PANSKÁ
Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Sbírka úloh

z aplikované matematiky

určená studentům 4. ročníku technického lycea jako doplněk ke studiu aplikované matematiky

Jaroslav Reichl

Obsah

1. Základní pojmy algebry

1.1 Jsou dány dvě množiny: množina K rockových klubů v Praze a množina S rockových skupin hrajících v rockových klubech. Rozhodněte, za jakých podmínek je kartézský součin $K \times S$: a) zobrazením, b) prostým zobrazením, c) bijekcí. Podmínky v jednotlivých částech úlohy vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl nalezených podmínek.

1.2 Je dána množina S všech staveb, které lze vytvořit ze stejných kostek dětské stavebnice, a operace p *postavení dvou kostek na sebe*. Zjistěte, zda grupoid (K, p) je a) grupou, b) Abelovou grupou. Podmínky (ověření definice) vypište slovně. Řešte bez ohledu na reálný smysl platných podmínek.

2. Vektory (lineární kombinace, závilost, nezávislost, generátory)

2.1 Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a} = (3; 1; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; 1)$ a $\vec{c} = (3; -1; 2)$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.2 Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = (4; 1; 5)$, $\vec{v} = (1; 0; -1)$ a $\vec{w} = (0; -1; 2)$ lineárně závislé nebo nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.3 Zjistěte, pro které $\sigma \in \mathbb{R}$ jsou vektory $\vec{e} = (3; -2; \sigma)$, $\vec{f} = (4; -1; 0)$ a $\vec{g} = (2; 0; -2)$ a) lineárně závislé, b) lineárně nezávislé. V případě a) napište příslušnou lineární kombinaci vektorů.

2.4 Zjistěte, zda vektory $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; 2; 3)$ a $\vec{w} = (4; 2; -1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.5 Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; 0)$ a $\vec{c} = (0; 2; -1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.6 Zjistěte, zda vektory $\vec{m} = (0; 1; 3)$, $\vec{n} = (0; 2; 0)$ a $\vec{p} = (0; 2; 1)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

2.7 Zjistěte, pro která $\omega \in \mathbb{R}$ vektory $\vec{p} = (-1; -2; 3)$, $\vec{q} = (\omega; 0; 2)$ a $\vec{r} = (1; -1; 0)$ generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

3. Matice

3.1 Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3.2 Určete hodnost matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3 Vypočtěte součet matic A a B.

3.4 Vypočtěte rozdíl matic A a B.

3.5 Vypočtěte součin matic B a C.

3.6 K součinu matic A a C přičtěte matici B.

3.7 Určete inverzní matici k matici: a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.8 Určete inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$ v závislosti na reálném koeficientu α.

3.9 Určete inverzní matici k matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Soustavy rovnic

4.1 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých x, y, z: $x + y + z = 1$, $x + 2y + 3z = 0$ a $3x + 3y + z = -1$.

4.2 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých *p*, *q*, *r*: $p-q-r=1$, $-p+q-r=1$ a $-p-q+r=1$.

4.3 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých *a*, *b*, *c*: $3a+2b+c=-1$, $a+2b+3c=0$ a $a+b+c=1$.

4.4 V množině $\mathbb{R}^3$ řešte soustavu rovnic o neznámých *k*, *l*, *m*: $k-l-m=1$, $k+l+m=1$ a $-k-l-m=-1$.

4.5 Určete, pro která $\alpha\in\mathbb{R}$ má soustava rovnic o neznámých *c*, *d* a *e* v množině $\mathbb{R}^3$ právě jedno řešení a toto řešení určete: $c+3d-2e=2$, $c+4d-3e=\alpha$ a $d-e+2c=0$.

4.6 V množině $\mathbb{R}^3$ určete řešení zadané soustavy rovnic o neznámých *u*, *v* a *w* v závislosti na koeficientu $\beta\in\mathbb{R}$: $2u-w=3$, $3u-\beta v+3w=1$ a $w+2v=2$.

