

### 1. Analytická geometrie - bod, souřadnice bodu, vzdálenost bodů

- 1.1 Rozhodněte, zda trojúhelník s vrcholy  $A = [3; 2]$ ,  $B = [-1; -1]$  a  $C = [1; -6]$  je pravoúhlý.
- 1.2 Na ose  $y$  najděte bod, který je vzdálený od bodu  $A = [4; -6]$  o délku 5.
- 1.3 Na ose  $z$  najděte bod, který má stejnou vzdálenost od bodů  $A = [-2; 1; 4]$  a  $B = [3; 0; 1]$ .
- 1.4 Určete délku těžnic v trojúhelníku  $KLM$ , jsou-li dány body  $K = [2; 0]$ ,  $L = [2; 3]$ ,  $M = [-2; 0]$ .
- 1.5 V trojúhelníku  $ABC$  je délka strany  $AB$  rovna  $\sqrt{10}$  a vzdálenost bodu  $A$  od středu protilehlé strany je rovna  $\frac{\sqrt{17}}{2}$ , přičemž tento bod má souřadnice  $\left[4; \frac{3}{2}\right]$ . Bod  $B$  má souřadnice  $[5; 0]$  a  $x$ -ová souřadnice bodu  $A$  je 2. Určete zbývající souřadnici bodu  $A$ , souřadnice bodu  $C$ , souřadnice zbývajících středů stran trojúhelníka  $ABC$  a délky zbývajících stran trojúhelníka.

### 2. Analytická geometrie - vektory (souřadnice, umístění, délka, lineární závislost a nezávislost, odchylka)

- 2.1 Zjistěte, zda vektor  $\vec{v} = (1; 2; -1)$  je roven vektoru  $\overrightarrow{AB}$ , je-li dáno:  $A = [-1; 1; 5]$  a  $B = [0; 3; 4]$ .
- 2.2 Určete velikost vektoru  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , kde  $A = [-1; 0; 3]$  a  $B = [2; 2; -2]$ .
- 2.3 Určete zbývající souřadnici vektoru  $\vec{w} = \left(2; w_y; -\frac{5}{3}\right)$  tak, aby vektor  $\vec{w}$  byl jednotkový.
- 2.4 Zjistěte souřadnice součtu vektorů  $\vec{a} = (1; 3; 4)$ ,  $\vec{b} = (-2; 3; -1)$ ,  $\vec{c} = (0; -3; 2)$  a  $\vec{d} = (0; 1; -2)$ .
- 2.5 Jsou dány vektory  $\vec{a} = (0; 2; -4)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (-2; 2; 3)$ . Zjistěte souřadnice vektoru a)  $\vec{w} = \vec{a} + 0,5\vec{b} - 2\vec{c}$ , b)  $\vec{w} = -2(\vec{a} + \vec{b}) + 0,1\vec{c}$ , c)  $\vec{w} = -\vec{a} - 4(0,5\vec{b} - 2\vec{c})$ .
- 2.6 Zjistěte, zda vektory  $\vec{u} = (12; 1; 14)$ ,  $\vec{v} = (-1; -3; 0)$  a  $\vec{w} = (2; 1; 2)$  lineárně závislé či nezávislé.
- 2.7 Zjistěte, zda vektory  $\vec{u} = (0; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (2; 1; 1)$  a  $\vec{w} = (1; 1; 1)$  lineárně závislé či nezávislé.
- 2.8 Určete  $u_3 \in R$  tak, aby vektory  $\vec{u} = (4; 4; u_3)$ ,  $\vec{v} = (-2; -2; -1)$ ,  $\vec{w} = (1; 2; 3)$  byly lineárně závislé.
- 2.9 Vypočtete úhel vektorů  $\vec{u} = (1; -2)$  a  $\vec{v} = (2; 1)$ .
- 2.10 Vrcholy trojúhelníku  $ABC$  jsou  $A = [2; -4; 9]$ ,  $B = [-1; -4; 5]$  a  $C = [6; -4; 6]$ . Vypočtete délky stran trojúhelníka  $ABC$  a úhel při vrcholu  $C$ .
- 2.11 Zjistěte, zda čtyřúhelník s vrcholy  $A = [5; 2; 6]$ ,  $B = [6; 4; 4]$ ,  $C = [4; 3; 2]$  a  $D = [3; 1; 4]$  je čtverec.

