Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Sbírka příkladů z matematiky

Sbírka příkladů z matematiky

určená studentům 2. ročníku OZT a DGT jako příprava k opakování učiva z matematiky za první dva ročníky

Jaroslav Reichl

Obsah

Zadání

Řešení

Než začnete řešit aneb rady, porady, výmluvy a omluvy

Sbírka obsahuje řadu příkladů na procvičení (a dokonce i prohloubení) učiva probíraného v matematice v prvním a druhém ročníku oboru DGT a OZT. Neobsahuje zatím ty partie, které dosud nebyly probrány, ale sbírka se bude pochopitelně dále vyvíjet, doplňovat a aktualizovat. Tudíž se nebojte mi veškeré své náměty, nápady, stížnosti, … sdělit. Pokud to půjde, rád vyhovím.

Ve druhé části sbírky jsou uvedeny výsledky ke všem příkladům. Všechny příklady jsem sám vyřešil a to i ty příklady, které jsem čerpal z jiných sbírek či knih, a to proto, abych výsledky ověřil (eventuelně doplnil a uvedl v té podobě, kterou běžně používáme na SPŠST Panská). Z toho důvodu se snadno mohlo stát, že při poměrně vysokém počtu příkladů jsem se někde dopustil chybičky, něco jsem přehlédl, pozapomněl, … a nebo udělal překlep až při přepisování výsledků do počítače. Proto prosím o jednu věc: nebude-li vám daný příklad vycházet, zkonzultujete to s kamarády a pokud se nedoberete společného uspokojivého závěru, kontaktujte mě - v případě mého omylu tak totiž ušetříte čas ostatním uživatelům této sbírky.

Co se výsledků týče, jsou uváděny (jak bylo již řečeno) v tom tvaru, který je běžný na SPŠST Panská. Obrázky funkcí (kapitola 9) byly vykresleny s použitím systému FAMULUS. Funkce jsou vykreslovány ve svých definičních oborech s výjimkou těch, které mají definiční obor „děravý“ (úpravy výrazu, …). U uvedených funkcí nejsou ve výsledných grafech vzniklé „díry“ zakresleny, ale v definičním oboru podchyceny jsou.

Poslední upozornění (má-li sbírka sloužit pro vaše procvičení): příklady řešte (s výjimkou kapitoly 7) **B E Z K A L K U L A Č E K**, počítače, či jiných technických vynálezů - bystřete si svůj vlastní mozek.

Praha 18. 2. 2001

Jaroslav Reichl

1. Mocniny, odmocniny

1.1 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\left(\dfrac{a^2b^{-4}}{c^{-3}d^{-2}}\right)^{-3}:\left(\dfrac{c^2b^{-3}}{a^{-3}d^{-2}}\right)^{-2}$

1.2 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\left(\dfrac{x^{-5}y^3}{v^{-1}z^2}\right)^{-2}:\left(\dfrac{x^3v^{-2}}{y^{-2}z^4}\right)^{-3}$.

1.3 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\dfrac{8a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}}{\left(2ab^{\frac{2}{3}}\right)^{-2}}$.

1.4 Zapište ve tvaru, v jehož jmenovateli není žádná proměnná: $\left(\dfrac{3a^3b^2}{5x^2y^3}\right)^3.\left(\dfrac{2ax^2}{3b^2y}\right)^3:\left(\dfrac{3a^4b^2}{5b^2y^6}\right)^2$.

1.5 Zapište ve tvaru, v jehož jmenovateli se nevyskytuje žádná proměnná: $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2x^{-3}b^3}{5a^{-2}y^2}\right)^2:\left(\dfrac{3a^{-2}x^2}{5by^{-1}}\right)^3$.

1.6 Zapište ve tvaru, jehož jmenovatel neobsahuje žádnou proměnnou: $\left(\dfrac{2ay^{-1}x}{z}.\dfrac{3x}{ab^{-1}y}\right):\left(\dfrac{8a^2x}{9b^2y^{-1}z}\right)^{-1}$.

1.7 Zjednodušte: $\left[\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{4}}:\left(\dfrac{2a^{-1}}{\sqrt[4]{2a^4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right].\left[\dfrac{3\sqrt[4]{a^{\frac{5}{2}}}.(6a)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{27}}\right]^{-1}$.

1.8 Zjednodušte: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt{a^3}}}$.

1.9 Zjednodušte: $\sqrt[5]{\left(\dfrac{\sqrt{a}.a^{-2}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}}$.

1.10 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\sqrt[4]{(a+b)\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}:\sqrt[3]{\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{a-b}}}$.

1.11 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\left(\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}\right)^5.\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}\sqrt[5]{\dfrac{a+x}{a-x}}}$.

