



**PANSKÁ**

Střední průmyslová škola sdělovací techniky

Panská 3

Praha 1

© Jaroslav Reichl, 2017

# Sbírka úloh

## z aplikované matematiky

určená studentům 4. ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu aplikované matematiky

**Jaroslav Reichl**

**OBSAH**

<b>1. Základní pojmy algebry</b>	<b>3</b>
<b>2. Vektory (lineární kombinace, závislost, nezávislost, generátory)</b>	<b>3</b>
<b>3. Matice</b>	<b>3</b>
<b>4. Soustavy rovnic</b>	<b>3</b>
<b>5. Determinanty</b>	<b>4</b>
<b>6. Operace s vektory</b>	<b>5</b>
<b>7. Parciální derivace</b>	<b>5</b>
<b>8. Lineární diferenciální operátory</b>	<b>5</b>
<b>9. Lineární diferenciální operátory 2</b>	<b>6</b>
<b>10. Diferenciální rovnice</b>	<b>6</b>
<b>1. Základní pojmy algebry</b>	<b>8</b>
<b>2. Vektory (lineární kombinace, závislost, nezávislost, generátory)</b>	<b>8</b>
<b>3. Matice</b>	<b>8</b>
<b>4. Soustavy rovnic</b>	<b>8</b>
<b>5. Determinanty</b>	<b>9</b>
<b>6. Operace s vektory</b>	<b>9</b>
<b>7. Parciální derivace</b>	<b>10</b>
<b>8. Lineární diferenciální operátory</b>	<b>10</b>
<b>9. Lineární diferenciální operátory 2</b>	<b>10</b>
<b>10. Diferenciální rovnice</b>	<b>11</b>

## 1. Základní pojmy algebry

1.1 Jsou dány dvě množiny: množina  $K$  rockových klubů v Praze a množina  $S$  rockových skupin hrajících v rockových klubech. Rozhodněte, za jakých podmínek je kartézský součin  $K \times S$ : a) zobrazením, b) prostým zobrazením, c) bijekcí. Podmínky v jednotlivých částech úlohy vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl nalezených podmínek.

1.2 Je dána množina  $S$  všech staveb, které lze vytvořit ze stejných kostek dětské stavebnice, a operace  $p$  postavení dvou kostek na sebe. Zjistěte, zda grupoid  $(K, p)$  je a) grupou, b) Abelovou grupou. Podmínky (ověření definice) vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl platných podmínek.

## 2. Vektory (lineární kombinace, závislost, nezávislost, generátory)

2.1 Zjistěte, zda jsou vektory  $\vec{a} = (3; 1; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; 1)$  a  $\vec{c} = (3; -1; 2)$  lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.2 Zjistěte, zda jsou vektory  $\vec{u} = (4; 1; 5)$ ,  $\vec{v} = (1; 0; -1)$  a  $\vec{w} = (0; -1; 2)$  lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.3 Zjistěte, pro které  $\sigma \in \mathbb{R}$  jsou vektory  $\vec{e} = (3; -2; \sigma)$ ,  $\vec{f} = (4; -1; 0)$  a  $\vec{g} = (2; 0; -2)$  a) lineárně závislé, b) lineárně nezávislé. V případě a) napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.4 Zjistěte, zda vektory  $\vec{u} = (1; 2; 3)$ ,  $\vec{v} = (0; 2; 3)$  a  $\vec{w} = (4; 2; -1)$  generují vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ .

2.5 Zjistěte, zda vektory  $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; 0)$  a  $\vec{c} = (0; 2; -1)$  generují vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ .

2.6 Zjistěte, zda vektory  $\vec{m} = (0; 1; 3)$ ,  $\vec{n} = (0; 2; 0)$  a  $\vec{p} = (0; 2; 1)$  generují vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ .

