničen křivkami $y=9-x^2$ a $y=3+x$.

8.10 Vypočtěte obsah plochy útvaru, který je ohraničen křivkami $y=9-x^2$, $y=3+x$ a osou y.

8.11 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2$ a $y=-x^2+4x$.

8.12 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y=x^2-4x+2$ a $y=-x^2+6x-6$.

8.13 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{4}$ a $y = 2$.

8.14 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 2\sqrt{x}$ a $y = 3\sqrt{x}$.

8.15 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $x^2 + y = 4$ a $y = \frac{3}{x^2}$.

8.16 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^4$, $y = x^2$ a $y = 16$.

8.17 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = x^2 + 3$, $x + y - 9 = 0$ a osami x a y.

8.18 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-2x}$ a $x = 1$.

8.19 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = 3 - x^2$ a $y = 2^x$ a oběma osami kartézského systému souřadnic.

8.20 Vypočtěte obsah menšího z útvarů, který je ohraničen křivkami $y = 3 - x^2$ a $y = 2^x$ a osou y.

8.21 Vypočtěte součet obsahů ploch, které ohraničuje graf funkce $f: y = x^3 - x^2 - 6x$ a osa x.

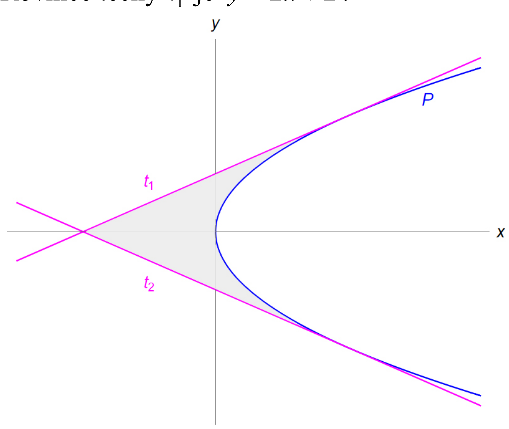
8.22 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{cotg}\, x$ a osou x.

8.23 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{cotg}\, x$, $y = -\mathrm{tg}\, x$ a $y = -\mathrm{cotg}\, x$.

8.24 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \cos x$ a $y = \left|\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x\right|$. (Nápověda: křivky se protnou v bodě $\mathrm{P} = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.)

8.25 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $\mathrm{T}_1 = [0; -3]$ a $\mathrm{T}_2 = [3; 0]$.

8.26 Vypočtěte obsah plochy, která je ohraničena parabolou danou rovnicí $P: y = 4\sqrt{x}$ a jejími tečnami t_1 a t_2 (viz obr. 9). Rovnice tečny t_1 je $y = 2x + 2$.



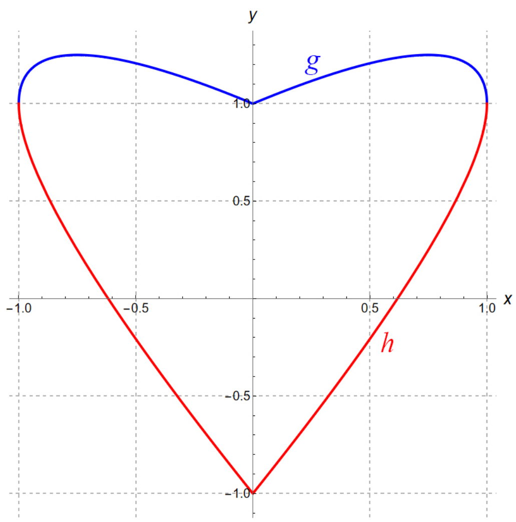
obr. 9

8.27 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 1$ a $y = x^2$.

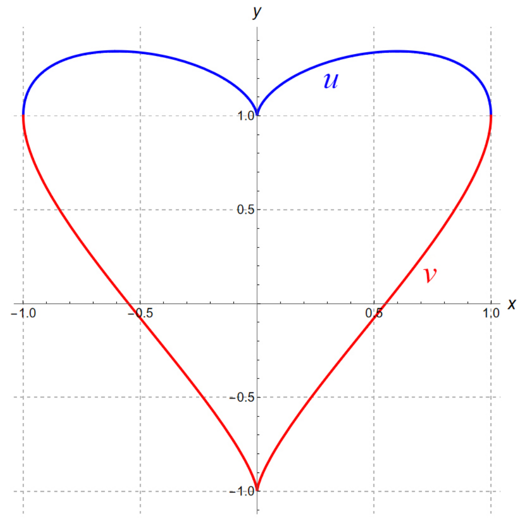
8.28 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného křivkami $g: y = |x| + \sqrt{1 - |x|}$ a $h: y = |x| - \sqrt{1 - |x|}$ (viz obr. 10).

8.29 Vypočtěte obsah plochy útvaru ohraničeného křivkami $u: y = \sqrt[3]{|x|^2} + \sqrt{1 - |x|}$ a $v: y = \sqrt[3]{|x|^2} - \sqrt{1 - |x|}$ (viz obr. 11).

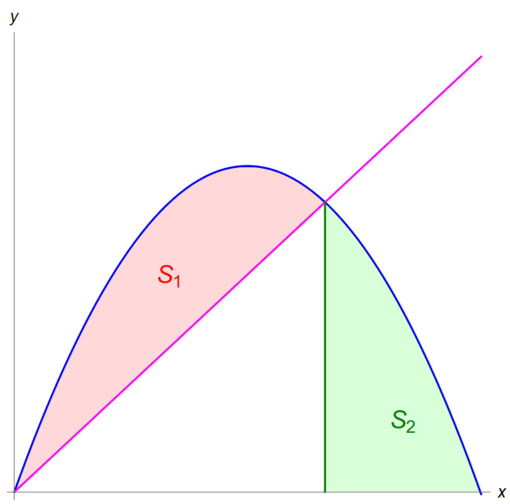
8.30 Parabola zobrazená v grafu na obr. 12 má předpis $y = 6x - x^2$ a $S_1 = \frac{32}{3}\,\mathrm{j}^2$. Určete obsah S_2.



obr. 10



obr. 11



obr. 12

8.31 Napište předpis kvadratické funkce, která protíná osu x kartézského systému souřadnic v bodech $\mathrm{U}=[0;0]$ a $\mathrm{V}=[6;0]$ a která spolu s osou x omezuje obrazec o obsahu $48\ \mathrm{j}^2$.

8.32 Napište předpis kvadratické funkce, která nabývá svého maxima pro $x_{\max}=2$, její graf prochází počátkem soustavy souřadnic a graf této funkce spolu s osou x omezuje rovinný obrazec o obsahu $16\ \mathrm{j}^2$.

8.33 Graf funkce $g: y=\dfrac{1}{x}$ a osa x vymezují v intervalu $\langle \alpha; 1\rangle$ rovinný obrazec. Určete hodnotu kladného reálného parametru α tak, aby obsah popsaného obrazce byl $5\ \mathrm{j}^2$.

8.34 Graf funkce $r: y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ a osa x omezují v intervalu $\langle 0; \omega\rangle$, přičemž $\omega<\pi$, rovinný obrazec. Určete hodnotu kladného reálného parametru ω tak, aby obsah popsaného obrazce byl $1\ \mathrm{j}^2$.

8.35 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=x^2$, $y=0$ a $x=2$ kolem osy x.

8.36 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=\ln x$, $y=0$ a $x=\mathrm{e}$ kolem osy x.

8.37 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y=\dfrac{1}{4}x^2$, $y=1$ a $x=4$ kolem osy x.

8.38 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y = x$ a $y = 0$ kolem osy x.

8.39 Vypočtěte obsah útvaru, který je ohraničen křivkami $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x + y - 5 = 0$, $x = -5$, $x = 4$ a osou x. Vypočtěte též objem tělesa, které vznikne rotací právě popsaného útvaru kolem osy y.

8.40 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $y = x$, $y = 2x$ a $x + y - 6 = 0$ a) kolem osy x, b) kolem osy y.

8.41 Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami $x^2 - y^2 = 4$, $y = 2$ a $y = -2$ kolem osy y.

8.42 Parabolická úseč má základnu délky 4 j a výšku 6 j. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací této úseče kolem: a) její základny, b) kolem její osy.

8.43 Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou v.

8.44 Odvoďte vztah pro výpočet objemu rotačního kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

8.45 Odvoďte vztah pro výpočet objemu komolého kužele s poloměry podstav R a r ($R > r$) a výškou v.

8.46 Vypočtěte objem kulové úseče, která je částí koule o poloměru r a jejíž výška je v.

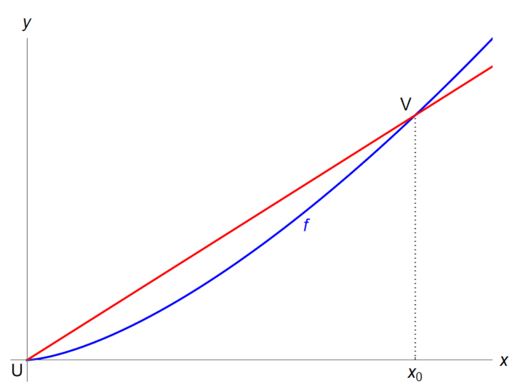
8.47 Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru r.

8.48 Určete délku grafu funkce $h: y = x\sqrt{x}$ pro $x \in \left\langle 0; \frac{7}{3} \right\rangle$.

8.49 Určete délku grafu funkce $r: y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (tzv. řetězovka) pro $x \in \langle 0; 3 \rangle$.

8.50 Určete délku grafu funkce $f: y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ pro $x \in \langle 1; e \rangle$.

8.51 Vypočtěte délku úsečky UV, jestliže předpis funkce f je $f: y = x \cdot \sqrt{x}$ a délka jejího grafu na intervalu $\langle 0; x_0 \rangle$ je $\frac{335}{27}$ j (viz obr. 13).



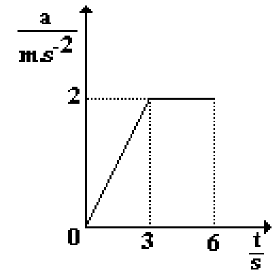
obr. 13

8.52 Určete práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti 250 kg do výšky 300 km nad povrch Země. Hmotnost Země je $5{,}98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, poloměr Země 6378 km a gravitační konstanta $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Při řešení neuvažujte kinetickou energii družice.