1.12 Upravte: $\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}.(x+y)^{0,5}.\sqrt{\left(x^2+y^2-xy\right)^{-1}}$.

1.13 Usměrněte: $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$.

1.14 Usměrněte: $\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{12}}-\dfrac{4}{\sqrt{27}}$.

1.15 Usměrněte: $\dfrac{3}{\sqrt{2-\sqrt{5}}}$.

1.16 Usměrněte: $\dfrac{1}{2-\sqrt{\sqrt{2}}}$.

1.17 Usměrněte: $\dfrac{6}{\sqrt[3]{5}}+\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$.

1.18 Usměrněte: $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}}$.

1.19 Usměrněte: $\dfrac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$.

1.20 Usměrněte: $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

1.21 Usměrněte: $\dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

1.22 Upravte a zapište v usměrněném tvaru: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

1.23 Usměrněte: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

1.24 Usměrněte: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

1.25 Upravte: $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3+\sqrt{x}}{1-x}$.

1.26 Upravte: $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}-\sqrt{x^2-1}$.

2. Úpravy algebraických výrazů

V příkladech 2.1 - 2.8 rozložte dané výrazy na součin.

2.1 $8-d^3$ **2.2** $m^2+2mn+n^2-mp-np$ **2.3** $2x^5-2x$ **2.4** $x^2+3x-10$

2.5 u^3+27 **2.6** $b^3+5b^2-bx^2-5x^2$ **2.7** x^2-x-12 **2.8** $k^3-3k^2-4k+12$

2.9 Rozložte na součin: $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$.

2.10 Upravte: $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+1\right):\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}+1\right)$.

2.11 Upravte: $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$.

2.12 Zjednodušte: $\dfrac{7v-1}{2v^2+6v}-\dfrac{3v-5}{v^2-9}$.

2.13 Zjednodušte: $\dfrac{4}{3m-3n}-\dfrac{3m-4n}{2m^2-4mn+2n^2}$.

2.14 Proveďte: $\dfrac{\frac{k}{z}-\frac{z}{k}}{\frac{k}{z^2}-\frac{2}{z}+\frac{1}{k}}$.

2.15 Proveďte: $\dfrac{\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}}{\frac{x^2+y^2}{xy}-2}$.

2.16 Zjednodušte: $\dfrac{\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}}$.

2.17 Zjednodušte:
$\dfrac{1}{(x-y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x-y)^3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$.

2.18 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $6a+\left(\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{a}{a+2}\right):\dfrac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}$.

2.19 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2-4}{x^3+x^2-4x-4}-3x$.

2.20 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\left(\dfrac{a^2-ab^2+b^3}{(a-b)^3}-\dfrac{b}{a-b}\right):\left(\dfrac{a^2-2ab+2b^2}{a^2-ab+b^2}-\dfrac{b}{a}\right)$.

2.21 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\dfrac{2x^2-20x+18}{x^3-7x^2-18x}:\dfrac{x^3-x^2+3x-3}{3x^3+12x+12x^2}$.

2.22 Zjednodušte a udejte podmínky platnosti: $\dfrac{x^3-7x^2+12x}{2x^2+6x-36}:\dfrac{2(x^2+8x)-x^2(x+2)}{2x^2+20x+48}$.

2.23 *** Dokažte, že každé celé číslo ve tvaru a^4+4, kde $a\neq 1$ je číslo složené.

3. Lineární rovnice a nerovnice

3.1 Řešte v R rovnici $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{5}{(x+3)(2-x)}$.

3.2 V množině reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{(2x-3)^2}{x-3}=4x-\dfrac{9}{3-x}$.

3.3 V množině reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{2x}{3-x}=\dfrac{72}{4x^2-36}$.

3.4 V množině reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2+2x-3}=0$.

3.5 Určete všechna reálná x, pro která platí: $2|x|+|1-x|=2-|x-1|$.

3.6 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $|2x+1|+|3-x|=4$.

3.7 Řešte v R početně i graficky rovnici $|5-x|-|x-3|=2|x+1|$.

3.8 V oboru reálných čísel řešte početně i graficky rovnici $\big|3-|x-5|\big|=|4-x|$.

3.9 Určete všechna reálná p tak, aby řešením rovnice $x(p-1)+p(x-1)=p-2x$ s reálnou neznámou x a parametrem p bylo nezáporné číslo.