2.7 Zjistěte, pro která  $\omega \in \mathbb{R}$  vektory  $\vec{p} = (-1; -2; 3)$ ,  $\vec{q} = (\omega; 0; 2)$  a  $\vec{r} = (1; -1; 0)$  generují vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$ .

## 3. Matice

3.1 Určete hodnotu matice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

3.2 Určete hodnotu matice  $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ .

Jsou dány matice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  a  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3 Vypočítejte součet matic  $A$  a  $B$ .

3.4 Vypočítejte rozdíl matic  $A$  a  $B$ .

3.5 Vypočítejte součin matic  $B$  a  $C$ .

3.6 K součinu matic  $A$  a  $C$  přičtěte matici  $B$ .

3.7 Určete inverzní matici k matici: a)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , c)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ .

3.8 Určete inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$  v závislosti na reálném koeficientu  $\alpha$ .

3.9 Určete inverzní matici k matici  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

## 4. Soustavy rovnic

4.1 V množině  $\mathbb{R}^3$  řešte soustavu rovnic o neznámých  $x, y, z$ :  $x + y + z = 1$ ,  $x + 2y + 3z = 0$  a  $3x + 3y + z = -1$ .

- 4.2 V množině  $\mathbb{R}^3$  řešte soustavu rovnic o neznámých  $p, q, r$ :  $p - q - r = 1$ ,  $-p + q - r = 1$  a  $-p - q + r = 1$ .
- 4.3 V množině  $\mathbb{R}^3$  řešte soustavu rovnic o neznámých  $a, b, c$ :  $3a + 2b + c = -1$ ,  $a + 2b + 3c = 0$  a  $a + b + c = 1$ .
- 4.4 V množině  $\mathbb{R}^3$  řešte soustavu rovnic o neznámých  $k, l, m$ :  $k - l - m = 1$ ,  $k + l + m = 1$  a  $-k - l - m = -1$ .
- 4.5 Určete, pro která  $\alpha \in \mathbb{R}$  má soustava rovnic o neznámých  $c, d$  a  $e$  v množině  $\mathbb{R}^3$  právě jedno řešení a toto řešení určete:  $c + 3d - 2e = 2$ ,  $c + 4d - 3e = \alpha$  a  $d - e + 2c = 0$ .
- 4.6 V množině  $\mathbb{R}^3$  určete řešení zadané soustavy rovnic o neznámých  $u, v$  a  $w$  v závislosti na koeficientu  $\beta \in \mathbb{R}$ :  $2u - w = 3$ ,  $3u - \beta v + 3w = 1$  a  $w + 2v = 2$ .
- 4.7 V množině  $\mathbb{R}^4$  řešte soustavu rovnic o neznámých  $w, x, y, z$ :  $w - x - y = 2$ ,  $x + y + z = 1$ ,  $w - x - z = -2$  a  $w + x + y = -1$ .

## 5. Determinanty

- 5.1 Vypočtěte determinant matice  $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .
- 5.2 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ .
- 5.3 Vypočtěte determinant matice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ .
- 5.4 Vypočtěte determinant matice  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5.5 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & k & 2 \\ -1 & 3 & k \end{vmatrix} = 15$ .
- 5.6 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $\begin{vmatrix} r & 2 & 1 \\ 4 & r & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$ .
- 5.7 Řešte v množině reálných čísel rovnici  $\begin{vmatrix} u & 3 & -2 \\ 0 & u & 4 \\ u & 6 & u \end{vmatrix} = 0$ .
- 5.8 Vypočtěte determinant matice  $W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5.9 Vypočtěte determinant matice  $R = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- 5.10 Vypočtěte determinant matice  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

5.11 Vypočtěte determinant matice  $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 6. Operace s vektory

Jsou dány vektory  $\vec{a} = (-3; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (-2; -1; 1)$ ,  $\vec{c} = (1; 2; -3)$  a  $\vec{d} = (-1; 3; 2)$ .