8.53 Vypočtěte velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislá obdélníková vrata propusti se základnou 8 m a výškou 6 m. Vypočtěte také tlakovou sílu působící jen na dolní polovinu vrat.

8.54 Vypočtěte velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislou desku ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka ponořenou ve vodě, jejíž základna délky l je v úrovni vodní hladiny a výška je rovna h.

8.55 Vypočtěte velikost tlakové síly, kterou působí voda na svislý polokruh, jehož průměr $2r$ je v úrovni vodní hladiny.



obr. 14

8.56 Čelo přehrady má průřez rovnoramenného lichoběžníku s horní základnou 20 m, dolní základnou 10 m a výškou 6 m. Vypočítejte velikost tlakové síly, kterou působí voda na přehradu.

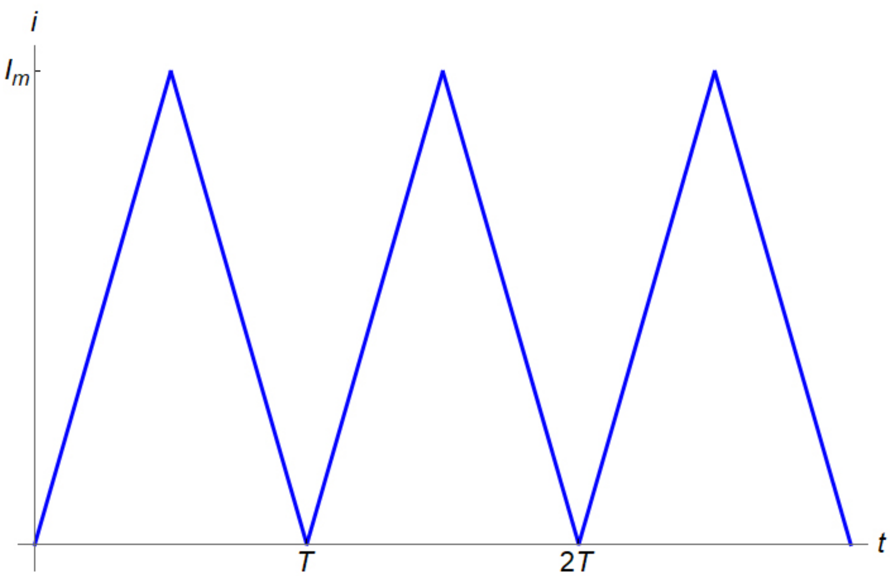
8.57 Určete velikost tlakové síly, která působí na svislou desku tvaru rovnoramenného trojúhelníku, jejíž základna délky a, rovnoběžná s vodní hladinou, je v hloubce h a protilehlý vrchol leží v úrovni vodní hladiny.

8.58 Na obr. 14 je znázorněn graf závislosti velikosti zrychlení na čase pro pohyb hmotného bodu, který začínal svůj pohyb z klidu. Popište pohyb hmotného bodu, určete velikost rychlosti na konci sledovaného úseku a celkovou uraženou dráhu.

8.59 Odvoďte vztah pro práci, kterou vykoná ideální plyn při izotermické expanzi z objemu V_1 na objem V_2.

8.60 Rezistor o odporu R je připojen ke zdroji elektrického proudu sinusového průběhu s periodou T a amplitudou I_{m}. Vypočtěte: a) práci, kterou vykoná elektrický proud za dobu jedné periody; b) efektivní hodnotu elektrického proudu.

8.61 Rezistor o odporu R je připojen ke zdroji elektrického proudu, jehož časový průběh je zobrazen na obr. 15 a má periodu T a amplitudu I_{m}. Napište předpis funkce, kterou je časový průběh elektrického proudu na jedné periodě popsán. Vypočtěte: a) práci, kterou vykoná elektrický proud za dobu jedné periody; b) efektivní hodnotu elektrického proudu.



obr. 15

8.62 Fourierova řada nahrazující spojitou periodickou funkci f má tvar $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \cdot \omega \cdot t)$. Přitom platí: $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega\cdot t)\,\mathrm{d}t$ a $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega\cdot t)\,\mathrm{d}t$. Vypočítejte koeficienty a_0, a_n a b_n pro funkci definovanou předpisem: $f(t) = t$ pro $kT \le t < (2k+1)\frac{T}{2}$; $f(t) = t - T$ pro $(2k+1)\frac{T}{2} \le t < (k+1)T;\ k \in \mathbb{N}_0$.

<u>ŘEŠENÍ</u>

1. <u>Elementární funkce</u>

1.1 $\mathrm{M} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

1.2 $\mathrm{M} = \mathbb{R}$;

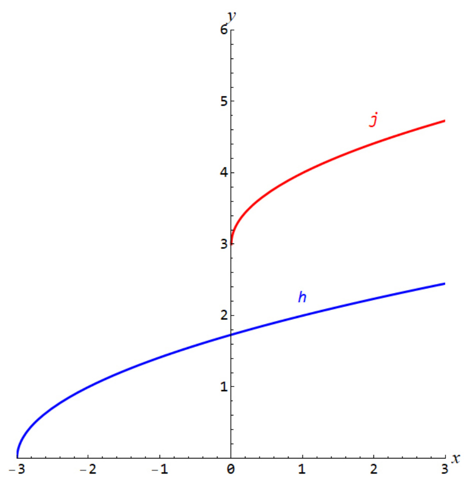
1.3 $\mathrm{M} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

1.4 $\mathrm{M} = \mathbb{R}^+$;

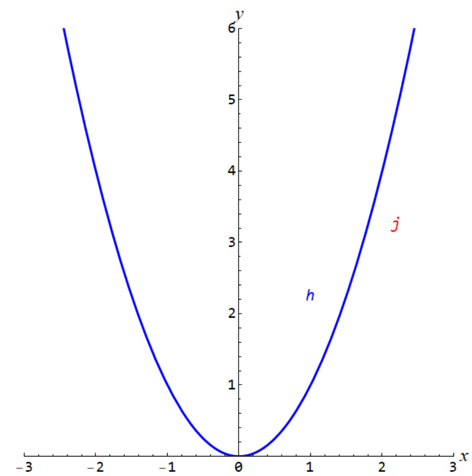
1.5 $h: y = \sqrt{x+3}$; $D_h = \langle -3; \infty)$; $j: y = \sqrt{x} + 3$; $D_j = \langle 0; \infty)$; viz obr. 16;

1.6 $h: y = \left|x^2\right|$; $D_h = \mathbb{R}$; $j: y = |x|^2$; $D_j = \mathbb{R}$; viz obr. 17;

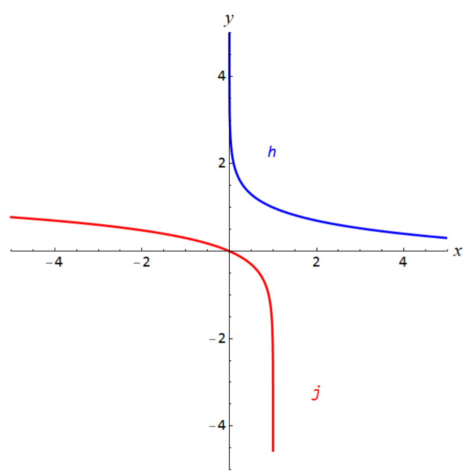
1.7 $h: y = -\log x + 1$; $D_h = \mathbb{R}^+$; $j: y = \log(1-x)$; $D_j = (-\infty; 1)$; viz obr. 18;



obr. 16



obr. 17



obr. 18

1.8 $l: y = -4(6\sin x - 10)^3 + 5$; $\mathrm{D} = \mathbb{R}$;

1.9 $m: y = 6\sin(11\log x - 8) - 10$; $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+$;

1.10 $n: y = \dfrac{30}{7x+9} - 3$; $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{9}{7}\right\}$;

1.11 $p: y = \dfrac{15}{7\left(11\log\left(5-4x^3\right)-8\right)+9}$; $\mathrm{D} = \left(-\infty; \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\right) \setminus \left\{\sqrt[3]{\dfrac{5-10^{\frac{47}{77}}}{4}}\right\}$;

1.12 $q: y = 5 - 4\left(3 + 2(6\sin x - 10)\right)^3$; $\mathrm{D} = \mathbb{R}$;

1.13 $r: y = \dfrac{15}{7\left(2\left(11\log x - 8\right) - 3\right) + 9}$; $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+ \setminus \left\{10^{\frac{62}{77}}\right\}$;

1.14 $s: y = \dfrac{30}{7\left(6\sin\left(11\log x - 8\right) - 10\right) + 9} - 3$; $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+$;

1.15 $t: y = -4\left(11\log\left(\dfrac{30}{7x+9} - 2\right) - 8\right)^3 + 5$; $\mathrm{D} = \left(-\dfrac{9}{7}; \dfrac{1}{7}\right)$;

1.16 $u: y = 2\left(5 - 4\left(11\log\left(\dfrac{15}{7x+9}\right) - 8\right)^3\right) - 3$; $\mathrm{D} = \left(-\dfrac{9}{7}; \infty\right)$.

2. Limita funkce - výpočty, užití

2.1 3;
2.2 $\frac{3}{2}$;
2.3 -1;
2.4 $-\frac{1}{2}$;
2.5 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
2.6 0;
2.7 $\frac{1}{2}$;
2.8 $\frac{3}{2}$;
2.9 1;
2.10 5;
2.12 $\frac{3}{2}$;
2.13 3;
2.14 -6;
2.15 neexistuje;
2.16 $\frac{2}{3}$;
2.17 0;
2.18 4;
2.19 neexistuje;
2.20 -4;
2.21 -3;
2.22 2;
2.23 2;
2.24 ;
2.25 6;
2.26 -12;
2.27 neexistuje;
2.28 4;
2.29 $-\frac{1}{2}$;
2.30 1;
2.31 -1;
2.32 $\frac{1}{2\pi}$;
2.33 neexistuje;
2.34 $\frac{\sqrt{6a}}{3a}$;
2.35 ;
2.36 $\frac{1}{5}$;
2.37 10;
2.38 2;
2.39 28;
2.40 $\frac{3}{2}$;
2.41 8;
2.42 2;
2.43 $\frac{1}{2}$;
2.44 1;
2.45 2;
2.46 ;
2.47 $\frac{1}{4}$;
2.48 $\frac{1}{2}$;
2.49 $\frac{3}{4}$;
2.50 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2.51 $\frac{1}{4}$;
2.52 $4\sqrt{2}$;
2.53 $\frac{1}{2}$;
2.5
2.55 neexistuje;
2.56 $\frac{1}{4}$;
2.57 0;
2.58 ∞;
2.59 $-\infty$;
2.60 $-\infty$;
2.61 ∞;
2.62 ∞;
2.63 $\frac{4}{3}$;
2.64 0;
2.65 -2;
2.66 3;
2.67 ∞;
2.68 1;

2.69 2; $x > \frac{4999}{2}$;
2.70 $-\frac{1}{2}$; $x > \frac{\sqrt{99}}{10}$;
2.71 $x = 0$; $y = x$;
2.72 $y = 0$;
2.73 $x = -1$; $y = x$;
2.74 $y = 1$;
2.75 $y = x$;
2.76 $x = 0$; $y = 0{,}5x - 0{,}5$;
2.77 $y = -x - 1$;
2.78 $y = 2$;
2.79 $x = 2$; $y = 3x$;
2.80 neexistují;
2.81 $x + y - 2 = 0$;
2.82 $4x - y - 3 = 0$;
2.83 $2x - y = 0$.