3.10 V množině reálných čísel řešte rovnici s neznámou x a parametrem a: $a(x+25)-a^3=5x+2a(a^2-25)$.

3.11 V množině reálných čísel řešte rovnici s neznámou x a parametrem a: $a^2(x-2a)=2(a^3+2x)-(3x+4)$.

3.12 V R řešte rovnici s neznámou x a parametrem a: $2(1-x)+ax=a^2(a+5)-8(x+2)(a+5)+2(x+1)$.

3.13 Určete, pro které reálné číslo a má soustava rovnic $3x+2y=5$ a $(3-a)x+9y=3$ právě jedno řešení.

3.14 Určete, pro které reálné číslo a má soustava rovnic $4x+(2+a)x=5$ a $-5x+ay=3$ právě jedno řešení. Určete toto řešení pro $a=2$.

3.15 Řešte soustavu rovnic $x+2y-\frac{1}{3}=\frac{x+5y}{3}$ a $\frac{5(x+2)}{2}+y=-(y-4)$ v množině a) $N\times N$, b) $R\times R$.

3.16 V $R\times R$ řešte soustavu rovnic: $2x-y+\frac{5}{2}=1-\frac{y-2x}{2}$ a $6x+2(y-1)=3y-(5-4x)$.

3.17 V $R\times R$ řešte soustavu rovnic: $4+\frac{y}{x-1}=\frac{y-3x+1}{1-x}$ a $1-\frac{x-2y}{3}=\frac{y}{3}-\frac{x-2}{2}$.

3.18 Řešte v R nerovnici $(2x-3)(5+x)\geq 0$.

3.19 Řešte v R nerovnici $(2-x)(3x+15)<0$.

3.20 Řešte v R nerovnici $\frac{x+2}{10x-20}\leq 0$.

3.21 Řešte v R nerovnici $\frac{-4x+2}{-3-0{,}5x}>0$.

3.22 Řešte v R nerovnici $\frac{2x-2}{4-x}\geq 2$.

3.23 Řešte v R nerovnici $\frac{3x+4}{x-0{,}5}<-3$.

3.24 Řešte v R nerovnici $\frac{2x-1}{x+2}-\frac{x+3}{x-1}>1$.

3.25 Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí: $|2x-1|-4>0$. Řešte početně i graficky.

3.26 Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí: $||x-1|-4|>3$. Řešte početně i graficky.

3.27 V oboru reálných čísel řešte nerovnici $|x-1|+|3-x|\leq 4$.

3.28 Určete, pro která reálná x nabývá funkce $f: y=\frac{x-2}{3x+6}$ funkčních hodnot z intervalu $(0; 2\rangle$.

3.29 V množině všech reálných čísel řešte soustavu rovnic $\frac{x+2}{4-x}<1$ a $\frac{x^2(x+2)}{x-3}\geq 0$.

3.30 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $-2\leq\frac{x-2}{x+3}<3$.

3.31 Na vánočním stromku je 22 žároviček žluté, modré, zelené a červené barvy. Modrých je o polovinu méně než žlutých a zároveň o jednu více než červených, zelených je dvakrát méně než je součet modrých a žlutých zvětšený o dvě. Kolik kterých žároviček visí na vánočním stromečku?

3.32 Zásilka obsahuje 154 kabátů. Bílých kabátů je o 3 méně než červených, ale o pět více než zelených. Jestliže zásilka obsahuje jen červené, bílé a zelené kabáty, kolik je červených?

3.33 Na dvou protilehlých březích řeky jsou dva stromy. Výška jednoho je $30\ m$, výška druhého je $20\ m$ a od sebe jsou vzdáleny $50\ m$. Na vrcholku každého stromu sedí pták. Oba ptáci najednou zpozorují rybu, která vyplavala na hladinu řeky náhodou na přímce mezi stromy. Ptáci se vrhnou na rybu rychlostí o stejné velikosti a doletí k ní současně. V jaké vzdálenosti od stromů se objevila ryba?

3.34 Karel chtěl určit vzdálenost od svého domu k domu svého přítele. Šel rovnoměrným krokem a počítal v první polovině cesty každý druhý krok a v druhé polovině cesty každý třetí krok. V první polovině napočítal o 250 dvojkroků více, než byl počet trojkroků v druhé polovině cesty. Kolik kroků je od Karlova domu k domu jeho přítele?

3.35 Ve čtyřech nádržích stanice ropovodu bylo $46\ hl$ ropy. Odběratelům bylo dodáno z první nádrže $5\ hl$, potom přišla dodávka z těžební oblasti, z níž napustili do druhé nádrže $3\ hl$ a do třetí tolik, že se její obsah zdvojnásobil. Potom dvě třetiny čtvrté nádrže předali odběratelům. Po kontrole zjistili, že nyní je obsah ve všech nádržích stejný. Kolik ropy obsahuje nyní každá ze čtyř nádrží stanice?