### 3. Analytická geometrie - přímka v rovině (rovnice parametrická, obecná, směrová, vzájemná poloha, odchylka)

- 3.1 Napište parametrické vyjádření přímky  $p$  dané bodem  $A = [1; -2]$  a vektorem  $\vec{u} = (-3; 4)$  s ní rovnoběžným.
- 3.2 Napište parametrické vyjádření přímky procházející body  $A = [5; 3]$  a  $B = [7; 4]$ .
- 3.3 Napište parametrické vyjádření přímky  $p$ , která prochází bodem  $A = [2; 6]$  a je rovnoběžná s přímkou  $BC$ , kde  $B = [3; 7]$  a  $C = [-4; 8]$ .
- 3.4 Rozhodněte, zda body  $M = [5; 3]$  a  $N = \left[-\frac{31}{2}; 0\right]$  leží na přímce  $p$  dané bodem  $A = [-5; 7]$  a vektorem  $\vec{u} = (3; 2)$ .
- 3.5 Napište rovnici přímky, která prochází bodem  $A = [2; 1]$  a je kolmá k vektoru  $\vec{n} = (7; 2)$ .
- 3.6 Napište rovnici přímky, která prochází bodem  $A = [3; -2]$  a je rovnoběžná s osou  $y$ .
- 3.7 Napište obecnou rovnici přímky, jestliže přímka je dána parametrickým vyjádřením  $x = -3 + 5t$  a  $y = 1 - 4t; t \in R$ .
- 3.8 Napište obecnou rovnici přímky, je-li přímka dána body  $A = [-3; 7]$  a  $B = [5; -2]$ .
- 3.9 Napište obecnou rovnici přímky  $p$ , která je kolmá k přímce  $q: 3x - 2y + 2 = 0$  a prochází bodem  $A = [4; -1]$ .
- 3.10 Jsou dány body  $A = [-2; 1]$  a  $B = [6; 7]$ . Bodem  $A$  veďte přímku  $p$  a bodem  $B$  přímku  $q$  tak, aby přímky  $p$ ,  $q$  byly vzájemně kolmé a jejich průsečík  $P$  ležel na ose  $x$ .
- 3.11 Určete souřadnice těžiště trojúhelníka, který je dán body  $K = [2; 0]$ ,  $L = [4; 2]$  a  $M = [-2; 4]$ .
- 3.12 Do soustavy souřadnic zakreslete trojúhelník  $ODS$ , jehož strany  $OD$ ,  $DS$  a  $SO$  leží po řadě na přímkách  $2x + y - 1 = 0$ ,  $-x + y - 2 = 0$  a  $x + 2y + 6 = 0$ . Určete graficky i početně souřadnice jeho vrcholů.

**3.13** Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek  $3x - 2y - 9 = 0$  a  $4x + y - 1 = 0$  a je rovnoběžná s přímkou  $2x + y - 3 = 0$ .

**3.14** Napište rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek  $x + 2y + 3 = 0$  a  $3x - y - 5 = 0$  a je kolmá k přímce  $3x - 4y = 6$ .

**3.15** Napište rovnice kolmic vedených k přímce  $2x - 4y - 10 = 0$  v jejím průsečíku s osou a)  $x$ , b)  $y$ .

**3.16** Určete vzájemnou polohu dvou přímek  $p, q$ , které jsou dány:

$$p: 2x - 3y + 19 = 0$$

$$p: 8x - 2y + 7 = 0$$

$$p: x = 4 - 1,2t, y = 1 - 1,3t; t \in \mathbb{R}$$

$$q: 3x - 2y + 2 = 0$$

$$q: x = 3 + t, y = 15,5 + 4t; t \in \mathbb{R}$$

$$q: x = r, y = 1 - r; r \in \mathbb{R}$$

**3.17** Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka  $ABC$ , jehož strany leží na přímkách  $a: x\sqrt{3} - y + 1 = 0$ ,  $b: y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$  a  $c: x\sqrt{3} + 3y - 20\sqrt{3} - 3 = 0$ . Určete souřadnice vrcholů tohoto trojúhelníka.