6.1 Vypočtěte  $|\vec{c}|$ .

6.2 Vypočtěte  $\vec{c} \cdot \vec{d}$

6.3 Vypočtěte  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

6.4 Vypočtěte  $\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

6.5 Vypočtěte  $\vec{c} \cdot \vec{d} \times \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

6.6 Vypočtěte  $|\vec{a} \cdot \vec{d} \times \vec{c} \cdot \vec{b}|$ .

6.7 Najděte jednotkový vektor ve směru vektoru  $\vec{b}$ .

6.8 Je dán rovnoběžník *AHOJ* body  $A = [1; -2; 1]$ ,  $H = [-2; 3; 1]$  a  $O = [3; 1; 0]$ . Určete obsah rovnoběžníku *AHOJ*.

6.9 Člověk zavírá okno volně otočné kolem pantů. Ruka člověka působí v místě, které je popsáno polohovým vektorem  $\vec{r} = (1; 0; 5; 1,5)$  m, a vektor síly je  $\vec{F} = (2; -1; 0)$  N. Určete vektor momentu sil a jeho velikosti.

6.10 Elektron vletí rychlostí  $\vec{v} = (1; -1; 2) \cdot 10^6$  m · s<sup>-1</sup> do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí  $\vec{B} = (-3; 2; 1)$  mT. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem magnetické indukce?

6.11 Proton urychlovaný elektrickým polem s intenzitou  $\vec{E} = (3; 2; -1) \cdot 10^4$  V · m<sup>-1</sup> vletí rychlostí  $\vec{v} = (1; 0; -3) \cdot 10^6$  m · s<sup>-1</sup> do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí  $\vec{B} = (-10; 10; 20)$  mT. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem elektrické intenzity?

## 7. Parciální derivace

Vypočtěte parciální derivace zadané funkce:

7.1  $f(x, y, z) = 2y^2 - x \cdot z + e^{z \sin(z+x^2)}$ ;

7.2  $g(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x^3 \cdot \ln z^4 + y \cdot \cos(\ln(x+2y))$ ;

7.3  $h(x, y) = \sin(x+y^2) \cdot e^{x^3} - y \cdot \ln \sqrt{x}$ .

7.4 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy  $x$  najděte body podezřelé z lokálního minima:  $v(x, y) = x^2 \cdot y^2 - 4x \cdot y + 2 \cdot \ln y$ .

7.5 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy  $x$  najděte body podezřelé z lokálního minima:  $k(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x \cdot y \cdot z + \ln e^{z \cdot \cos(2z+y)}$ .

## 8. Lineární diferenciální operátory

8.1 Je dána funkce  $f(x, y, z) = 2y^2 - xz + e^{z \sin(z+x^2)}$ . Určete grad  $f$ .

8.2 Je dán vektor  $\vec{v}(x, y, z) = (3x^2 + xy; \sin(x+y^2z); 2x \cos(\sqrt{z}) + y)$ . Vypočtěte div  $\vec{v}$ .

8.3 Je dán vektor  $\vec{u}(x, y, z) = \left( \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ . Vypočtěte rot  $\vec{u}$ .

- 8.4** Je dán vektor  $\vec{w}(x, y, z) = \left( \frac{3y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$ . Vypočtěte  $\text{rot } \vec{w}$ .
- 8.5** Aplikujte na vektor  $\vec{a}(x, y, z) = (x \ln y; y \cos(z^2 x); x^2 + 3y^2 - 2z)$  operátory rotace a divergence ve správném pořadí.
- 8.6** Aplikujte na skalární funkci  $g(x, y, z) = y \log x + z \cdot e^{2x+y} - 2z$  operátory gradient a divergence ve správném pořadí.
- 8.7** Aplikujte na vektor  $\vec{b}(x, y, z) = (e^x \cdot \ln(y \cdot z); 2x^3 - 3y + z; z \cdot \sin(z^2 + x \cdot y))$  operátory gradient a divergence ve správném pořadí.
- 8.8** Vypočtěte divergenci vektoru elektrické intenzity, který je v okolí bodového náboje  $Q$  v prostředí s relativní permitivitou  $\epsilon_r$  definován vztahem  $\vec{E} = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r}_0$ , kde  $\vec{r}_0$  je jednotkový vektor. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.
- 8.9** Vypočtěte gradient potenciálu elektrického pole, který je v okolí bodového náboje  $Q$  v prostředí s relativní permitivitou  $\epsilon_r$  definován vztahem  $\varphi = \frac{k}{\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$ . Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.
- 8.10** Vypočtěte gradient potenciálu gravitačního pole, který je definován vztahem  $V = -\frac{\kappa \cdot M \cdot m}{r}$ , kde  $M$  je hmotnost centrálního tělesa,  $m$  je hmotnost tělesa pohybujícího se v centrálním poli a  $\kappa$  je gravitační konstanta. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