3.36 Na hrobě slavného matematika Diofanta z Alexandrie byl podle legendy vytesán tento nápis: „Bůh mu dopřál, aby byl hochem šestinu svého života, a přidav k této době další dvanáctinu, ozdobil jeho líce vousem. Po další sedmině prozářil jeho život světlem manželství, po dalších pěti letech pak daroval mu syna. Však běda! Sotva ubohé dítě dosáhlo poloviny délky otcova života, neúprosné sudičky vzaly si jej zpět. Když Bůh utěšil jeho hoře učením o číslech, po dalších čtyřech letech ukončil dobu jeho žití.“ Na základě nápisu z náhrobku určete délku Diofantova života.

3.37 Na pomníku Pallas Athény ve starém Řecku je nápis: „Já, Pallas z tepaného zlata, jsem ulita z darů básníků. Chrisius dal polovinu zlata, Thespis osminu, Solon jednu desetinu, Themison jednu dvacetinu zlata a zbylých 9 talentů věnoval Arishodicus.“ Za kolik talentů zlata je v soše?

3.38 V nářaďovně je celkem 38 disků nebo oštěpů. Oštěpů je o 6 více než činí trojnásobek počtu disků. Kolik je v nářaďovně oštěpů a kolik disků?

3.39 Majitelé firmy Spočítal & Prospěl se rozhodli opět po čtyřech měsících vyplatit svým dvěma zaměstnancům pravidelnou měsíční mzdu. Vzhledem k tomu, že konto firmy zelo prázdnotou, sháněli majitelé peníze, kde se dalo. Celkem sehnali 176 bankovek, které měly hodnotu sto nebo dvěstě korun. Tímto obnosem chtěli podělit své zaměstnance, z nichž podřízený měl dostal 12000 korun. Platy obou zaměstnanců přitom byly v poměru 2:3. Určete, kolik kterých bankovek majitelé firmy sehnali.

3.40 Dva obchodníci přišli k bráně Paříže. Jeden měl 64 a druhý 20 okovů vína. Neměli ale dostatek peněz, aby mohli zaplatit clo. Chybějící peníze tedy nahradili vínem. První zaplatil 40 franků a ještě 5 okovů vína. Druhý dal 2 okovy vína a dostal nazpátek 40 franků. Zač byl okov vína a jaké bylo clo za jeden okov vína?

3.41 Kůň táhne rovnoměrně „vlak“ ze sáněk. Dva kamarádi, Petr a Pavel, jdou vedle a hádají se, jak je řada sáněk dlouhá. Pavel říká: „Místo hádaní bychom měli řadu sáněk nějak změřit.“ „Ale jak? Nemáme čím,“ namítá Petr. „Já znám jeden způsob“, odpovídá Pavel. A prošel rovnoměrným krokem podél řady sáněk nejprve ve směru jejich jízdy a pak proti směru. Jak dlouhá byla řada sáněk, jestliže Pavel napočítal 120 kroků od posledních sáněk k prvním a 40 kroků, když šel opačným směrem? Každý Pavlův krok měřil 1 metr.

3.42 Spěchající pán stoupal rychlostí jednoho schodu za sekundu po pohyblivém schodišti, které se také pohybovalo směrem vzhůru. Po dvaceti krocích býval onen pán nahoře. Jednoho dne měl spěchající pán naspěch ještě více než jindy a stoupal po schodišti, které se pohybovalo směrem vzhůru, rychlostí dva schody za sekundu. Na vrchol schodiště se takto dostal po překonání 32 schodů. Kolik schodů mělo pohyblivé schodiště od úpatí až k vrcholu? Jaká je rychlost pohybu schodiště?

3.43 Když synovi bylo šest let, bylo otci třicet. Nyní je otci čtyřikrát tolik co synovi. Kolik let je nyní synovi a kolik otci?

3.44 V dvojciferném čísle je číslice jednotek o 3 větší než číslice desítek. Jestliže k tomuto číslu přičteme 27, dostaneme číslo, které se od hledaného čísla liší jen pořadím umístění číslic. Které je to číslo?

3.45 Rozdíl dvou kladných čísel je 1, jejich součet je 6. Jaká to jsou čísla?

3.46 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{x+2}{x}-\frac{x+1}{2x}-\frac{x}{2x-2}=\frac{0,5}{x-x^2}$.

3.47 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{1-x}=\frac{11}{2}$.

3.48 Kůň a mezek, oba těžce naloženi, šli vedle sebe. Kůň si stěžoval na svůj těžký náklad. „Na co si stěžuješ?“, zeptal se ho mezek. „Vždyť kdybych si vzal jeden z tvých pytlů, byl by můj náklad dvakrát tak těžký jako tvůj. Ale kdybys ty vzal jeden pytel z mých zad, měli bychom oba stejně těžké náklady.“ Kolik pytlů nesl který?