4.7 V množině $\mathbb{R}^4$ řešte soustavu rovnic o neznámých *w*, *x*, *y*, *z*: $w-x-y=2$, $x+y+z=1$, $w-x-z=-2$ a $w+x+y=-1$.

5. Determinanty

5.1 Vypočtěte determinant matice $M=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

5.2 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix}x & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0$.

5.3 Vypočtěte determinant matice $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ -1 & 5 & 4\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

5.4 Vypočtěte determinant matice $Q=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$.

5.5 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & k & 2\\ -1 & 3 & k\end{vmatrix}=15$.

5.6 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix}r & 2 & 1\\ 4 & r & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=4$.

5.7 Řešte v množině reálných čísel rovnici $\begin{vmatrix}u & 3 & -2\\ 0 & u & 4\\ u & 6 & u\end{vmatrix}=0$.

5.8 Vypočtěte determinant matice $W=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5.9 Vypočtěte determinant matice $R=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5.10 Vypočtěte determinant matice $K=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -3\\ 1 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

5.11 Vypočtěte determinant matice $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Operace s vektory

Jsou dány vektory $\vec{a} = (-3; 1; 0)$, $\vec{b} = (-2; -1; 1)$, $\vec{c} = (1; 2; -3)$ a $\vec{d} = (-1; 3; 2)$.

6.1 Vypočtěte $|\vec{c}|$.

6.2 Vypočtěte $\vec{c} \cdot \vec{d}$

6.3 Vypočtěte $\vec{a} \times \vec{b}$.

6.4 Vypočtěte $\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{a}$.

6.5 Vypočtěte $\vec{c}\,\vec{d} \times \vec{b} \cdot \vec{a}$.

6.6 Vypočtěte $|\vec{a} \cdot \vec{d} \times \vec{c}\,\vec{b}|$.

6.7 Najděte jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{b}$.

6.8 Je dán rovnoběžník *AHOJ* body $A = [1; -2; 1]$, $H = [-2; 3; 1]$ a $O = [3; 1; 0]$. Určete obsah rovnoběžníku *AHOJ*.

6.9 Člověk zavírá okno volně otočné kolem pantů. Ruka člověka působí v místě, které je popsáno polohovým vektorem $\vec{r} = (1; 0{,}5; 1{,}5)\ \mathrm{m}$, a vektor síly je $\vec{F} = (2; -1; 0)\ \mathrm{N}$. Určete vektor momentu sil a jeho velikosti.

6.10 Elektron vletí rychlostí $\vec{v} = (1; -1; 2) \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí $\vec{B} = (-3; 2; 1)\ \mathrm{mT}$. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem magnetické indukce?

6.11 Proton urychlovaný elektrickým polem s intenzitou $\vec{E} = (3; 2; -1) \cdot 10^4\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$ vletí rychlostí $\vec{v} = (1; 0; -3) \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ do homogenního magnetického pole popsaného magnetickou indukcí $\vec{B} = (-10; 10; 20)\ \mathrm{mT}$. Určete vektor magnetické síly a vypočtěte její velikost. Jaký úhel svírá vektor rychlosti s vektorem elektrické intenzity?

7. Parciální derivace

Vypočtěte parciální derivace zadané funkce:

7.1 $f(x, y, z) = 2y^2 - x \cdot z + e^{z \cdot \sin(z + x^2)}$;

7.2 $g(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x^3 \cdot \ln z^4 + y \cdot \cos(\ln(x + 2y))$;

7.3 $h(x, y) = \sin(x + y^2) \cdot e^{x^3} - y \cdot \ln\sqrt{x}$.

7.4 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy x najděte body podezřelé z lokálního minima: $v(x, y) = x^2 \cdot y^2 - 4x \cdot y + 2 \cdot \ln y$.

7.5 Vypočtěte parciální derivace zadané funkce a ve směru osy x najděte body podezřelé z lokálního minima: $k(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - x \cdot y \cdot z + \ln e^{z \cdot \cos(2z + y)}$.