**3.18** Světelný paprsek prochází bodem  $A = [3; 2]$ , odráží se od zrcadla, které leží na přímce  $x + y + 1 = 0$  a dopadá do bodu  $B = [2; 0]$ . Najděte rovnici přímky, na níž leží dopadající a odražený paprsek.

**3.19** Světelný paprsek vychází z bodu  $K = [5; 4]$ , dopadá na osu  $x$  pod úhlem  $60^\circ$ , odráží se od ní a poté dopadá na osu  $y$ , od ní se také odráží. Určete rovnice přímek, na nichž leží všechny 3 paprsky a souřadnice bodů, v nichž se paprsek odráží od jednotlivých os.

**3.20** Určete množinu bodů, které mají od přímky  $8x - 6y + 5 = 0$  vzdálenost rovnou 3.

**3.21** Napište rovnici přímky, která je ve vzdálenosti 5 od bodu  $A = [-4; 2]$  a je a) rovnoběžná, b) kolmá k přímce dané rovnicí  $3x - 4y + 2 = 0$ .

**3.22** Přímka prochází bodem  $P = [-2; 5]$  a má od bodu  $Q = [3; 5]$  vzdálenost  $\sqrt{5}$ . Napište její rovnici.

**3.23** Napište rovnici trajektorie pohybu bodu  $M = [x; y]$ , jehož vzdálenost od přímky  $p: y = 2x - 4$  je třikrát větší než vzdálenost od přímky  $q: y = 4 - 2x$ .

**3.24** V rovnici přímky  $p: 3x + by - 1 = 0$  určete parametr  $b$  tak, aby: a) přímka procházela bodem  $E = [2; 2]$ , b) přímka  $p$  byla rovnoběžná s osou  $y$ , c) směrový úhel přímky  $p$  měl velikost  $\frac{\pi}{6}$ .

**3.25** Napište rovnice os úhlů, jejichž ramena leží na přímkách, které jsou dány rovnicemi:

$$a) x - 3y + 3 = 0 \text{ a } 3x - y + 10 = 0$$

$$b) 6x - 8y + 11 = 0 \text{ a } 12x + 5y + 2 = 0$$

**3.26** Vypočtěte obsah trojúhelníku s vrcholy  $A = [2; 3]$ ,  $B = [5; 1]$  a  $C = [0; 0]$ .

#### **4. Analytická geometrie - přímka v prostoru (parametrické vyjádření, vzájemná poloha, odchylka)**

**4.1** Určete zbývající souřadnice bodu  $L = [x_L; -3; z_L]$ , který leží na přímce  $MN$  dané body  $M = [1; 1; -1]$  a  $N = [-5; -9; 2]$ .

**4.2** Napište parametrické vyjádření stran trojúhelníka  $OSN$ , kde  $O = [2; -2; 2]$ ,  $S = [-3; 0; -2]$  a  $N = [0; -4; 2]$ .

**4.3** Určete vzájemnou polohu přímek  $p$  a  $q$ . Přímka  $p$  je dána body  $A = [3; -2; -4]$  a  $B = [-1; 3; 0]$ , přímka  $q$  je určena bodem  $C = [-2; 2; 1]$  a vektorem  $\vec{v} = (1; -5; 6)$ , který je s přímkou  $q$  rovnoběžný.

**4.4** Přímka  $k$  prochází body  $E = [3; -2; 4]$  a  $F = [5; -1; 3]$ ; přímka  $l$  pak prochází body  $G = [1; -6; 2]$  a  $H = [5; 3; h_3]$ . Určete souřadnici  $h_3$  bodu  $H$  tak, aby přímky  $k$  a  $l$  byly: a) různoběžné, b) splývající a c) mimoběžné.

**4.5** Zjistěte, zda mohou body  $A = [1; 3; 4]$ ,  $B = [2; -2; -1]$ ,  $C = [-3; -2; 1]$  a  $D = [5; -1; 0]$  tvořit vrcholy rovinného čtyřúhelníku.