4. Kvadratické rovnice a nerovnice

4.1 Řešte v *R* rovnici $-\frac{x+1}{x-4}=\frac{x-1}{4+x}+\frac{4}{3}$.

4.2 Řešte v R rovnici $x^2+x+1=\frac{156}{x^2+x}$.

4.3 Řešte v *R* rovnici $\left|\frac{x+2}{x+6}\right|=\left|\frac{x-1}{x-4}\right|$.

4.4 Řešte v *R* početně i graficky rovnici $x^2+1=\left|x^2-3x+1\right|$.

4.5 Řešte v *R* početně i graficky rovnici $\left|x^2+8x\right|-9=0$.

4.6 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $-x^2+2|x|+3=0$.

4.7 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\left|x^2-3|x|-70\right|=0$.

4.8 Je dána kvadratická rovnice $4x^2-11x+5=0$. Aniž tuto rovnici řešíte, napište všechny kvadratické rovnice, které mají za kořeny opačná čísla, než jsou kořeny dané rovnice.

4.9 Zapište všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny a) čtyřikrát větší, b) o čtyři větší než jsou kořeny rovnice $x^2-9x+15=0$.

4.10 V rovnici $6x^2+bx-3=0$ určete *b* tak, aby jedním kořenem rovnice bylo číslo $\frac{3}{2}$.

4.11 V rovnici $2x^2-7x+c=0$ určete *c* tak, aby jeden kořen rovnice byl roven číslu 3.

4.12 V rovnici $ax^2-56x+20=0$ určete *a* tak, aby jedním kořenem rovnice bylo číslo 0,4.

4.13 Určete koeficient *b* tak, aby v rovnici $9x^2+bx+2=0$ pro její kořeny x_1 a x_2 platilo $x_1=2x_2$.

4.14 Řešte v *R* rovnici $\frac{x^2}{2x-1}=p$ s neznámou *x* a reálným parametrem *p*.

4.15 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $a+x=\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$, kde *x* je neznámá a *a* parametr.

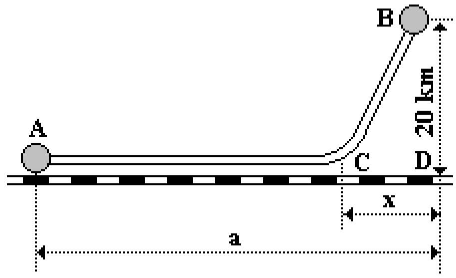
4.16 V množině reálných čísel řešte rovnici s neznámou x a parametrem p $px^2+(2p+3)x+p+\frac{3}{4}=0$.

4.17 V množině reálných čísel řešte rovnici s neznámou x a parametrem p: $x^2+6x+p=0$.

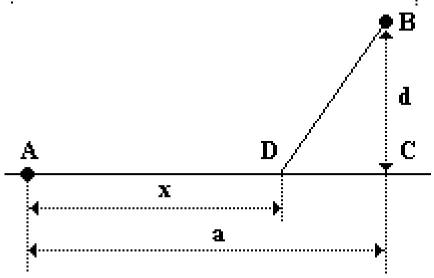
4.18 V množině reálných čísel řešte rovnici s neznámou x a parametrem p: $(p+5)x^2+2x(p+2)+p=0$.

4.19 Jaký tvar má mít pravoúhlý pozemek, aby při stejném plošném obsahu byla délka ohrady co nejmenší?

4.20 ***Má se vybudovat železniční zastávka pro osadu *B*, která je od železniční trati vzdálena $20\ km$. Kde je třeba ji vybudovat, aby cestování z *A* do *B* po železnici *AC* a po cestě *CB* trvalo nejkratší možný čas? Velikost rychlosti jízdy po železnici je $0{,}8\ km.min^{-1}$, po cestě $0{,}2\ km.min^{-1}$.



4.21 ***Z města *A*, které leží u řeky, je třeba dovážet zboží do města *B*, které je ve vzdálenosti $a\ km$ směrem dolů po řece a ve vzdálenosti $d\ km$ od břehu. Kde je třeba vybudovat cestu z *B* k řece, aby převážení nákladů z *A* do *B* bylo co nejlevnější, je-li dopravné za tunu nákladu po řece dvakrát levnější než po silnici?



4.22 Řešte v *R* rovnici: $\sqrt{6+\sqrt{x}}=\sqrt{15-2\sqrt{x}}$.

4.23 Řešte v *R* rovnici: $5+\sqrt{x^2-5}=x$.