8. Lineární diferenciální operátory

8.1 Je dána funkce $f(x, y, z) = 2y^2 - xz + e^{z \sin(z + x^2)}$. Určete $\operatorname{grad} f$.

8.2 Je dán vektor $\vec{v}(x, y, z) = \left(3x^2 + xy; \sin(x + y^2 z); 2x\cos(\sqrt{z}) + y\right)$. Vypočtěte $\operatorname{div}\vec{v}$.

8.3 Je dán vektor $\vec{u}(x, y, z) = \left(\dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \dfrac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$. Vypočtěte $\operatorname{rot}\vec{u}$.

8.4 Je dán vektor $\vec{w}(x, y, z) = \left(\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$. Vypočtěte $\operatorname{rot}\vec{u}$.

8.5 Aplikujte na vektor $\vec{a}(x, y, z) = \left(x\ln y;\ y\cos\left(z^2 x\right);\ x^2 + 3y^2 - 2z \right)$ operátory rotace a divergence ve správném pořadí.

8.6 Aplikujte na skalární funkci $g(x, y, z) = y\log x + z \cdot e^{2x+y} - 2z$ operátory gradient a divergence ve správném pořadí.

8.7 Aplikujte na vektor $\vec{b}(x, y, z) = \left(e^x \cdot \ln(y \cdot z);\ 2x^3 - 3y + z;\ z \cdot \sin\left(z^2 + x \cdot y\right) \right)$ operátory gradient a divergence ve správném pořadí.

8.8 Vypočtěte divergenci vektoru elektrické intenzity, který je v okolí bodového náboje Q v prostředí s relativní permitivitou ε_r definován vztahem $\vec{E} = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{r_0}$, kde $\vec{r_0}$ je jednotkový vektor. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

8.9 Vypočtěte gradient potenciálu elektrického pole, který je v okolí bodového náboje Q v prostředí s relativní permitivitou ε_r definován vztahem $\varphi = \frac{k}{\varepsilon_r} \cdot \frac{Q}{r}$. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

8.10 Vypočtěte gradient potenciálu gravitačního pole, který je definován vztahem $V = -\frac{\kappa \cdot M \cdot m}{r}$, kde M je hmotnost centrálního tělesa, m je hmotnost tělesa pohybujícího se v centrálním poli a κ je gravitační konstanta. Výpočet proveďte v kartézské soustavě souřadnic.

9. Lineární diferenciální operátory 2

9.1 Odvoďte vztah pro $\operatorname{grad}(\alpha\,\beta)$, kde α, β jsou skaláry proměnných *x*, *y* a *z*.

9.2 Odvoďte vztah pro $\operatorname{div}\left(\lambda\vec{v}\right)$, kde λ je skalár proměnných *x*, *y* a *z* a $\vec{v}$ je vektor proměnných *x*, *y* a *z*.

9.3 Vypočtěte $\operatorname{grad}(\alpha \cdot \beta)$, kde $\alpha = x\sin y - 3z\cos x$ a $\beta = y - z \cdot \mathrm{e}^x$.

9.4 Vypočtěte $\operatorname{div}\left(\lambda\vec{v}\right)$, kde $\lambda = y - 5z\cos x$ a $\vec{v} = (x - yz;\ y - xz;\ z - xy)$.

9.5 Vypočtěte $\Delta\delta$, kde $\delta = y^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2} - z^3 \sin x$.

9.6 Je dána funkce $f\left(x(t), y(t), z(t), t\right) = x^2(t) + \sin\left(y(t)\right) + z(t) - t^3$. Vypočtěte totální derivaci funkce *f* podle proměnné *t*.