**4.6** Je dána přímka  $p$  parametrickým vyjádřením  $x = m + 2t$ ,  $y = 3t$ ,  $z = 6 - 4t$ ;  $t \in \mathbb{R}$  a přímka  $q$  s parametrickým vyjádřením  $x = 5 + s$ ,  $y = 1 - 4s$ ,  $z = -4 + s$ ;  $s \in \mathbb{R}$ . Určete hodnotu reálného parametru  $m$  tak, aby přímky byly různoběžné a poté určete jejich průsečík.

**4.7** Určete vzájemnou polohu přímek  $p$  a  $q$ , které jsou dány takto:  $p: x = 1 + t$ ,  $y = 3 - 2t$ ,  $z = -1 + 3t$ ;  $t \in \mathbb{R}$  a  $q: x = 2 + 2s$ ,  $y = 5 + 3s$ ,  $z = s$ ;  $s \in \mathbb{R}$ .

**5. Analytická geometrie - rovina (parametrické vyjádření, vzájemná poloha rovin, vzájemná poloha přímky a roviny, vzdálenost bodu od přímky a roviny)**

5.1 Rovina  $\tau$  je určena body  $K = [1; 2; -3]$ ,  $L = [3; -2; 0]$  a  $M = [-1; -2; -3]$ . Zjistěte, zda v této rovině leží body  $P = [-1; -2; -3]$ ,  $Q = [-5; 2; -6]$  a  $R = [11; -2; -6]$ .

5.2 Rovina  $\lambda$  je dána body  $E = [-1; 3; -3]$ ,  $K = [2; -3; 4]$  a  $G = [5; -1; 7]$ . Určete zbývající souřadnici bodu  $S = [x_S; -4; 1]$  tak, aby ležel v rovině  $\lambda$ .

5.3 Rovina  $\tau$  je dána bodem  $P = [1; 0; -3]$  a vektory a)  $\vec{u} = (-1; 2; 1)$  a  $\vec{v} = (3; -4; 2)$ , b)  $\vec{u} = (4; 6; -2)$  a  $\vec{v} = (-2; -3; 1)$ . Napište její obecnou rovnici.

5.4 V rovině  $\tau: 2x + y - 4z + d = 0$  leží bod  $A = [2; 2; 1]$ . Určete zbývající souřadnici bodu  $B = [4; -3; z_B]$  tak, aby v rovině  $\tau$  ležel, a zbývající souřadnici bodu  $C = [-1; y_C; 2]$  tak, aby v rovině  $\tau$  neležel.

5.5 Rovina  $\omega$  je dána body  $A = [2; 4; -2]$ ,  $B = [0; 3; -1]$  a  $C = [1; -2; 3]$ . Napište její obecnou rovnici.

5.6 Jsou dány body  $P = [3; -1; 2]$  a  $Q = [-2; 4; 3]$ . Napište obecnou rovnici roviny  $\tau$ , která prochází bodem  $Q$  a je kolmá k vektoru  $\overline{PQ}$ .

5.7 Napište obecnou rovnici roviny procházející bodem  $L = [3; -6; 1]$ , který je patou kolmice vedené počátkem soustavy souřadnic k této rovině.

5.8 Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem  $A = [-1; 2; -3]$  a je a) kolmá k přímce  $p: x = 3 - 2t$ ,  $y = -1 + t$ ,  $z = 4 + 2t$ ;  $t \in \mathbb{R}$ .

5.9 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou  $x$  a procházející body  $M = [0; 1; 3]$  a  $N = [2; 4; 5]$ .

5.10 Napište obecnou rovnici roviny procházející osou  $x$  a bodem  $K = [0; -2; 3]$ .

5.11 Napište obecnou rovnici roviny rovnoběžné s osou  $y$  a protínající osy  $x$  a  $z$  v bodech  $A = [x_A; 0; 0]$  a  $B = [0; 0; z_B]$ .

5.12 Napište rovnici roviny, která prochází bodem  $P = [2; -1; 3]$  a protíná kladné části os souřadnic ve stejných vzdálenostech od počátku.