4.24 Řešte v *R* rovnici: $x-\sqrt{x^2-12}=2$.

4.25 Řešte v *R* rovnici: $x+\sqrt{x^2-12}=2$.

4.26 Řešte v *R* rovnici: $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x+1}$.

4.27 Řešte rovnici $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$ a) v množině *Z*, b) v množině *R*.

4.28 Řešte v *R* rovnici $\sqrt{1+x\sqrt{x+\frac{7}{4}}}=1-x$.

4.29 Řešte v *R* rovnici: $\frac{3}{1+\sqrt{x+1}}+2\sqrt{x+1}=5$.

4.30 V množině reálných čísel řešte rovnici $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{x-2}}=2$.

4.31 Řešte v *R* početně i graficky kvadratickou nerovnici $2x^2-3x-2<0$.

4.32 Řešte v *R* nerovnici $-1<\frac{x(10+x)}{x^2+12}\leq 1$.

4.33 Určete definiční obor funkce $f: y=\sqrt{2x^2+3x-14}$.

4.34 Určete definiční obor funkce $g: y=\frac{2x-5}{\sqrt{6x^2-7x+2}}$.

4.35 Určete definiční obor funkce $h: y=\frac{2}{2x-15}+\sqrt{2x^2+x-15}$.

4.36 Určete definiční obor funkce $k: y=\sqrt{\frac{-1}{5x^2-8x-4}}$.

4.37 Určete definiční obor funkce $l: y=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x^2}\right).\sqrt{x-1}$.

4.38 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x-x^2}{x^2+x-2}\leq 0$.

4.39 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\geq 1$.

4.40 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\frac{x^2+4x-77}{x-7}\leq 2$.

4.41 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $\frac{4}{x}+\frac{4}{3}<\frac{x}{3}$.

4.42 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $-x^2+2|x|+3>0$.

4.43 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $2x^2 + 5|x| - 7 < 0$.

4.44 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici $|x^2 + 3x| - 4 > 0$.

4.45 Řešte v množině reálných čísel početně i graficky nerovnici $|x^2 - 2x - 3| < x + 1$.

4.46 V $R \times R$ řešte soustavu rovnic $x^2 + 4y^2 + 8x - 8x + 4 = 0$ a $3x - 2y = -2$.

4.47 V $R \times R$ řešte soustavu rovnic $2x^2 - 5y^2 = 180$ a $2x + y = 18$.

4.48 V $R \times R$ řešte soustavu rovnic $x^2 + y^2 - 37 = 0$ a $x - y + 5 = 0$.

4.49 V $R \times R$ řešte soustavu rovnic $x^2 = 4(y - 1)$ a $2x + y = 1$.

4.50 V $R \times R$ řešte soustavu rovnic $x^2 - y^2 = 1$ a $2x - y = \sqrt{3}$.

4.51 Osmina stáda opic, umocněna na druhou, dovádí rozpustile v háji a těší se ze hry, 12 ostatních štěbetá na kopci. Kolik opic má toto stádo?

4.52 Včely v počtu, který se rovná druhé odmocnině z poloviny celého roje, si sedly na keřík jasmínu a zanechaly za sebou osm devítin roje. Jen jedna včelka z téhož roje kroužila okolo lotosu, polekaná bzučením přítelkyně, která se dostala z neopatrnosti do pasti sladkovonícího květu. Kolik včel bylo v roji?

4.53 Dvě hospodyně přinesly na trh dohromady 100 vajec. Obě utržily za svá vejce stejné částky. Potom řekla první druhé: „Kdybych já byla měla tvá vejce, utržila bych 15 krejcarů." Druhá na to odpověděla: „Kdybych já měla tvá vejce, utržila bych za ně 6 a dvě třetiny krejcaru." Kolik přinesla která vajec na trh?

4.54 V pravoúhlém trojúhelníku je součet délek stran $132\,cm$, součet obsahů čtverců nad jeho stranami je $6050\,cm^2$. Jak dlouhé jsou strany trojúhelníka?

4.55 Během pauzy na oběd zašlo několik studentů nejmenované třídy nejmenované průmyslové školy v centru města spláchnout prach z křídy, který se jim během dopolední výuky usadil v krku. V kulturním zařízení, které navštívili, se zdrželi o něco déle, takže každý ze studentů stihl své oblíbené 3 „kousky". Po návratu do školy zjistil pedagog, který vešel do třídy jen několik sekund po nich, že kulturní zařízení navštívilo tolik studentů, že součin jejich počtu a čísla o pět menšího je přesně stejně velký jako počet všech žáků ve třídě zmenšený o dvojnásobek počtu studentů - pivařů. Kolik studentů porušilo školní řád, je-li ve třídě 28 studentů? Kolik korun stálo jedno pivo, jestliže dobrovolně vybraný student v hospodě zaplatil dvěma stokorunami, dvěma desetikorunami a dvěma korunami, což obsahovalo i 1,50 Kč spropitného?