## 9. Lineární diferenciální operátory 2

- 9.1** Odvoďte vztah pro  $\text{grad}(\alpha \beta)$ , kde  $\alpha, \beta$  jsou skaláry proměnných  $x, y$  a  $z$ .
- 9.2** Odvoďte vztah pro  $\text{div}(\lambda \vec{v})$ , kde  $\lambda$  je skalár proměnných  $x, y$  a  $z$  a  $\vec{v}$  je vektor proměnných  $x, y$  a  $z$ .
- 9.3** Vypočtěte  $\text{grad}(\alpha \cdot \beta)$ , kde  $\alpha = x \sin y - 3z \cos x$  a  $\beta = y - z \cdot e^x$ .
- 9.4** Vypočtěte  $\text{div}(\lambda \vec{v})$ , kde  $\lambda = y - 5z \cos x$  a  $\vec{v} = (x - yz; y - xz; z - xy)$ .
- 9.5** Vypočtěte  $\Delta \delta$ , kde  $\delta = y^2 \cdot e^{x^2} - z^3 \sin x$ .
- 9.6** Je dána funkce  $f(x(t), y(t), z(t), t) = x^2(t) + \sin(y(t)) + z(t) - t^3$ . Vypočtěte totální derivaci funkce  $f$  podle proměnné  $t$ .
- 9.7** Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice  $\text{div } \vec{D} = \rho$ .
- 9.8** Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice  $\text{div } \vec{B} = 0$ .
- 9.9** Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ .
- 9.10** Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice  $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ .

## 10. Diferenciální rovnice

- 10.1** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost narůstá lineárně s časem, tj. platí:  $F = k \cdot t$ , kde  $k$  je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase  $t_0 = 0$  s má hmotný bod velikost rychlosti  $v_0$  a již uraženou dráhu  $s_0$ .
- 10.2** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá exponenciálně s časem, tj. platí:  $F = F_0 \cdot e^{-k \cdot t}$ , kde  $F_0$  a  $k$  jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase  $t_0 = 0$  s má hmotný bod velikost rychlosti  $v_0$  a již uraženou dráhu  $s_0$ .
- 10.3** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá lineárně s velikostí rychlosti, tj. platí:  $F = -k \cdot v(t)$ , kde  $k$  je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti

rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase  $t_0 = 0$  s má hmotný bod velikost rychlosti  $v_0$  a již uraženou dráhu  $s_0$ .

**10.4** Hmotný bod o hmotnosti  $m$  se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost roste exponenciálně s velikostí rychlosti, tj. platí:  $F = F_0 \cdot e^{k \cdot v(t)}$ , kde  $F_0$  a  $k$  jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase  $t_0 = 0$  s má hmotný bod velikost rychlosti  $v_0$  a již uraženou dráhu  $s_0$ .

## Řešení úloh

### 1. Základní pojmy algebry

1.1 a) O zobrazení se bude jednat, jestliže v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina. b) Zobrazení bude prosté, pokud v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina a současně každá skupina bude hrát maximálně v jednom klubu. c) O bijekci se bude jednat, pokud budou splněny podmínky z části b) a současně skupin i klubů bude stejný počet.