9.7 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

9.8 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

9.9 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

9.10 Vysvětlete fyzikální význam Maxwellovy rovnice $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$.

10. Diferenciální rovnice

10.1 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost narůstá lineárně s časem, tj. platí: $F = k \cdot t$, kde *k* je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.2 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá exponenciálně s časem, tj. platí: $F = F_0 \cdot e^{-k \cdot t}$, kde F_0 a *k* jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.3 Hmotný bod o hmotnosti *m* se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost klesá lineárně s velikostí rychlosti, tj. platí: $F = -k \cdot v(t)$, kde *k* je kladná konstanta. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

10.4 Hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje po úsečce pod vlivem síly, jejíž velikost roste exponenciálně s velikostí rychlosti, tj. platí: $F = F_0 \cdot e^{k \cdot v(t)}$, kde F_0 a k jsou kladné konstanty. Najděte závislost uražené dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, jestliže v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ má hmotný bod velikost rychlosti v_0 a již uraženou dráhu s_0.

Řešení úloh

1. Základní pojmy algebry

1.1 a) O zobrazení se bude jednat, jestliže v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina. b) Zobrazení bude prosté, pokud v každém klubu bude hrát maximálně jedna skupina a současně každá skupina bude hrát maximálně v jednom klubu. c) O bijekci se bude jednat, pokud budou splněny podmínky z části b) a současně skupin i klubů bude stejný počet.

1.2 Aby byl daný grupoid grupou, musí být splněny čtyři základní vlastnosti: uzavřenost operace na dané množině, asociativní zákon, existence neutrálního prvku a existence symetrického prvku. Uzavřenost na množině jistě splněná je - postavením dvou kostek na sebe vytvoříme stavbu, kterou lze z kostek realizovat. Při stavění stejných kostek na sebe lze postavit první, na ní druhou a až na ně postavit třetí, ale lze postupovat i tak, že na první postavíme rovnou dvě předem na sebe postavené kostky. Neutrální prvek existuje - nepostavíme žádnou kostku. Symetrický prvek lze nalézt také - kostku z dané kostky sundáme. Takže daný grupoid je grupa. Vzhledem k tomu, že lze kostky na sebe stavět v libovolném pořadí, je tato grupa Abelovou grupou.

2. Vektory (lineární kombinace, závilost, nezávislost, generátory)

2.1 jsou lineárně závislé; $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

2.2 jsou lineárně nezávislé

2.3 a) $\sigma = 5$, $\vec{g} = \frac{4}{5}\vec{f} - \frac{2}{5}\vec{e}$; b) $\sigma \neq 5$

2.4 ano, generují

2.5 ano, generují

2.6 ne, negenerují

2.7 $\omega = -2$

3. Matice

3.1 2

3.2 3

3.3 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

3.4 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

3.5 $\begin{pmatrix} -3 & 12 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3.6 $\begin{pmatrix} 3 & 11 & -8 \\ -1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$

3.7 a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) neexistuje

3.8 pro $\alpha = -6$ inverzní matice neexistuje, pro $\alpha \neq -6$ je to matice $\frac{1}{\alpha+6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & -3 \end{pmatrix}$

3.9 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

4. Soustavy rovnic

4.1 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \{[4; -5; 2]\}$

4.2 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \{[-1; -1; -1]\}$

4.3 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \emptyset$

4.4 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \{[1; t; -t]; t \in \mathbb{R}\}$

4.5 $O = D = \mathbb{R}^3$, $P = \left\{\left[\frac{2-\alpha}{2}; \frac{10-3\alpha}{2}; \frac{14-5\alpha}{2}\right]; \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

4.6 $O = D = \mathbb{R}^3$, pro $\beta = -9$ je $P = \emptyset$, pro $\beta \neq -9$ je $P = \left\{\left[\frac{5(\beta+4)}{2(\beta+9)}; \frac{5}{2}\left(1 - \frac{\beta+4}{\beta+9}\right); -3 + \frac{5(\beta+4)}{\beta+9}\right]; \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-9\}\right\}$

4.7 $O = D = \mathbb{R}^4$, $P = \left\{\left[\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]\right\}$

5. <u>Determinanty</u>

5.1 6

5.2 $O = D = \mathbb{R}$, $P = \{6\}$

5.3 35

5.4 -9

5.5 $O = D = \mathbb{R}$, $P = \{1, 2\}$

5.6 $O = D = \mathbb{R}$, $P = \{-2, 3\}$

5.7 $O = D = \mathbb{R}$, $P = \{0, -1-\sqrt{13}, -1+\sqrt{13}\}$

5.8 30

5.9 -8

5.10 15

5.11 -7

6. <u>Operace s vektory</u>

6.1 $\sqrt{14}$

6.2 -1.