4.56 Švédská vlajka je vlastně modrý obdélník se žlutým křížem, jehož obsah se rovná čtvrtině obsahu obdélníka. Vypočítejte rozměry vlajky, jestliže šířka pruhu je $12{,}5\,cm$ a poměr délky vlajky k její šířce je 5:3.

4.57 Na schodišti vysokém $3{,}6\,m$ by se zvětšil počet schodů o tři, kdyby se výška každého schodu zmenšila o $4\,cm$. Kolik schodů má schodiště?

4.58 Dvě přímé silnice se protínají v pravém úhlu. Po jedné z nich jede motocykl stálou rychlostí o velikosti $10\,m.s^{-1}$, po druhé jede osobní auto stálou rychlostí o velikosti $20\,m.s^{-1}$. V určitém okamžiku je motocykl $150\,m$ a auto $200\,m$ před křižovatkou těchto silnic, přičemž obě vozidla se pohybují směrem ke křižovatce. Určete, za jak dlouho bude vzdálenost obou vozidel $100\,m$.

4.59 Obvodem, v němž jsou zapojeny paralelně dva rezistory, procházím při napětí $24\,V$ proud $4\,A$. Zapojíme-li tyto rezistory sériově, klesne proud na $0{,}75\,A$. Určete odpory obou rezistorů.

4.60 Dva traktory zorají pole za 4 hodiny. Kdyby první traktor zoral polovinu pole a pak druhý traktor práci dokončil, trvala by orba 9 hodin. Za kolik hodin zorá pole každý traktor zvlášť?

4.61 Dělíme-li dvojciferné číslo o ciferném součtu 10 jeho ciferným součinem, obdržíme číslo 3 a zbytek 10. Určete toto dvojciferné číslo.

4.62 ***Dlaždič Hlavatý psal objednávku dlaždic na vydláždění čtvercové síně. Při psaní objednávky byl tak roztržitý, že omylem místo počtu dlaždic podél jedné stěny napsal svůj věk. Tak mu podle objednávky dovezli o 1111 dlaždic více. Jak byl Hlavatý starý?

4.63 Na jednom shromáždění si účastníci podávali ruce. Kdosi spočítal, že celkem bylo 66 stisků ruky. Kolik účastníků bylo na shromáždění?

5. Úpravy goniometrických výrazů

5.1 Určete sinus, tangens a kotangens úhlu $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, je-li $\cos x = 0{,}6$.

5.2 Určete kosinus, tangens a kotangens úhlu $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, je-li $\sin x = 0{,}25$.

5.3 Jsou dána kladná reálná čísla *a*, *b*. Určete $\sin x$, $\cos x$ a $\operatorname{cotg} x$, víte-li, že $\operatorname{tg} x = \frac{a}{b}$ a $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

5.4 Určete $\operatorname{tg} x$ víte-li, že je $\cos x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ a $x \in \left(29\pi; \frac{59\pi}{2}\right)$.

5.5 Vyjádřete $\sin 2x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$.

5.6 Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in R$ platí: $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2 x} = 1$.

5.7 Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in R$ platí: $1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{2\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$.

5.8 Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in R$ platí: $\frac{\cos 2x}{1+\cos 2x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$.

5.9 Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in R$ platí: $\frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = \operatorname{cotg}^2 \frac{x}{2}$.

5.10 Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in R$ platí: $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

5.11 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$ zjednodušte výraz $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}$.

5.12 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$ zjednodušte výraz $\frac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x}$.

5.13 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$ zjednodušte výraz $\frac{1-\cos 2x + \sin 2x}{1+\cos 2x + \sin 2x}$.

5.14 Pro všechny přípustné hodnoty $x \in R$ zjednodušte výraz $\frac{(\sin x + \cos x)^2}{1+\sin 2x}$.

5.15 Určete $\cos 22{,}5°$. **5.16** Určete $\sin 105°$. **5.17** Určete $\cos 75°$. **5.18** Určete $\operatorname{tg} 37{,}5°$.

5.19 Určete $\operatorname{cotg} 15°$.

6. <u>Goniometrické rovnice a nerovnice</u>

6.1 Určete všechna $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$, pro něž platí: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$.

6.2 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

6.3 Řešte v R rovnici $\sin 2x . \cos x = \cos x$.

6.4 ***V množině reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{2\sin x . \sin 2x} = \sqrt{5\cos x + 4\sin 2x}$.