3. Derivace - výpočty, tečna grafu funkce

3.1 0
3.2 -5
3.3 $3x^2$
3.4 $4x + 4$
3.5 $\frac{4}{x^5}$
3.6 $1 - \frac{2}{(x+6)^2}$

3.7 $f': y = 12x^3$;
3.8 $g': y = 2\cos x$;
3.9 $h': y = -4\sin x$;
3.10 $j': y = 17\mathrm{e}^x$;
3.11 $k': y = -\frac{6}{x^4}$;
3.17 $r': y = 3\sin x + 3x\cos x$;
3.18 $s': y = 4\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$;
3.19 $t': y = 5\mathrm{e}^x\left(1 + x\right)$;
3.20 $u': y = -2\ln x - 2$;
3.21 $v': y = 8x \cdot \cos x - 4x^2 \cdot \sin x$;
3.22 $w': y = -3x^2 \cdot \left(\ln x + 1\right)$;

3.12 $l': y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3.13 $m': y = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

3.14 $o': y = 2 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$;

3.15 $p': y = \cos x + \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

3.16 $q': y = 6x^2 + 4x - 6$;

3.23 $z': y = 5\mathrm{e}^x \cdot (\cos x + \sin x)$;

3.24 $f': y = 10\mathrm{e}^x \cdot (4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \ln x + x^3)$;

3.25 $a': y = \dfrac{2\mathrm{e}^x \cdot \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)}{\ln^2 x}$;

3.26 $b': y = \dfrac{(2x+3)\sin x - (x^2+3x)\cos x}{\sin^2 x}$;

3.27 $c': y = \dfrac{(6x^2-2x)(x+1) - (2x^3 - x^2)}{(x+1)^2}$;

3.28 $d': y = \dfrac{-\sin x \cdot (\sin x + 1) - \cos x \cdot (\cos x - 1)}{(\sin x + 1)^2}$;

3.29 $f': y = \dfrac{-2x(x^3+2) - 3x^2(1-x^2)}{(x^3+2)^2}$;

3.30 $g': y = \dfrac{6x - 3x^2}{\mathrm{e}^x}$;

3.31 $h': y = \dfrac{-\mathrm{e}^x(x^2 - x + 1) - (1 - \mathrm{e}^x)(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}$;

3.32 $j': y = \dfrac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$;

3.33 $k': y = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$;

3.34 $l': y = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$;

3.35 $m: y = \dfrac{(\sin x + x \cdot \cos x) \cdot \cos x + x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x}$;

3.36 $n': y = \dfrac{-\mathrm{e}^x \cdot (x^2 - 1) \cdot \sin x - \mathrm{e}^x \cdot (2x + x^2 - 1) \cdot \cos x}{(\mathrm{e}^x \cdot (x^2-1))^2}$;

3.37 $o': y = 2\cos 2x$;

3.38 $p': y = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$;

3.39 $q': y = \dfrac{1}{x}$;

3.40 $r: y = \dfrac{-6\sin 6x}{\cos 6x}$;

3.41 $s': y = \dfrac{\cos(\ln 4x)}{x}$;

3.42 $t': y = 3x^2$;

3.43 $u': y = -2\cos\left(\mathrm{e}^{3x^2} - 2x\right) \cdot \sin\left(\mathrm{e}^{3x^2} - 2x\right) \cdot \left(6x \cdot \mathrm{e}^{3x^2} - 2\right)$;

3.44 $v': y = \cos\left(2\mathrm{e}^{4x - \cos 3x}\right) \cdot 2\mathrm{e}^{4x - \cos 3x} \cdot (4 + 3\sin 3x)$;

3.45 $w': y = \mathrm{e}^{x \ln 2x} \cdot (\ln 2x + 1)$;

3.46 $z': y = -2^{-4x+1} \cdot 4 \cdot \ln 2$;

3.47 $\alpha': y = x^x \cdot (1 + \ln x)$;

3.48 $a': y = x^{x^2+3x} \cdot ((2x+3) \cdot \ln x + x + 3)$;

3.49 $\sigma': y = 2x \cdot (x^2)^{x^2} \cdot (1 + \ln x^2)$;

3.50 $b' : y = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x$;

3.51 $c' : y = 3\dfrac{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}}{2}$;

3.52 $d' : y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

3.53 $f' : y = \dfrac{x + 3\sin 3x \cdot \cos 3x}{2\sqrt[4]{\left(x^2 + \sin^2 3x\right)^3}}$;

3.54 $g' : y = \dfrac{2+x^3}{2-x^3}\dfrac{-3x^2 \cdot \left(2+x^3\right) - 3x^2 \cdot \left(2-x^3\right)}{\left(2+x^3\right)^2}$;

3.55 $h' : y = \dfrac{3x^2 + 2x^3 \cdot \sin 2x}{x^3 \cdot \ln 10}$;

3.56 $j' : y = \dfrac{x + \sin^3 5x}{\left(x - \sin^3 5x\right)\ln 2}\dfrac{\left(1 - 15 \cdot \sin^2 5x \cdot \cos 5x\right)\left(x + \sin^3 5x\right) - \left(1 + 15 \cdot \sin^2 5x \cdot \cos 5x\right)\left(x - \sin^3 5x\right)}{\left(x + \sin^3 5x\right)^2}$

;

3.57 $k' : y = 3\dfrac{x - \sin 5x}{x + \mathrm{e}^{3x}}\dfrac{\left(1 + 3\mathrm{e}^{3x}\right)\left(x - \sin 5x\right) - \left(x + \mathrm{e}^{3x}\right)\left(1 - 5\cos 5x\right)}{\left(x - \sin 5x\right)^2}$;

3.58 $l' : y = -2\cos\left(\dfrac{x^5 + \ln 2x}{\sqrt{4x} - 1}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x^5 + \ln 2x}{\sqrt{4x} - 1}\right) \cdot \dfrac{\left(5x^4 + \dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{4x} - 1\right) - \left(x^5 + \ln 2x\right)\dfrac{2}{\sqrt{4x}}}{\left(\sqrt{4x} - 1\right)^2}$;

3.59 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 + 6x$;

3.60 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y' = -\dfrac{1}{5x^2}$;

3.61 $\mathrm{D} = \langle 0; \infty)$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (pro $x \in (0; \infty)$);

3.62 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

3.63 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3.64 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = \cos x$;

3.65 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = \sin x + \cos x$;

3.66 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = 2x + \cos x$;

3.67 $\mathrm{D} = \langle 0; \infty)$; $y' = 3\sqrt{x}$ (pro $x \in (0; \infty)$);

3.68 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = \sin 2x$;

3.69 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = 2\sin x + 2x\cos x$;

3.70 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y' = 2\dfrac{x \cdot \sin x + \cos x}{x^2}$;

3.71 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $y' = \dfrac{x^3 + x - 4}{x^3}$;

3.72 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $y' = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;

3.74 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $y' = \dfrac{-1}{1 - \cos x}$;

3.75 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = 2\left(2x^4 - x\right)\left(8x^3 - 1\right)$;

3.76 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = \left(3x^2 - 4x + 1\right) \cdot \cos\left(x^3 - 2x^2 + x\right)$;

3.77 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = -\left(2x + 3\right) \cdot \sin\left(2\left(x^2 + 3x - 5\right)\right)$;

3.78 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = -6x\left(-x^2 + 3\right)^2 \cdot \sin\left(2\left(-x^3 + 3\right)^3\right)$;

3.79 $\mathrm{D} = (-5; \infty)$; $y' = \dfrac{1}{x + 5}$;

3.80 $\mathrm{D} = (0; 1)$; $y' = \dfrac{2x - 1}{x^2 - x}$;

3.81 $\mathrm{D} = (-5; 0) \cup (3; \infty)$;

$y' = 2\dfrac{\left(3x^2 + 4x - 15\right) \cdot \log\left(x^3 + 2x^2 - 15x\right)}{\left(x^3 + 2x^2 - 15x\right) \cdot \ln 10}$;

3.82 $\mathrm{D} = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$; $y' = \dfrac{12x \cdot \log_\pi\left(x^2 - 4\right)^3}{\left(x^2 - 4\right) \cdot \ln \pi}$;

3.83 $\mathrm{D} = \emptyset$; derivace neexistuje;

3.84 $\mathrm{D} = \left(2k\pi; (2k+1)\pi\right); k \in \mathbb{Z}$; $y' = \dfrac{1}{\sin x}$;

3.85 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}$;

3.73 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$;

3.86 $\mathrm{D} = \left(-\infty; -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \infty\right)$; $y' = \dfrac{\sqrt{2}}{3x^2 - 4}$;

3.87 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = 6\mathrm{e}^{3x+2}$;

3.88 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $y' = -(2x+1) \cdot \mathrm{e}^{x^2+x+2}$;

3.89 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[3]{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}}; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $y' = \mathrm{e}^{x-2} \cdot \left(\operatorname{tg} x^3 + \dfrac{3x^2}{\cos^2 x^3}\right)$;

3.90 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{k\pi} - 1\right); k \in \mathbb{Z}\right\}$; $y' = 2.5^{x^2-2}.\operatorname{cotg}(2x+1)^3 \left(x.\operatorname{cotg}(2x+1)^3.\ln 5 - \dfrac{6(2x+1)^2}{\sin^2 (2x+1)^3}\right)$;