1.2 Aby byl daný grupoid grupou, musí být splněny čtyři základní vlastnosti: uzavřenost operace na dané množině, asociativní zákon, existence neutrálního prvku a existence symetrického prvku. Uzavřenost na množině jistě splněná je - postavením dvou kostek na sebe vytvoříme stavbu, kterou lze z kostek realizovat. Při stavění stejných kostek na sebe lze postavit první, na ní druhou a až na ně postavit třetí, ale lze postupovat i tak, že na první postavíme rovnou dvě předem na sebe postavené kostky. Neutrální prvek existuje - nepostavíme žádnou kostku. Symetrický prvek lze nalézt také - kostku z dané kostky sundáme. Takže daný grupoid je grupa. Vzhledem k tomu, že lze kostky na sebe stavět v libovolném pořadí, je tato grupa Abelovou grupou.

### 2. Vektory (lineární kombinace, závislost, nezávislost, generátory)

2.1 jsou lineárně závislé;  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

2.2 jsou lineárně nezávislé

2.3 a)  $\sigma = 5$ ,  $\vec{g} = \frac{4}{5}\vec{f} - \frac{2}{5}\vec{e}$ ; b)  $\sigma \neq 5$

2.4 ano, generují

2.5 ano, generují

2.6 ne, negenerují

2.7  $\omega = -2$

### 3. Matice

3.1 2

3.2 3

3.3  $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.4  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

3.5  $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3.6  $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -8 \\ -1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$

3.7 a)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ , b)  $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , c) neexistuje

3.8 pro  $\alpha = -6$  inverzní matice neexistuje, pro  $\alpha \neq -6$  je to matice  $\frac{1}{\alpha+6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & -3 \end{pmatrix}$

3.9  $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

### 4. Soustavy rovnic

4.1  $O = D = \mathbb{R}^3$ ,  $P = \{[4; -5; 2]\}$



$$4.2 \quad O = D = \mathbb{R}^3, P = \{[-1; -1; -1]\}$$

$$4.3 \quad O = D = \mathbb{R}^3, P = \emptyset$$

$$4.4 \quad O = D = \mathbb{R}^3, P = \{[1; t; -t]; t \in \mathbb{R}\}$$

$$4.5 \quad O = D = \mathbb{R}^3, P = \left\{ \left[ \frac{2-\alpha}{2}; \frac{10-3\alpha}{2}; \frac{14-5\alpha}{2} \right]; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$4.6 \quad O = D = \mathbb{R}^3, \quad \text{pro } \beta = -9 \quad \text{je } P = \emptyset, \quad \text{pro } \beta \neq -9 \quad \text{je}$$

$$P = \left\{ \left[ \frac{5(\beta+4)}{2(\beta+9)}; \frac{5}{2} \left( 1 - \frac{\beta+4}{\beta+9} \right); -3 + \frac{5(\beta+4)}{\beta+9} \right]; \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-9\} \right\}$$

$$4.7 \quad O = D = \mathbb{R}^4, P = \left\{ \left[ \frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right] \right\}$$

## 5. Determinanty

$$5.1 \quad 6$$

$$5.2 \quad O = D = \mathbb{R}, P = \{6\}$$

$$5.3 \quad 35$$

$$5.4 \quad -9$$

$$5.5 \quad O = D = \mathbb{R}, P = \{1, 2\}$$

$$5.6 \quad O = D = \mathbb{R}, P = \{-1, 3\}$$

$$5.7 \quad O = D = \mathbb{R}, P = \{0, -1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\}$$