6.3 $(1; 3; 5)$

6.4 -8

6.5 $(-18; -36; 54)$

6.6 $38\sqrt{6}$

6.7 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

6.8 $\sqrt{395}\ \mathrm{j}^2$

6.9 $\vec{M} = (1{,}5; 3; -2)\ \mathrm{N \cdot m}$; $M \doteq 3{,}9\ \mathrm{N \cdot m}$

6.10 $\vec{F} = (-5; -7; -1) \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{N}$; $F \doteq 1{,}4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$; $109°$

6.11 $\vec{F} = (6; 3; 0) \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$; $F \doteq 1{,}1 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}$; $59{,}5°$

7. Parciální derivace

7.1 $\frac{\partial f}{\partial x} = -z + 2e^{z\cdot\sin\left(x^2+z\right)} \cdot x \cdot z \cdot \cos\left(x^2+z\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -x + e^{z\cdot\sin\left(x^2+z\right)} \cdot \left(z \cdot \cos\left(x^2+z\right) + \sin\left(x^2+z\right)\right)$

7.2 $\frac{\partial g}{\partial x} = 2y^2 - 3x^2 \cdot \ln z^4 - \frac{y \cdot \sin\left(\ln\left(x+2y\right)\right)}{x+2y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 4xy + \cos\left(\ln\left(x+2y\right)\right) - \frac{2y \cdot \sin\left(\ln\left(x+2y\right)\right)}{x+2y}$, $\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{4x^3}{z}$

7.3 $\frac{\partial h}{\partial x} = e^{x^3} \cdot \cos\left(x+y^2\right) + 3e^{x^3} \cdot x^2 \cdot \sin\left(x+y^2\right) - \frac{y}{2x}$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 2e^{x^3} \cdot y \cdot \cos\left(x+y^2\right) - \ln\sqrt{x}$

7.4 $\frac{\partial v}{\partial x} = 2x \cdot y^2 - 4y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2 \cdot y - 4x + \frac{2}{y}$, podezřelé body: $x = \frac{2}{y}$

7.5 $\frac{\partial k}{\partial x} = 2y^2 - y \cdot z$, $\frac{\partial k}{\partial y} = 4x \cdot y - x \cdot z - z \cdot \sin\left(y+2z\right)$, $\frac{\partial k}{\partial z} = x \cdot y + \cos\left(y+2z\right) - 2z \cdot \sin\left(y+2z\right)$,

podezřelé body: $y = 0$ nebo $y = \frac{z}{2}$

8. Lineární diferenciální operátory

8.1 $\left(-z + 2x \cdot z \cdot e^{z\sin\left(z+x^2\right)} \cdot \cos\left(z+x^2\right); 4y; -x + e^{z\sin\left(z+x^2\right)}\left(z \cdot \cos\left(z+x^2\right) + \sin\left(z+x^2\right)\right)\right)$

8.2 $6x + y + 2xy\cos\left(x+xy^2\right) - \frac{x\sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}\right)}{z}$; $z > 0$

8.3 $\left(\frac{3yz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{-4xz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $\left(x; y; z\right) \neq \left(0; 0; 0\right)$

8.4 $\left(\frac{-2x^2+xy-2y^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{y^2-3yz+z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{-3x^2-2xz-3z^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $\left(x; y; z\right) \neq \left(0; 0; 0\right)$

8.5 0

8.6 $-\frac{y}{x^2\ln 10} + 5z \cdot e^{2x+y}$; $x > 0$

8.7 $\left(y \cdot \cos\left(z^2+x\cdot y\right) - 2y \cdot z^2 \cdot \sin\left(z^2+x\cdot y\right) + e^x \cdot \ln\left(y\cdot z\right); \frac{e^x}{y} + x \cdot \cos\left(z^2+x\cdot y\right) - 2x \cdot z^2 \cdot \sin\left(z^2+x\cdot y\right);\right.$