3.91 $\mathrm{D} = (-\infty; 1\rangle$; $y' = -\sqrt{1-x}\left(\dfrac{\cos x}{1-x} + 2\sin x\right)$ (pro $x \in (-\infty; 1)$);

3.92 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt[3]{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}}; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $y' = 3x^2.\cos x^3$;

3.93 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $y' = e^{\cos x + \sin x}\left((\cos x - \sin x).\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

3.94 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $y' = e^{\operatorname{tg} x + x^2}\left(\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2x\right)\left(x^2 + 4x - 7\right) + 2x + 4\right)$;

3.95 $\mathrm{D} = \mathbb{R}_0^+$; $a': y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{2}{3\sqrt[6]{x^5}}$;;

3.96 $\mathrm{D} = \mathbb{R}_0^+$; $f': y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

3.97 $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+$; $b': y = \dfrac{5}{12\sqrt[12]{x^7}}$;

3.98 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $g': y = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{12}{x^4}$;

3.99 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $v': y = \mathrm{e}^{x^{-1}} \cdot \left(4 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$;

3.100 $\mathrm{D} = \mathbb{R}_0^+$; $u': y = \dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot \left(1 + 2\sqrt{x}\right)^2}$;

3.101 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{3}{2}\right\}$; $j': y = \dfrac{4}{(3-2x)^2}$;

3.102 $\mathrm{D}: 1 - x \cdot \sin x \neq 0$; $k': y = \dfrac{2(\sin x + x \cdot \cos x)}{(1 - x \cdot \sin x)^2}$;

3.103 $\mathrm{D} = \mathbb{R}^+$; $f': y = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;

3.104 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $n': y = 24\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{3\mathrm{e}^{4x}}} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{e}^{4x}} \cdot \mathrm{e}^{4x}$;

3.105 $\mathrm{D}: 4\cos x + 3\sin x > 0$; $t': y = \dfrac{\cos x}{4\cos x + 3\sin x}$;

3.106 $\mathrm{D} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}}\left(k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$; $s': y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$;

3.107 $\mathrm{D} = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$; $h': y = \dfrac{6}{9 - x^2}$;

3.108 $\mathrm{D}=\left(-1;1\right)$; $c':y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

3.109 $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$; $q':y=\dfrac{1}{\cos x}$;

3.110 $\mathrm{D}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2};2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$; $r':y=\dfrac{1}{\cos x}$;

3.111 $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2a};\dfrac{k\pi}{a};k\in\mathbb{Z}\right\}$; $z':y=\dfrac{a}{\cos x\cdot\sin^4 ax}$;

3.112 $\mathrm{D}=\mathbb{R}^+$; $l':y=-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$;

3.113 $\mathrm{D}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2};\left(2k+3\right)\dfrac{\pi}{2}\right)$; $d':y=4\operatorname{tg}^5 x$;

3.114 $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$; $v':y=\dfrac{\cos 2x}{\sin^6 x}$;

3.115 $\mathrm{D}:\mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-ax}}>0$; $q':y=\dfrac{a\cdot\mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}}\cdot\sqrt{1+\mathrm{e}^{-ax}}}{1+\mathrm{e}^{-ax}}$;

3.116 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; $w':y=\dfrac{3}{2}x\cdot\left(1-x\right)\cdot\cos 2x+\dfrac{1}{4}\left(4x^3-6x+3\right)\cdot\sin 2x$;

3.117 $\mathrm{D}=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;\infty\right)$; $e':y=2x\cdot\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

3.118 $\mathrm{D}=\mathbb{R}^+$; $m':y=6x\cdot\left(x+1\right)\cdot\ln 2x$;

3.119 $\mathrm{D}=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;\infty\right)$; $p':y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\left(x-1\right)^3}$;

3.120 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; $k':y=2x^5\cdot\mathrm{e}^{-3x}\cdot\cos 2x+5x^4\cdot\mathrm{e}^{-3x}\cdot\sin 2x-3x^5\cdot\mathrm{e}^{-3x}\cdot\sin 2x$;

3.121 $\mathrm{D}=\left(0;1\right)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{4}\right\}$;

$$w':y=30x^4\cdot\mathrm{e}^{5-2x^6}\cdot\cos\left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 6x}+20x^3\cdot\mathrm{e}^{5-2x^6}\cdot\cos\left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\cdot\operatorname{tg}6x-$$

$$-60x^9\cdot\mathrm{e}^{5-2x^6}\cdot\cos\left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\cdot\operatorname{tg}6x+\frac{5x^3\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{5-2x^6}\cdot\sin\left(\ln\left(1-\sqrt{x}\right)\right)\cdot\operatorname{tg}6x}{2\left(1-\sqrt{x}\right)};$$

3.122 $\mathrm{D}=\left(-1;1\right)\setminus\left\{0\right\}$;

$$p:y=8x^5\left(\frac{x^2}{1-x^2}+1\right)\cdot\cos^2 5x+24x^5\cdot\ln\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\cos^2 5x-20x^6\cdot\ln\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\sin 10x;$$

3.123 $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm1\right\}$; $r':y=\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{4x+\cos 3x}}{1-x^2}+\dfrac{2x\left(1+x^2\right)\cdot\mathrm{e}^{4x+\cos 3x}}{\left(1-x^2\right)^2}+\dfrac{\left(1+x^2\right)\cdot\mathrm{e}^{4x+\cos 3x}\cdot\left(4-3\sin 3x\right)}{1-x^2}$;

3.124 $\mathrm{D}=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\cup\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$;

$$a':y=8\cos 2x\cdot\ln\left(\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}\right)^3\cdot\frac{\sin^4 2x}{5\mathrm{e}^{-x}+7}+5\mathrm{e}^{-x}\cdot\ln\left(\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}\right)^3\cdot\frac{\sin^4 2x}{\left(5\mathrm{e}^{-x}+7\right)^2}+$$

$$+3\left(1+2\cos x\right)\cdot\ln\left(\frac{1-2\cos x}{1+2\cos x}\right)^2\cdot\frac{2\left(1-2\cos x\right)\cdot\sin x+2\left(1+2\cos x\right)\cdot\sin x}{\left(1+2\cos x\right)^2}\cdot\frac{\sin^4 2x}{\left(5\mathrm{e}^{-x}+7\right)\left(1-2\cos x\right)};$$

3.125 $y' = -\frac{2}{x^2}$; $y'' = \frac{4}{x^3}$;

3.126 $y' = 2\left(x^3 + 3x^2 - 25\right)\left(3x^2 + 6x\right)$; $y'' = 2\left(3x^2 + 6x\right)^2 + 2\left(x^3 + 3x^2 - 25\right)\left(6x + 6\right)$;

3.127 $y' = \frac{x^2 - 2x}{\left(x-1\right)^2}$; $y'' = \frac{2}{\left(x-1\right)^3}$;

3.128 $y' = 3\cos 3x \cdot \sin 6x - 3\sin^3 3x$; $y'' = -9\sin 3x \cdot \sin 6x + 18\cos 3x \cdot \cos 6x - \frac{27}{2}\sin 6x$;

3.129 $x + 2y - 4 = 0$;

3.130 t: $y - 3 = 0$, n: $x - \frac{\pi}{6} = 0$;

3.131 t: $2x - y - 2\mathrm{e} = 0$, n: $x + 2y - 6\mathrm{e} = 0$;

3.132 $x - y\ln 10 - 3\ln 10 - 1 = 0$;

3.133 $x\sqrt{2} - 2y + \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

3.134 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$: t: $x - y = 0$, n: $x + y - \sqrt{2} = 0$; $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: t: $x - y + \sqrt{2} = 0$, n: $x + y = 0$;

3.135 $\mathrm{T} = \left[1; -\frac{5}{2}\right]$; $6x - 2y - 11 = 0$;

3.136 $\mathrm{T} = \left[-2; 5 - 2\sqrt{3}\right]$; $x\sqrt{3} - y + 5 = 0$; $\mathrm{T} = \left[0; 1\right]$; $x\sqrt{3} - y + 1 = 0$;

3.137 $\mathrm{T} = \left[\frac{1}{2}; \ln\frac{3}{4}\right]$; $4x + 3y - 2 - 3\ln\frac{3}{4} = 0$;

3.138 $\mathrm{T} = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}; -\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$; $2\mathrm{e} \cdot x + \mathrm{e} \cdot y - 1 = 0$; $\mathrm{T} = \left[\sqrt{\mathrm{e}}; 2\sqrt{\mathrm{e}}\right]$; $2x + y - 4\sqrt{\mathrm{e}} = 0$;

3.139 $\mathrm{T} = \left[\mathrm{e}; \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$; $\mathrm{e} \cdot y - 1 = 0$;

3.140 $\mathrm{T} = \left[-2; 0\right]$; $x + 2 = 0$; $\mathrm{T} = \left[0; 0\right]$; $x = 0$;

3.141 $\left[0; 0\right]$: $4x - y = 0$; $\left[4; 0\right]$: $4x + y - 16 = 0$;

3.142 $\frac{16\sqrt{37}}{37}$;

3.143 $\pm\frac{\pi}{4}$;

3.144 $\frac{19}{6} \doteq 3{,}167$;

3.145 $\frac{25}{4} = 6{,}25$;

3.146 $\frac{53}{6} \doteq 8{,}833$;

3.147 $\frac{99}{10} = 9{,}9$;

3.148 $\frac{13}{6} \doteq 2{,}167$;

3.149 $\frac{86}{27} \doteq 3{,}185$;

3.150 $\frac{63}{16} \doteq 3{,}938$;

3.151 $\frac{74}{15} \doteq 4{,}933$;

3.152 $\frac{65}{32} \doteq 2{,}031$;

3.153 $\frac{82}{27} \doteq 3{,}037$;

3.154 $\frac{59}{32} \doteq 1{,}844$;

3.155 $\frac{121}{32} \doteq 3{,}781$.

4. Průběh funkce

Ve výsledcích úloh 4.1 až 4.24 je uvedena spolu s definičním oborem pouze množina, v níž je zadaná funkce rostoucí. Množina, v níž je funkce klesající, tvoří doplněk do definičního oboru dané funkce.