$$5.8 \quad 30$$

$$5.9 \quad -8$$

$$5.10 \quad 15$$

$$5.11 \quad -7$$

## 6. Operace s vektory

$$6.1 \quad \sqrt{14}$$

$$6.2 \quad -1.$$

$$6.3 \quad (1; 3; 5)$$

$$6.4 \quad -8$$

$$6.5 \quad (-18; -36; 54)$$

$$6.6 \quad 38\sqrt{6}$$

$$6.7 \quad \left( -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

$$6.8 \quad \sqrt{395} \mathbf{j}^2$$

$$6.9 \quad \vec{M} = (1, 5; 3; -2) \text{ N} \cdot \text{m}; M \doteq 3,9 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$6.10 \quad \vec{F} = (-5; -7; -1) \cdot 1,602 \cdot 10^{-16} \text{ N}; F \doteq 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ N}; 109^\circ$$

$$6.11 \quad \vec{F} = (6; 3; 0) \cdot 1,602 \cdot 10^{-15} \text{ N}; F \doteq 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ N}; 59,5^\circ$$

**7. Parciální derivace**

$$7.1 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -z + 2e^{z \sin(x^2+z)} \cdot x \cdot z \cdot \cos(x^2+z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -x + e^{z \sin(x^2+z)} \cdot (z \cdot \cos(x^2+z) + \sin(x^2+z))$$

$$7.2 \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2 - 3x^2 \cdot \ln z^4 - \frac{y \cdot \sin(\ln(x+2y))}{x+2y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 4xy + \cos(\ln(x+2y)) - \frac{2y \cdot \sin(\ln(x+2y))}{x+2y},$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{4x^3}{z}$$

$$7.3 \quad \frac{\partial h}{\partial x} = e^{x^3} \cdot \cos(x+y^2) + 3e^{x^3} \cdot x^2 \cdot \sin(x+y^2) - \frac{y}{2x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2e^{x^3} \cdot y \cdot \cos(x+y^2) - \ln \sqrt{x}$$

$$7.4 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \cdot y^2 - 4y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2 \cdot y - 4x + \frac{2}{y}, \quad \text{podezřelé body: } x = \frac{2}{y}$$

$$7.5 \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 2y^2 - y \cdot z, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 4x \cdot y - x \cdot z - z \cdot \sin(y+2z), \quad \frac{\partial k}{\partial z} = x \cdot y + \cos(y+2z) - 2z \cdot \sin(y+2z),$$

podezřelé body:  $y = 0$  nebo  $y = \frac{z}{2}$

**8. Lineární diferenciální operátory**

$$8.1 \quad \left( -z + 2x \cdot z \cdot e^{z \sin(z+x^2)} \cdot \cos(z+x^2); 4y; -x + e^{z \sin(z+x^2)} (z \cdot \cos(z+x^2) + \sin(z+x^2)) \right)$$

$$8.2 \quad 6x + y + 2xy \cos(x+xy^2) - \frac{x\sqrt{z} \sin(\sqrt{z})}{z}; \quad z > 0$$

$$8.3 \quad \left( \frac{3yz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{-4xz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right); \quad (x; y; z) \neq (0; 0; 0)$$

$$8.4 \quad \left( \frac{-2x^2+xy-2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{y^2-3yz+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{-3x^2-2xz-3z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right); \quad (x; y; z) \neq (0; 0; 0)$$

$$8.5 \quad 0$$

$$8.6 \quad -\frac{y}{x^2 \ln 10} + 5z \cdot e^{2x+y}; \quad x > 0$$

$$8.7 \quad \left( y \cdot \cos(z^2+x \cdot y) - 2y \cdot z^2 \cdot \sin(z^2+x \cdot y) + e^x \cdot \ln(y \cdot z); \frac{e^x}{y} + x \cdot \cos(z^2+x \cdot y) - 2x \cdot z^2 \cdot \sin(z^2+x \cdot y); \right. \\ \left. \frac{e^x}{z} + 6z \cdot \cos(z^2+x \cdot y) - 4z^3 \cdot \sin(z^2+x \cdot y) \right)$$