5.13 Najděte pravoúhlý průmět bodu  $Q = [3; 1; -1]$  do roviny  $x + 2y + 3z - 30 = 0$ .

5.14 Zjistěte, jak daleko od počátku kartézského systému souřadnic leží rovina daná rovnicí  $15x - 10y - 6z - 190 = 0$ .

5.15 Vypočítejte souřadnice bodu, který je souměrný s počátkem soustavy souřadnic podle roviny  $\sigma: 6x + 2y - 9z + 121 = 0$ .

5.16 Jsou dány body  $A = [1; -2; -2]$ ,  $B = [2; -1; -1]$ ,  $C = [1; -1; -2]$  a  $M = [0; 2; -2]$ . Vypočítejte vzdálenost bodu  $M$  od roviny  $ABC$  a najděte souřadnice bodu  $M$  v osově souměrnosti podle přímky  $AB$ .

5.17 Bodem  $D = [3; -2; 1]$  ved'te přímku kolmou k rovině  $\tau: 2x - 3y - z + 11 = 0$ .

5.18 Vypočítejte úhly, které svírá rovina  $\sigma: 2x - 2y + z - 6 = 0$  s osami kartézského systému souřadnic.

5.19 Osou  $z$  ved'te rovinu  $\tau$ , jejíž odchylka od roviny  $\rho: 2x + y - z\sqrt{5} = 0$  je  $60^\circ$ .

## ŘEŠENÍ

### 1. Analytická geometrie - bod

1.1 není pravouhlý

1.2  $B = [0; -3]$ ;  $B' = [0; -9]$     1.4  $t_k = \frac{5}{2}$ ;  $t_l = \sqrt{13}$ ;  $t_m = \frac{\sqrt{73}}{2}$

1.3  $X = \left[0; 0; \frac{11}{6}\right]$

1.5  $A = [2; 1]$ ,  $C = [3; 3]$ ,  $S_{AC} = \left[\frac{5}{2}; 2\right]$ ,  $S_{AB} = \left[\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right]$ ,  $|BC| = \sqrt{13}$ ,

$|AC| = \sqrt{5}$

### 2. Analytická geometrie - vektory

2.1  $\vec{v} = \overline{AB}$

2.2  $\vec{v} = \sqrt{38}$

2.3 nelze

2.4  $\vec{v} = (-1; 4; 3)$

2.5 a)  $\vec{w} = (4, 5; -1; 10, 5)$ ; b)  $\vec{w} = (-2, 2; -7, 8; 10, 3)$ ,

c)  $\vec{w} = (-18; 10; 30)$

2.6 lineárně závislé

2.7 lineárně nezávislé

2.8  $u_3 = 2$

2.9 vektory jsou kolmé

2.10  $|AB| = |AC| = 5$ ,  $|BC| = 5\sqrt{2}$ ,  $\gamma = 45^\circ$

2.11 jedná se o čtverec

### 3. Analytická geometrie - přímka v rovině

3.1  $x = 1 - 3t$ ,  $y = -2 + 4t$ ;  $t \in \mathbb{R}$

3.2  $x = 5 + 2t$ ,  $y = 3 + t$ ;  $t \in \mathbb{R}$

3.3  $x = 2 - 7t$ ,  $y = 6 + t$ ;  $t \in \mathbb{R}$

3.4  $M \notin p$ ,  $N \in p$

3.5  $7x + 2y - 16 = 0$

3.6  $x - 3 = 0$

3.7  $4x + 5y + 7 = 0$

3.8  $9x + 8y - 29 = 0$

3.9  $2x + 3y - 5 = 0$

3.10  $p: x + 7y - 5 = 0$ ,  $q: 7x - y - 35 = 0$  nebo  $p:$

$x + y + 1 = 0$ ,  $q: -x + y - 1 = 0$

3.11  $T = \left[\frac{4}{3}; 2\right]$

3.12  $O = \left[\frac{8}{3}; -\frac{13}{3}\right]$ ,  $D = \left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$ ,  $S = \left[-\frac{10}{3}; -\frac{4}{3}\right]$