4.1 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; -2\right), x \in \left(2; \infty\right)$;

4.2 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-2; 0\right), x \in \left(4; \infty\right)$;

4.3 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-1; 0\right), x \in \left(2; \infty\right)$;

4.4 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{5}\right), x \in \left(\frac{\sqrt{15}}{5}; \infty\right)$;

4.7 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; 1\right\}$; $x \in \mathrm{D}$;

4.8 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$; $x \in \mathrm{D}$;

4.9 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; 1\right)$;

4.10 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; 0\right)$;

4.11 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\left(2k+1\right)\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$;

4.5 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in (-1; 1)$;

4.12 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $x \in (0; \mathrm{e}^2)$;

4.6 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x \in (-\infty; -1), x \in (1; \infty)$;

4.13 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in (-\infty; 0), x \in (1; \infty)$; $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 1$;

4.14 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \mathrm{D}$; extrémy neexistují;

4.15 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \mathrm{D}$; extrémy neexistují;

4.16 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $x \in (0; \mathrm{e}^4)$; $x_{\max} = \mathrm{e}^4$, minimum neexistuje;

4.17 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $x \in \mathrm{D}$; extrémy neexistují;

4.18 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $x \in (2\mathrm{e}; \infty)$; $x_{\min} = 2\mathrm{e}$, maximum neexistuje;

4.19 $\mathrm{D} = (0; \infty)$; $x \in (2; \infty)$; $x_{\min} = 2$, maximum neexistuje;

4.20 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((4k-1)\frac{\pi}{4}; (4k+1)\frac{\pi}{4} \right)$; $x_{\max} \in \left\{ \frac{\pi}{4}(4k+1); k \in \mathbb{Z} \right\}$, $x_{\min} \in \left\{ \frac{\pi}{4}(4k-1); k \in \mathbb{Z} \right\}$;

4.21 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((2k+1)\frac{\pi}{2}; (k+1)\pi \right)$; $x_{\max} \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, $x_{\min} \in \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1); k \in \mathbb{Z} \right\}$;

4.22 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((8k+1)\frac{\pi}{4}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right) \cup \left((4k+3)\frac{\pi}{2}; 2(k+1)\pi \right) \cup \left((2k+1)\pi; (8k+5)\frac{\pi}{4} \right)$;

$x_{\max} \in \left\{ \frac{\pi}{2}(4k+1); \frac{\pi}{4}(8k+5); 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$, $x_{\min} \in \left\{ \frac{\pi}{4}(8k+1); \frac{\pi}{2}(4k+3); \pi(2k+1); k \in \mathbb{Z} \right\}$;

4.23 $\mathrm{D} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1); k \in \mathbb{Z} \right\}$; $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(k\pi; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$; $x_{\min} \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, maxima neexistuje;

4.24 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \mathrm{D}$; extrémy neexistují;

4.25 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -4$;

Ve výsledcích úloh 4.26 až 4.33 je uvedena spolu s definičním oborem pouze množina, v níž je zadaná funkce konvexní. Množina, v níž je funkce konkávní, tvoří doplněk do definičního oboru dané funkce.

4.26 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \mathrm{D}$; inflexní bod neexistuje;

4.27 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{10} \right), x \in \left(0; \frac{\sqrt{15}}{10} \right)$; $x_{\inf} \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{10}; 0; \frac{\sqrt{15}}{10} \right\}$;

4.28 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in (-\infty; 0), x \in (2; \infty)$; $x_{\inf} \in \{0; 2\}$;

4.29 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; $x \in (-\infty; 2)$; $x_{\inf} = 2$;

4.30 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x \in (0; \infty)$; inflexní bod neexistuje;

4.31 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{5}{2} \right\}$; $x \in \mathrm{D}$; inflexní bod neexistuje;

4.32 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $x \in (-\infty; -3)$; inflexní bod neexistuje;

4.33 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $x \in (-\infty; -1)$; inflexní bod neexistuje;

4.34 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; viz obr. 19;

4.35 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; viz obr. 20;

4.36 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; viz obr. 21;

4.37 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; viz obr. 22;

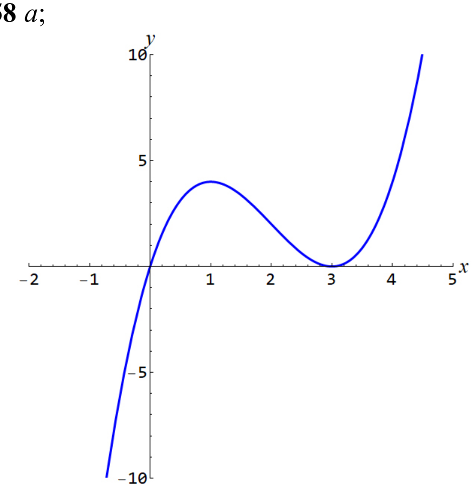
4.38 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus (-4; 0)$; viz obr. 23;

4.39 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; viz obr. 24;

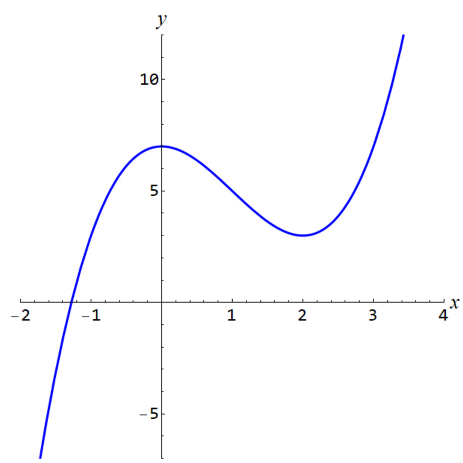
4.40 $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; viz obr. 25;

4.41 $\mathrm{D} = \mathbb{R}$; viz obr. 26;

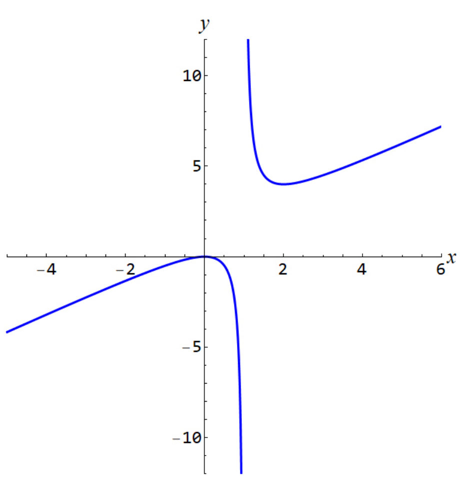
4.42 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 27;
4.43 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 28;
4.44 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 29;
4.45 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 30;
4.46 $\mathrm{D}=(0;\infty)$; viz obr. 31;
4.47 $\mathrm{D}=(0;1)\cup(1;\infty)$; viz obr. 32;
4.48 $\mathrm{D}=(-1;1)$; viz obr. 33;
4.49 $\mathrm{D}=(-1;1)$; viz obr. 34;
4.50 $\mathrm{D}=(0;\infty)$; viz obr. 35;
4.51 $\mathrm{D}=(-1;\infty)$; viz obr. 36;
4.52 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 37;
4.53 $\mathrm{D}=(0;\infty)$; viz obr. 38;
4.54 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 39;
4.55 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 40;
4.56 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 41;
4.57 $\mathrm{D}=\mathbb{R}$; viz obr. 42;
4.58 *a*;