$$8.8 \quad 0$$

$$8.9 \quad \left( \frac{-k \cdot Q \cdot x}{\varepsilon_r \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{-k \cdot Q \cdot y}{\varepsilon_r \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{-k \cdot Q \cdot z}{\varepsilon_r \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right); \quad (x; y; z) \neq (0; 0; 0)$$

$$8.10 \quad \left( \frac{\kappa \cdot M \cdot m \cdot x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{\kappa \cdot M \cdot m \cdot y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}; \frac{\kappa \cdot M \cdot m \cdot z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right) = \frac{\kappa \cdot M \cdot m}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x, y, z) = \frac{\kappa \cdot M \cdot m}{r^2} r_0^{-1};$$

$(x; y; z) \neq (0; 0; 0)$

**9. Lineární diferenciální operátory 2**

$$9.1 \quad \text{grad}(\alpha \beta) = \alpha \text{grad} \beta + \beta \text{grad} \alpha$$

$$9.2 \quad \text{div}(\lambda \vec{v}) = \lambda \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad} \lambda$$

$$9.3 \quad \left( (y - z \cdot e^x)(3z \cdot \sin x + \sin y) + e^x z(3z \cos x - x \sin y) \right); -3z \cos x + x(y - z \cdot e^x) \cos y + x \sin y; \\ -3(y - 2z \cdot e^x) \cos x - x \cdot e^x \sin y$$

$$9.4 \quad 4y - xz - 15z \cos x - 5(z - xy) \cos x + 5z(x - yz) \sin x$$

$$9.5 \quad \delta = 2e^{x^2} (1 + y^2 + 2x^2 y^2) + z \sin x (z^2 - 6)$$

$$9.6 \quad \frac{df}{dt} = (2x, \cos y, 1) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) - 3t^2$$

$$9.7 \quad 6x + y + 2xy \cos(x + xy^2) - \frac{x\sqrt{z} \sin(\sqrt{z})}{z}; z > 0$$

### 10. Diferenciální rovnice

$$10.1 \quad a(t) = \frac{k \cdot t}{m}, v(t) = \frac{k \cdot t^2}{2m} + v_0, s(t) = \frac{k \cdot t^3}{6m} + v_0 \cdot t + s_0$$

$$10.2 \quad a(t) = \frac{F_0 \cdot e^{-k \cdot t}}{m}, v(t) = -\frac{F_0 \cdot e^{-k \cdot t}}{k \cdot m} + v_0 + \frac{F_0}{k \cdot m}, s(t) = \frac{F_0 \cdot e^{-k \cdot t}}{k^2 \cdot m} + \left( v_0 + \frac{F_0}{k \cdot m} \right) \cdot t + s_0 - \frac{F_0}{k^2 \cdot m}$$

$$10.3 \quad v(t) = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}, a(t) = -v_0 \cdot \frac{k}{m} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}, s(t) = -v_0 \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + v_0 \cdot \frac{m}{k} + s_0$$

$$10.4 \quad v(t) = -\frac{1}{k} \cdot \ln \left( e^{-k \cdot v_0} - \frac{k \cdot F_0}{m} \cdot t \right), \quad a(t) = \frac{F_0}{m \cdot \left( e^{-k \cdot v_0} - \frac{k \cdot F_0}{m} \cdot t \right)},$$

$$s(t) = -\frac{1}{k} \cdot \left( -t + t \cdot \ln \left( e^{-k \cdot v_0} - \frac{k \cdot F_0}{m} \cdot t \right) - \frac{m \cdot e^{-k \cdot v_0} \cdot \ln \left( e^{-k \cdot v_0} - \frac{k \cdot F_0}{m} \cdot t \right)}{k \cdot F_0} \right) + s_0 + \frac{m \cdot v_0 \cdot e^{-k \cdot v_0}}{k \cdot F_0}$$

### Zdroje a inspirace příkladů:

[1] život, fantazie a zkušenosti Jaroslava Reichla

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.