3.13  $2x + y + 1 = 0$

3.14  $4x + 3y + 2 = 0$

3.15 a)  $2x + y - 10 = 0$ , b)  $4x + 2y - 5 = 0$

3.16 různoběžné  $P = \left[\frac{53}{5}; \frac{32}{5}\right]$ ; shodné; různoběžné  $P = \left[\frac{52}{25}; -\frac{27}{25}\right]$

3.17  $A = \left[\frac{11\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}; 3\sqrt{3}+1\right]$ ,  $B = \left[\frac{20\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}; \frac{24\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}\right]$ ,  $C = [3; 3\sqrt{3}+1]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$

3.18 dopadající:  $5x - 4y - 7 = 0$ , odražený:  $4x - 5y - 8 = 0$

3.19  $X = [-4\sqrt{3} + 5; 0]$ ,  $Y = [0; 12 - 5\sqrt{3}]$ ,  $x\sqrt{3} - 3y + 12 - 5\sqrt{3} = 0$ ,  $x\sqrt{3} + y - 12 + 5\sqrt{3} = 0$ ,

$x\sqrt{3} - 3y + 36 - 15\sqrt{3} = 0$

3.20 2 rovnoběžné přímky:  $8x - 6y + 35 = 0$ ,  $8x - 6y - 25 = 0$

3.21 a)  $3x - 4y + 45 = 0$ ,  $3x - 4y - 5 = 0$ , b)  $4x + 3y + 35 = 0$ ,  $4x + 3y - 15 = 0$

3.22  $x + 2y - 8 = 0$  nebo  $x - 2y + 12 = 0$

3.23 přímka  $x + y - 2 = 0$  nebo  $4x + y - 8 = 0$

3.24 a)  $b = -\frac{5}{2}$ , b)  $b = 0$ , c)  $b = -3\sqrt{3}$

3.25 a)  $2x + 2y + 7 = 0$ ,  $4x - 4y + 13 = 0$ , b)  $42x + 154y - 123 = 0$ ,  $198x - 54y + 163 = 0$

3.26  $\frac{13}{2}$  čtverečních jednotek

### 4. Analytická geometrie - přímka v prostoru

4.1  $x_L = -1, 4$ ,  $z_L = 0, 2$

4.2  $OS: x = 2 - 5t$ ,  $y = -2 + 2t$ ,  $z = 2 - 4t$ ;  $t \in \mathbb{R}$ ,  $ON: x = 2 - 2r$ ,  $y = -2 - 2r$ ,  $z = 2$ ;  $r \in \mathbb{R}$ ,  $SN: x = -3 + 3s$ ,  $y = -4s$ ,  $z = -2 + 4s$ ;  $s \in \mathbb{R}$

4.3 mimoběžné

4.5 nemohou (přímky  $AC$  a  $BD$  jsou mimoběžné)

4.4 a)  $h_3 = -\frac{31}{7}$ , b) nelze, c)  $h_3 \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{31}{7} \right\}$

4.6  $m = -3$

4.7 mimoběžné

### 5. Analytická geometrie - rovina

5.1  $P \in \tau, Q \notin \tau, R \notin \tau$

5.2  $x_S = -\frac{5}{8}$

5.3 a)  $8x + 5y - 2z - 14 = 0$ , b) vektory neurčují rovinu

5.4  $2x + y - 4z - 2 = 0, z_B = -\frac{3}{4}, y_C \neq 12$

5.5  $x - 9y + 11z + 56 = 0$

5.6  $-5x + 5y + z - 33 = 0$

5.7  $3x - 6y + z - 46 = 0$

5.8  $-2x + y + 2z + 2 = 0$

5.9  $2y - 3z + 7 = 0$

5.10  $-3y + 2z = 0$

5.11  $z_B x + x_A z - x_A z_B = 0$

5.12  $x + y + z - 4 = 0$

5.13  $Q' = [5; 5; 5]$

5.14 10

5.15  $O' = [-12; -4; 18]$

5.16  $\frac{\sqrt{2}}{2}; M' = [4; -4; 0]$

5.17  $x = 3 + 2t, y = -2 - 3t, z = 1 - t; t \in \mathbb{R}$

5.18  $41,81^\circ; 41,81^\circ; 19,47^\circ$

5.19  $3x - y = 0$  nebo  $x + 3y = 0$