$\left.\frac{e^x}{z} + 6z \cdot \cos\left(z^2+x\cdot y\right) - 4z^3 \cdot \sin\left(z^2+x\cdot y\right)\right)$

8.8 0

8.9 $\left(\frac{-k\cdot Q\cdot x}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{-k\cdot Q\cdot y}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{-k\cdot Q\cdot z}{\varepsilon_r\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right)$; $\left(x; y; z\right) \neq \left(0; 0; 0\right)$

8.10 $\left(\frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}; \frac{\kappa\cdot M\cdot m\cdot z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\right) = \frac{\kappa\cdot M\cdot m}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}\left(x, y, z\right) = \frac{\kappa\cdot M\cdot m}{r^2}\vec{r_0}$;

$\left(x; y; z\right) \neq \left(0; 0; 0\right)$

9. Lineární diferenciální operátory 2

9.1 $\mathrm{grad}\left(\alpha\,\beta\right) = \alpha\,\mathrm{grad}\beta + \beta\,\mathrm{grad}\alpha$

9.2 $\mathrm{div}\left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda\,\mathrm{div}\vec{v} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\lambda$

9.3 $\left(\left(y-z\cdot \mathrm{e}^{x}\right)\left(3z\cdot\sin x+\sin y\right)+\mathrm{e}^{x}z\left(3z\cos x-x\sin y\right);-3z\cos x+x\left(y-z\cdot\mathrm{e}^{x}\right)\cos y+x\sin y;\right.$
$\left.-3\left(y-2z\cdot\mathrm{e}^{x}\right)\cos x-x\cdot\mathrm{e}^{x}\sin y\right)$

9.4 $4y-xz-15z\cos x-5\left(z-xy\right)\cos x+5z\left(x-yz\right)\sin x$

9.5 $\delta=2\mathrm{e}^{x^2}\left(1+y^2+2x^2y^2\right)+z\sin x\left(z^2-6\right)$

9.6 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\left(2x,\cos y,1\right)\cdot\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)-3t^2$

9.7 $6x+y+2xy\cos\left(x+xy^2\right)-\dfrac{x\sqrt{z}\sin\left(\sqrt{z}\right)}{z}$; $z>0$

10. Diferenciální rovnice

10.1 $a(t)=\dfrac{k\cdot t}{m}$, $v(t)=\dfrac{k\cdot t^2}{2m}+v_0$, $s(t)=\dfrac{k\cdot t^3}{6m}+v_0\cdot t+s_0$

10.2 $a(t)=\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{m}$, $v(t)=-\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{k\cdot m}+v_0+\dfrac{F_0}{k\cdot m}$, $s(t)=\dfrac{F_0\cdot e^{-k\cdot t}}{k^2\cdot m}+\left(v_0+\dfrac{F_0}{k\cdot m}\right)\cdot t+s_0-\dfrac{F_0}{k^2\cdot m}$

10.3 $v(t)=v_0\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$, $a(t)=-v_0\cdot\dfrac{k}{m}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$, $s(t)=-v_0\cdot\dfrac{m}{k}\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}+v_0\cdot\dfrac{m}{k}+s_0$

10.4 $v(t)=-\dfrac{1}{k}\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\dfrac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)$, $a(t)=\dfrac{F_0}{m\cdot\left(e^{-k\cdot v_0}-\dfrac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)}$,

$$s(t)=-\frac{1}{k}\cdot\left(-t+t\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\frac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)-\frac{m\cdot e^{-k\cdot v_0}\cdot\ln\left(e^{-k\cdot v_0}-\frac{k\cdot F_0}{m}\cdot t\right)}{k\cdot F_0}\right)+s_0+\frac{m\cdot v_0\cdot e^{-k\cdot v_0}}{k\cdot F_0}$$

Zdroje a inspirace příkladů:

[1] život, fantazie a zkušenosti Jaroslava Reichla

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.