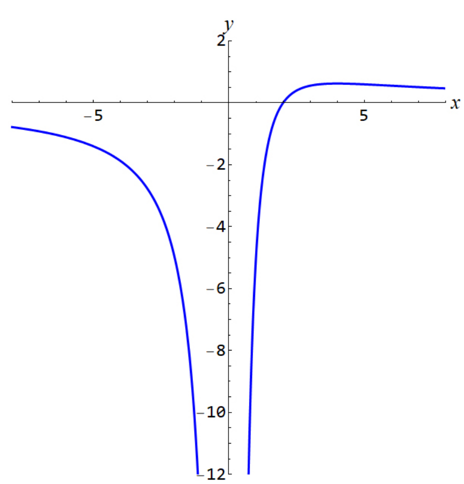
obr. 19



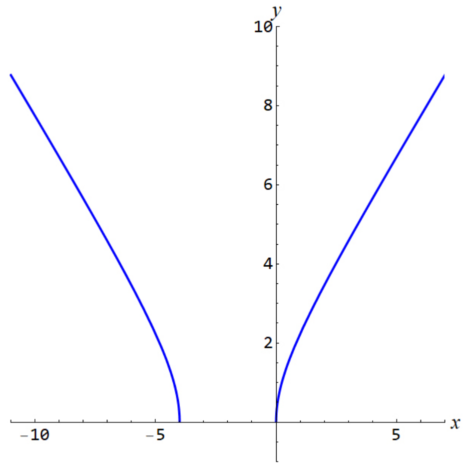
obr. 20



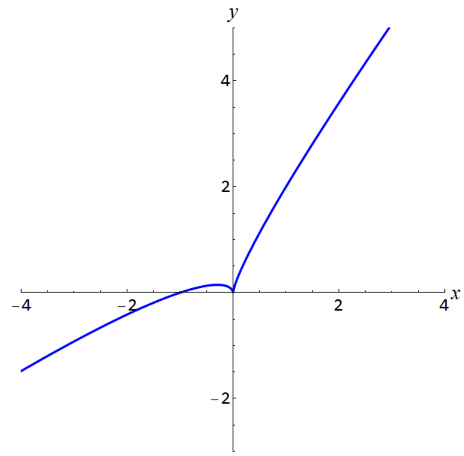
obr. 21



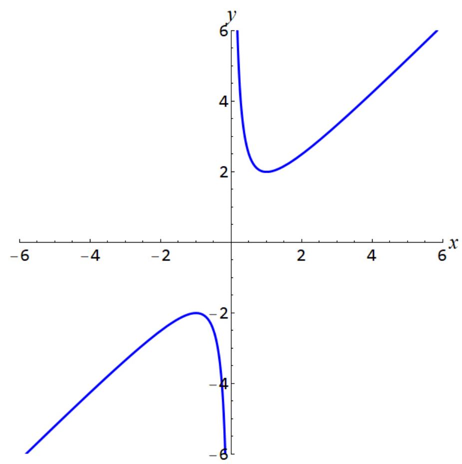
obr. 22



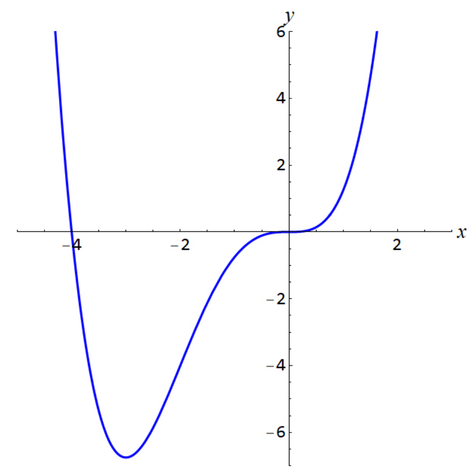
obr. 23



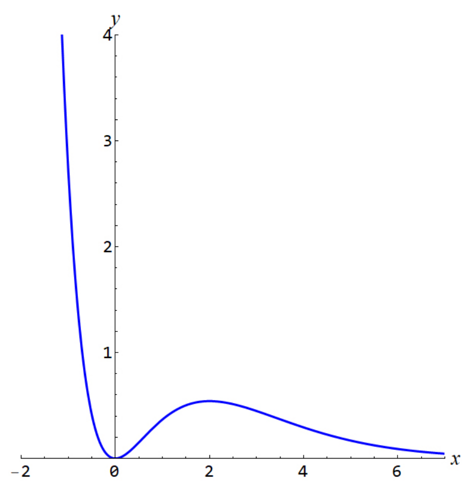
obr. 24



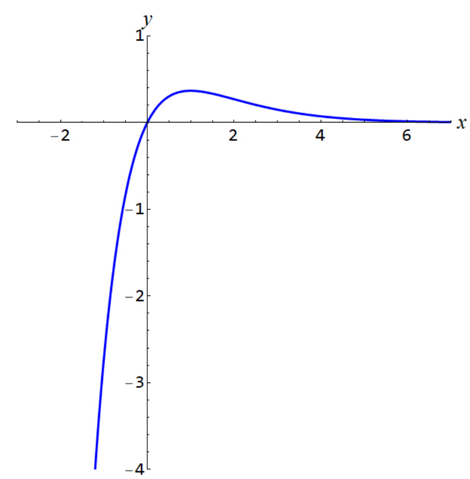
obr. 25



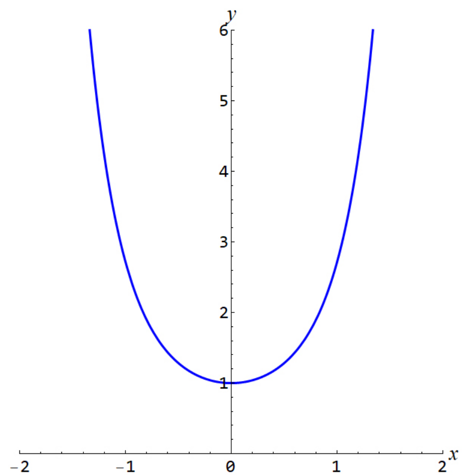
obr. 26



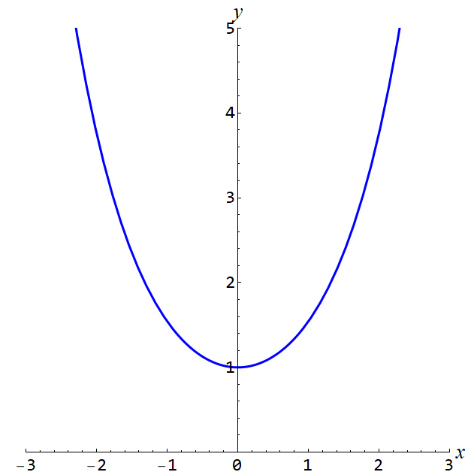
obr. 27



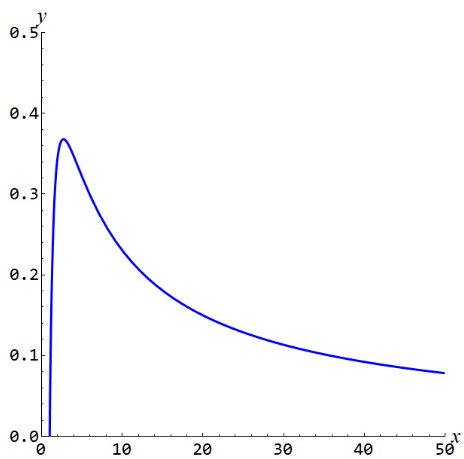
obr. 28



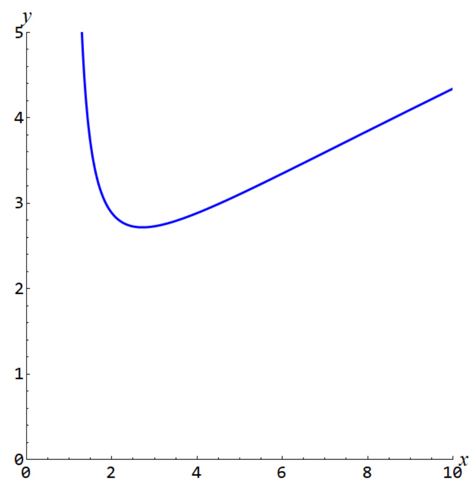
obr. 29



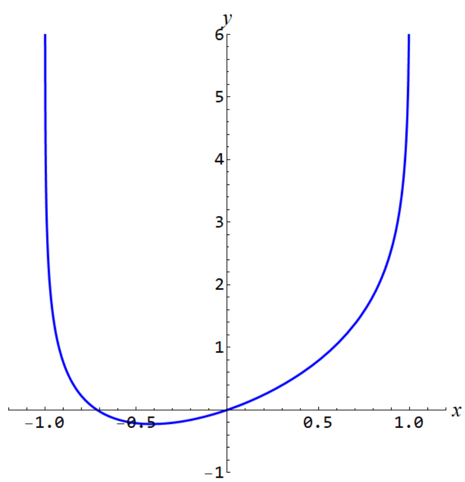
obr. 30



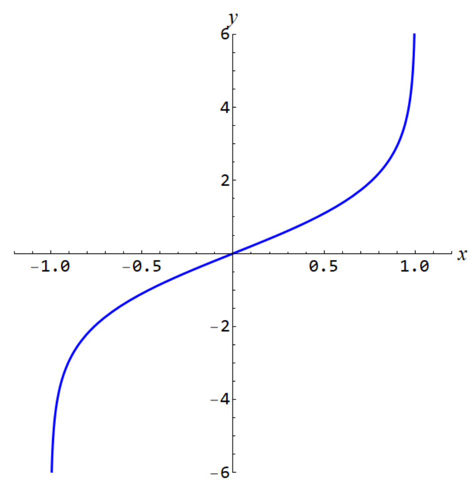
obr. 31



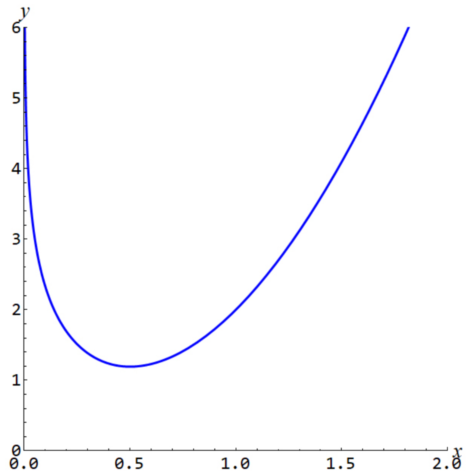
obr. 32



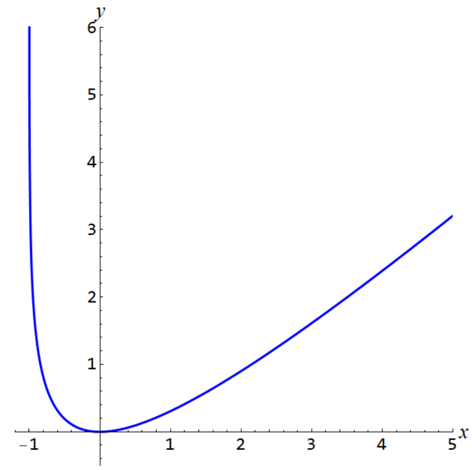
obr. 33



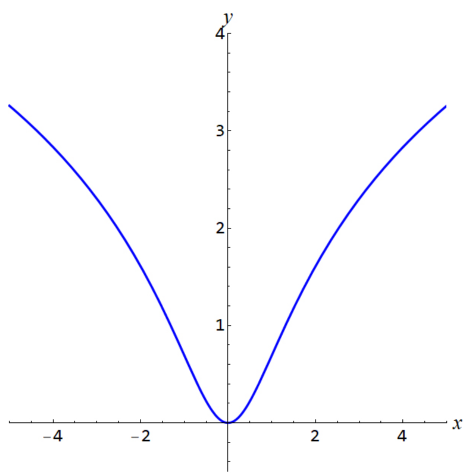
obr. 34



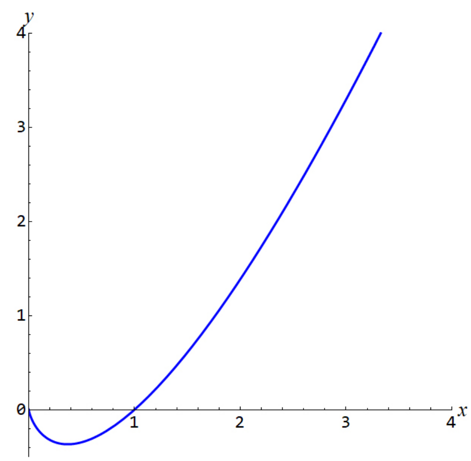
obr. 35



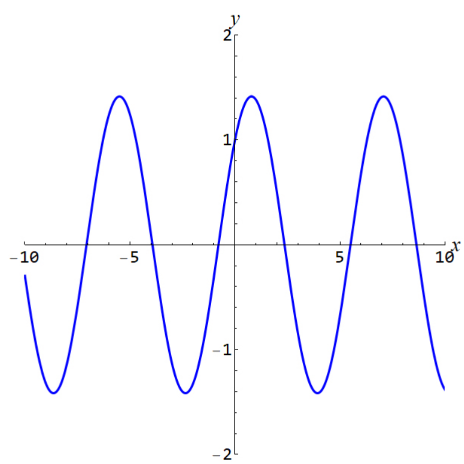
obr. 36



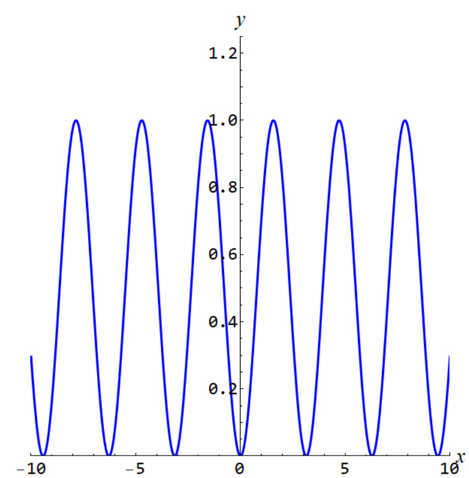
obr. 37



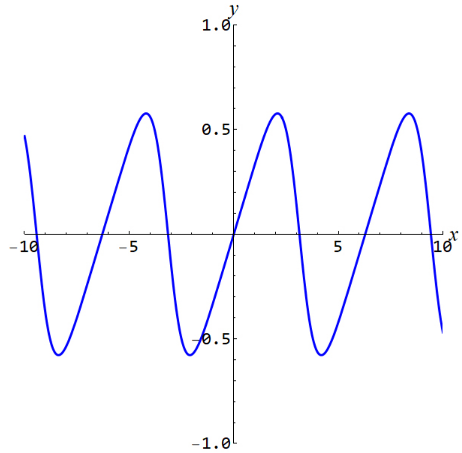
obr. 38



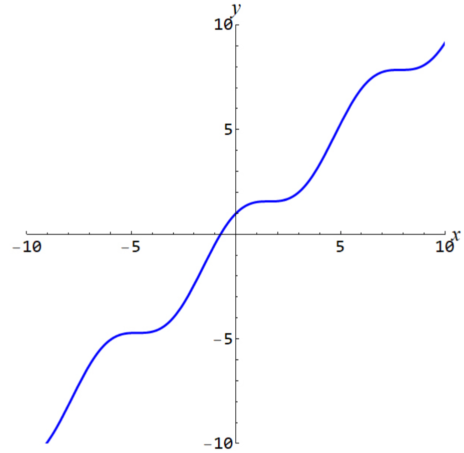
obr. 39



obr. 40



obr. 41



obr. 42

5. Využití diferenciálního počtu

5.1 14 a 14;

5.2 a) čtverec, b) čtverec;

5.3 trojúhelník je rovnostranný;

5.4 $\frac{z}{2} \times \frac{v}{2}$, kde z je délka základny a v výška trojúhelníka;

5.5 20 cm;

5.6 30 m a 60 m;

5.7 2 m;

5.8 $a = \frac{\sqrt{2S}}{4}$, $v = \frac{3}{8}\sqrt{2S}$, kde S je povrch hranolu;

5.9 $20\sqrt{2}$ m, $20\sqrt{2}$ m; 40 m;

5.10 0,5a;

5.11 $2\sqrt{3}$ j; 2 j;

5.12 $r = \frac{8}{3}\,\mathrm{dm}$, $v = 2\,\mathrm{dm}$, $V = \frac{128\pi}{9}\,\mathrm{dm}^3$;

5.13 $\sqrt{3}$ krát;

5.14 $\mathrm{A} = \left[2; -\frac{1}{2}\right]$;

5.15 čtverec o straně délky 6 cm;

5.16 a) 100 m, $\frac{200}{\pi}\,\mathrm{m}$; b) $100 - 5\pi\,\mathrm{m}$, $\frac{200 - 10\pi}{\pi}\,\mathrm{m}$;

5.17 $a = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{dm} \doteq 1{,}26\,\mathrm{dm}$;

5.18 4 m;

5.19 $30 \cdot \sqrt[3]{10\pi}\,\text{Kč} \doteq 94{,}70\,\text{Kč}$; $r = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\,\mathrm{cm}$; $v = \frac{20}{\sqrt[3]{10\pi}}\,\mathrm{cm}$;

5.20 $a = \frac{18}{4+\pi}\,\mathrm{m} \doteq 2{,}5\,\mathrm{m}$;

5.21 $2\,\Omega$;

5.22 12 cm;

5.23 $x = \frac{b\sqrt{2}}{4}$;

5.24 $a = 2f$;

5.25 $\frac{\pi}{3}$;

5.26 $h = d$;

5.27 9:27:30,5;

5.28 $\frac{5\sqrt{2}+8}{10\left(10+\sqrt{2}\right)}\,\mathrm{s} \doteq 475\,\mathrm{s}$;

5.29 10,5 km; 17,5 km;

5.30 $\frac{3-\sqrt{3}}{12}\,\mathrm{m} \doteq 10{,}6\,\mathrm{cm}$; $283{,}9\,\mathrm{cm}^2$;

5.31 čtverec: $\frac{4d}{\pi+4} \doteq 112\,\mathrm{mm}$, kruh: $\frac{\pi d}{\pi+4} \doteq 88\,\mathrm{mm}$;

5.32 $\left(\sqrt{3}+1\right)a$;

5.33 $v_{\mathrm{M}}(t) = 2\alpha \cdot t + \beta$; $a_{\mathrm{M}}(t) = 2\alpha$; $[\alpha] = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $[\beta] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $[\gamma] = \mathrm{m}$;

5.34 $v_{\mathrm{M}}(t) = 0{,}2 \cdot t + \frac{0{,}3}{t^2}$; $a_{\mathrm{M}}(t) = 0{,}2 - \frac{0{,}6}{t^3}$; $v_{\mathrm{M}}(2) = \frac{19}{40}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}475\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $a_{\mathrm{M}}(1) = -0{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$;

5.35 $F(t) = m \cdot \alpha + \frac{m \cdot \beta}{t}$; $[\alpha] = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $[\beta] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $[\gamma] = \mathrm{s^{-1}}$;

5.36 $v = \omega \cdot y_{\mathrm{m}} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$; $a = -\omega^2 \cdot y_{\mathrm{m}} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$;

5.37 $v = \mathrm{e}^{-b \cdot t} \cdot y_\mathrm{m} \cdot \left(\omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) - b \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right)\right)$;
$a = \mathrm{e}^{-b \cdot t} \cdot y_\mathrm{m} \cdot \left(-2b \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) + b^2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right) - \omega^2 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right)\right)$;

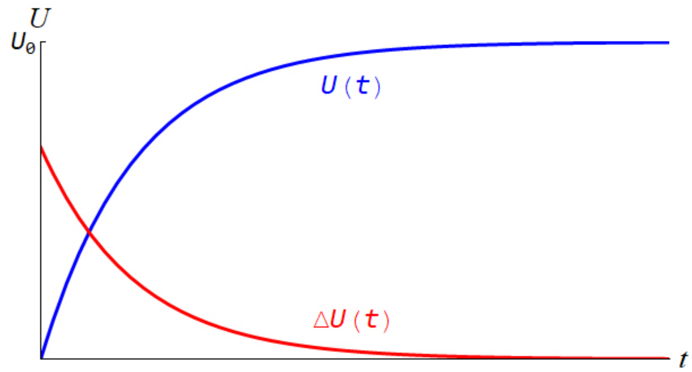
5.38 $U(t) = -\alpha$; $[\alpha] = \mathrm{V}$;

5.39 $U(t) = -3\alpha \cdot t^2 - \beta \cdot \gamma \cdot \cos(\gamma \cdot t)$; $[\alpha] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}^{-2}$; $[\beta] = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$; $[\gamma] = \mathrm{s}^{-1}$;

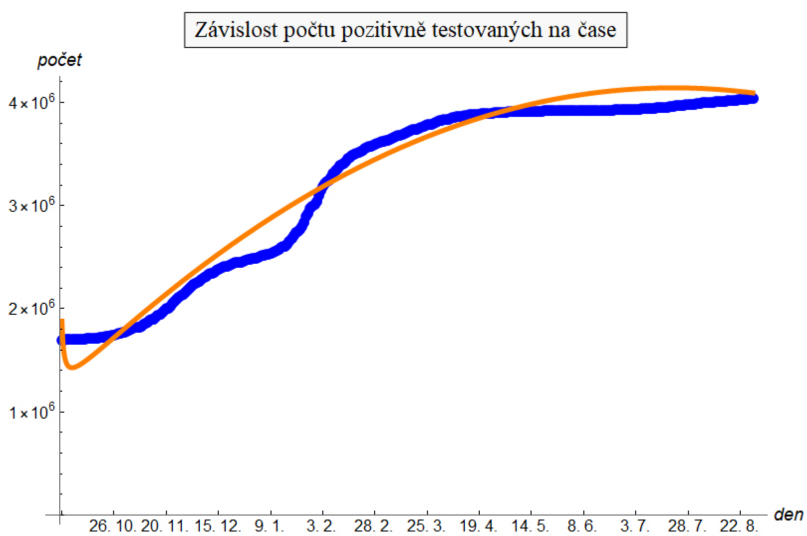
5.40 $U(t) = -L \cdot I_\mathrm{m} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \varphi_0\right)$; $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega}$;

5.41 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = U_0 \left(1 + \dfrac{1}{R \cdot C} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$; grafy – viz obr. 43;

5.42 $U_2 = U_{\mathrm{m}1} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + 3U_{\mathrm{m}2} \cdot \omega \cdot \sin(3\omega \cdot t) + 5U_{\mathrm{m}3} \cdot \omega \cdot \sin(5\omega \cdot t)$;



obr. 43



obr. 44

5.43 maximum nastává 27. 10. (na obr. 44 je silnější čarou zobrazen průběh skutečných dat, slabší čarou je vykreslena v zadání úlohy definovaná aproximační funkce).

6. Neurčitý integrál

6.1 $F(x) = -2\cos x + 4$;

6.2 $G(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3}$;

6.3 $H(x) = 4e^x - 5\cos x + 6$;

6.4 $J(x) = -x + 4\ln|x| - 6 + \mathrm{e}$;

6.5 $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5x^3}{3} - 2x^2 + 7x + C; C \in \mathbb{R}$;

6.43 $\dfrac{x^2 - 1}{2}\ln(x-1) - \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) + C; C \in \mathbb{R}$;

6.44 $-2x \cdot \operatorname{cotg} x + 2\ln|\sin x| + C; C \in \mathbb{R}$;

6.45 $\dfrac{x}{2} \cdot \left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right) + C; C \in \mathbb{R}$;

6.46 $-\mathrm{e}^{-x} \cdot \left(x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right) + C; C \in \mathbb{R}$;

6.6 $\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-18x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.7 $\frac{x^3}{12}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8x^2}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.8 $\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{2}x+2\ln|x|+C; C\in\mathbb{R}$;

6.9 $6\sqrt[6]{x}+\frac{24}{13x\cdot\sqrt[12]{x}}+\frac{3}{7x^2\cdot\sqrt[3]{x}}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.10 $\frac{36x\cdot\sqrt[36]{x^{17}}}{53\cdot\sqrt[6]{3}}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.11 $\frac{x^3}{15}+\frac{ax^2}{10}+\frac{b}{5}\ln|x|+C; C\in\mathbb{R}$;

6.12 $\frac{-5}{x^5}+\frac{10}{3x^3}-\frac{1}{2x}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.13 $\frac{x^4}{4a^6}+\frac{3x^3}{a^5}+\frac{27x^2}{2a^4}+\frac{27x}{a^3}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.14 $4\mathrm{e}^x+\sin x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.15 $\frac{4}{5}\sin x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.16 $\frac{-2\sqrt{2}}{3}\cos x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.17 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.18 $-\operatorname{cotg} x-2x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.19 $-\operatorname{cotg} x-x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.20 $5x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.21 $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.22 $-\operatorname{cotg} x+\cos x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.23 $x+2\sin x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.24 $\mathrm{e}^x+\operatorname{tg} x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.25 $x+\cos x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.26 $3\operatorname{tg} x+2\operatorname{cotg} x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.27 $-x\cdot\cos x+\sin x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.28 $x\cdot\sin x+\cos x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.29 $2x\sin x+\left(2-x^2\right)\cos x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.30 $\mathrm{e}^x\cdot\left(x-1\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.31 $\mathrm{e}^x\cdot\left(x^2-2x+2\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.32 $x\cdot\left(\ln x-1\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.33 $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.34 $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.35 $x\cdot\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.47 $\frac{\left(4x+5\right)^9}{36}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.48 $\frac{-1}{6\left(3x+2\right)^2}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.49 $2\ln\left(x^2+1\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.50 $\frac{-1}{\left(x^2-5\right)^2}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.51 $\frac{-1}{12}\sqrt{\left(1-4x^2\right)^3}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.52 $\frac{-1}{8}\sqrt[3]{\left(5-6x\right)^4}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.53 $\frac{1}{25}\sqrt[4]{\left(2+5x^2\right)^5}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.54 $\frac{-2}{3}\sqrt{2-3x}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.55 $\frac{-1}{9}\ln\left|1-3x^3\right|+C; C\in\mathbb{R}$;

6.56 $\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\left(a-bx\right)^2}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.57 $x-7\ln|x+2|+C; C\in\mathbb{R}$;

6.58 $-\frac{\cos x}{2}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.59 $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.60 $\frac{4}{3}\operatorname{tg}\left(3x+2\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.61 $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+3\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.62 $-\frac{1}{3}\sin\left(2-x^3\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.63 $-\ln|\cos x|+C; C\in\mathbb{R}$;

6.64 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+9}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.65 $-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{1-5x}\left(x+\frac{1}{5}\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.66 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+6x}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.67 $2\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+4x+C; C\in\mathbb{R}$;

6.68 $\mathrm{e}^{\sin x}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.69 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C; C\in\mathbb{R}$;

6.70 $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.71 $\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3}+C; C\in\mathbb{R}$;

6.36 $-\dfrac{1+\ln x}{x}+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.37 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.38 $\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.39 $\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.40 $\dfrac{\ln^3 x}{3}+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.41 $\dfrac{3\ln^2 x}{10}+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.42 $\dfrac{e^{2x}}{2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.72 $-\cos(\ln x)+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.73 $x+\dfrac{3}{2}\sin 2x+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.74 $\dfrac{11}{2}x+3\sin 2x+\dfrac{9}{8}\sin 4x+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.75 $-x-\dfrac{1}{2}\ln|\cos x|+\ln|\sin x|+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.76 $\ln(4\sin x-3\cos x)+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.77 $-3x+\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.78 $e^{e^x}+C;\ C\in\mathbb{R}$;

6.79 $\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x+\dfrac{\sin(2\arcsin x)}{2}\right)+C;\ C\in\mathbb{R}$.

7. Určitý integrál

7.1 15;

7.2 $\dfrac{250}{3}+\ln 9$;

7.3 $\dfrac{138}{5}-\dfrac{16}{5}\sqrt{2}$;

7.4 1;

7.5 1;

7.6 60;

7.7 $\dfrac{23}{6}+6\ln\dfrac{5}{2}$;

7.8 $1+\dfrac{\pi}{2}$;

7.9 $e+\dfrac{1}{2}\cdot\ln 2$;

7.10 $2\pi+6$;

7.11 $-\dfrac{9}{4}\pi^2+5\pi+2$;

7.12 e^2+1;

7.13 $\dfrac{-\ln 3e+13}{18e^2}$;

7.14 $\dfrac{5(e-2)}{e^2}$;

7.15 $-\dfrac{1}{3}\left(27-\sqrt{33^3}\right)$;

7.16 $\dfrac{1}{10}$;

7.17 $\dfrac{1}{96}\left(1-3^{16}\right)$;

7.18 $\ln\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$;

7.19 $\dfrac{3}{8}$;

7.20 0;

7.21 $-\dfrac{\pi}{2}$;

7.22 $\dfrac{3}{4}e\cdot\left(e^2-1\right)$;

7.23 $\dfrac{e^3-1}{2e}$;

7.24 $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{e^6+1}{2}$;

7.25 $\dfrac{1}{2}\ln(\ln 4)$;

7.26 $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$;

7.27 $2-\sqrt{3}$.

8. Užití integrálního počtu

8.1 $9\ \mathrm{j}^2$;

8.2 $4\ \mathrm{j}^2$;

8.3 $1-\dfrac{1}{e}\ \mathrm{j}^2$;

8.4 $2\ \mathrm{j}^2$;

8.5 $\dfrac{5}{12}\ \mathrm{j}^2$;

8.6 $\dfrac{1}{2}\ \mathrm{j}^2$;

8.7 $\dfrac{125}{6}\ \mathrm{j}^2$;

8.8 $\dfrac{8}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.32 $y=-\dfrac{3}{2}x^2+6x$;

8.33 $\alpha=e^{-5}$;

8.34 $\omega=\dfrac{\pi}{4}$;

8.35 $\dfrac{32}{5}\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.36 $(e-2)\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.37 $\dfrac{12}{5}\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.38 $\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.39 $\dfrac{63}{2}\pi\ \mathrm{j}^3$; $\dfrac{2807}{15}\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.9 $\frac{125}{6}\ \mathrm{j}^2$;

8.10 $\frac{22}{3}\ \mathrm{j}^2$ nebo $\frac{27}{2}\ \mathrm{j}^2$;

8.11 $8\ \mathrm{j}^2$;

8.12 $9\ \mathrm{j}^2$;

8.13 $\frac{4\sqrt{2}}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.14 $\frac{5}{6}\ \mathrm{j}^2$;

8.15 $\frac{2\left(12\sqrt{3}-20\right)}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.16 $\frac{512}{15}\ \mathrm{j}^2$;

8.17 $\frac{199}{6}\ \mathrm{j}^2$;

8.18 $\mathrm{e}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}-3\right)\ \mathrm{j}^2$;

8.19 $\frac{1}{3}\left(6\sqrt{3}-8\right)+\frac{1}{\ln 2}\ \mathrm{j}^2$;

8.20 $\frac{8}{3}-\frac{1}{\ln 2}\ \mathrm{j}^2$;

8.21 $\frac{253}{12}\ \mathrm{j}^2$;

8.22 $\ln 2\ \mathrm{j}^2$;

8.23 $\ln 4\ \mathrm{j}^2$;

8.24 $\sqrt{2}\cdot\left(1-\frac{\pi}{8}\right)\ \mathrm{j}^2$;

8.25 $\frac{9}{4}\ \mathrm{j}^2$;

8.26 $\frac{8}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.27 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.28 $\frac{8}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.29 $\frac{8}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.30 $\frac{28}{3}\ \mathrm{j}^2$;

8.31 $y=\pm\frac{4}{3}\left(x^2-6x\right)$;

8.40 a) $3\ \mathrm{j}^3$; b) $3\ \mathrm{j}^3$;

8.41 $\frac{64}{3}\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.42 a) $\frac{384}{5}\pi\ \mathrm{j}^3$; b) $12\pi\ \mathrm{j}^3$;

8.43 $V=\pi r^2 v$;

8.44 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 v$;

8.45 $V=\frac{\pi v}{3}\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)$;

8.46 $V=\frac{\pi v}{6}\left(3\rho^2+v^2\right)$;

8.47 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$;

8.48 $\frac{13}{3}\ \mathrm{j}$;

8.49 $\frac{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-3}}{2}\ \mathrm{j}$;

8.50 $\frac{1+\mathrm{e}^2}{4}\ \mathrm{j}$;

8.51 $5\sqrt{6}\ \mathrm{j}$;

8.52 $W=\frac{\kappa m M_Z h}{\left(R_Z+h\right)R_Z}=7\cdot 10^8\ \mathrm{J}$;

8.53 $F=\frac{\rho g a h^2}{2}=144\cdot 10^4\ \mathrm{N}$;

$F=\frac{3\rho g a h^2}{8}=108\cdot 10^4\ \mathrm{N}$;

8.54 $F=\frac{\rho g l h^2}{6}$;

8.55 $F=\frac{2\rho g r^3}{3}$;

8.56 $F=\frac{\rho g h^2\left(a+2c\right)}{6}=240\cdot 10^4\ \mathrm{N}$;

8.57 $F=\frac{\rho g a h^2}{3}=144\cdot 10^4\ \mathrm{N}$;

8.58 $9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$; 30 m;

8.59 $W=n\cdot R\cdot T\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$;

8.60 $W=\frac{1}{2}I_\mathrm{m}^2\cdot R\cdot T$; $I=\frac{\sqrt{2}}{2}I_\mathrm{m}$;

8.61 $i_1: i=\frac{2I_\mathrm{m}}{T}t$ pro $t\in\left\langle 0;\frac{T}{2}\right)$, $i_2: i=-\frac{2I_\mathrm{m}}{T}t+2I_\mathrm{m}$ pro $t\in\left\langle\frac{T}{2};T\right)$; $W=\frac{1}{3}I_\mathrm{m}^2\cdot R\cdot T$; $I=\frac{\sqrt{3}}{3}I_\mathrm{m}$;

8.62 $a_0=0$; $a_\mathrm{n}=0$ pro $n\in\mathbb{N}$; $b_\mathrm{n}=\left(-1\right)^{n+1}\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}$ pro $n\in\mathbb{N}$.