6.5 ***Řešte rovnici $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$ s neznámou $x \in R$.

6.6 V oboru reálných čísel řešte rovnici $\sin^2 x + \sin x = \cos^2 x$.

6.7 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $2 + \cos 2x = -5\sin x$.

6.8 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

6.9 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sin 2x = \cos 4x$.

6.10 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sin 4x = \sin 8x$.

6.11 Pro která reálná čísla a nemá rovnice $a\sin^2 x + 5\cos^2 x = 7$ řešení?

6.12 Na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte a) rovnici $2\sin^2 x - 5\cos x = -1$, b) nerovnici $2\sin^2 x - 5\cos x \geq -1$.

6.13 Na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ řešte a) rovnici $\sin x = 2\sin 2x . \cos x$, b) nerovnici $\sin x \leq 2\sin 2x . \cos x$.

6.14 V množině reálných čísel řešte rovnici $\operatorname{tg}\frac{1}{x} = -1$.

6.15 V R řešte rovnici o neznámé x: $\operatorname{cotg}^2 x = -\operatorname{cotg} x$.

6.16 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4\operatorname{cotg} x = 0$.

6.17 V R řešte rovnici $-2\sin^2 x + \cos x = -1 + 2\cos x$.

6.18 V R řešte rovnici $\mathrm{tg}^3\, x + \mathrm{tg}^2\, x = 1 + \mathrm{tg}\, x$.

6.19 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $3\,\mathrm{cotg}^3\, x - 3\,\mathrm{cotg}\, x.\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{cotg}\, x\right) = -\sqrt{3}$.

6.20 V množině reálných čísel řešte rovnici o neznámé x: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 3$.

6.21 V množině reálných čísel řešte rovnici $\frac{1-\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}\, x} = 2\cos 2x$.

6.22 Řešte v R rovnici $2 - \mathrm{cotg}\, x = \frac{\sin x}{1+\cos x}$.

6.23 Řešte v R rovnici $\mathrm{cotg}\, x - 1 = \cos x - \sin x$.

6.24 Na základě příkladu 5.5 řešte v reálných číslech rovnici $\sin 2x + \mathrm{tg}\, x = 2$.

6.25 Určete všechna reálná čísla x, pro něž platí: $\sin x + \sin 2x = \mathrm{tg}\, x$.

6.26 ***V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\frac{\sin^2 x}{\sin 2x} + \left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\cos 2x}{4\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$.

6.27 ***V R řešte rovnici $\sin x + \cos x = 1$.

6.28 ***V množině reálných čísel řešte rovnici $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

6.29 ***Určete všechna reálná x, pro která platí: $|\cos x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. <u>Trigonometrie, sinová a kosinová věta</u>

7.1 Vypočtěte délku úhlopříčky v obdélníku o stranách $60\,cm$ a $35\,cm$. Dále vypočtěte úhel, který svírá úhlopříčka s delší stranou obdélníka.

7.2 Rovnoramenný trojúhelník má základnu délky $8{,}4\,cm$ a úhel při základně má velikost $67°13'$. Vypočtěte délku ramene trojúhelníku.

7.3 Určete $\cos\alpha$, kde α je úhel mezi dvěma tělesovými úhlopříčkami krychle.

7.4 Dokažte, že v rovnoběžníku $ABCD$ se stranami délky a a b a úhlopříčkami e a f platí: $e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$ a $e^2 - f^2 = 4ab\cos\alpha$, kde α je vnitřní úhel rovnoběžníka.

7.5 Vyřešte trojúhelník ABC, je-li zadáno (při obvyklém značení): $a = 7\,cm$, $b = 8\,cm$, $c = 10\,cm$.

7.6 Vyřešte trojúhelník ABC, je-li zadáno (při obvyklém značení): $a = 6\,cm$, $b = 7\,cm$, $c = 14\,cm$.

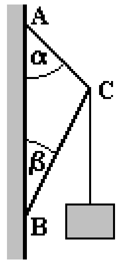
7.7 Vyřešte trojúhelník ABC, je-li zadáno (při obvyklém značení): $a = 5{,}5\,cm$, $\beta = 27°$, $\gamma = 120°$.

7.8 Vyřešte trojúhelník ABC, je-li zadáno (při obvyklém značení): $b = 11\,cm$, $c = 7{,}5\,cm$, $\alpha = 14°50'$.

7.9 Železný prut je dlouhý $4\,m$. Tento prut je třeba ohnout v polovině tak, aby vznikl úhel $240°$. Jaká bude vzdálenost mezi konci prutu po ohnutí?

7.10 V řece proudí voda rychlostí o velikosti $5\,m.s^{-1}$. Plavec, který se rozhodne přeplavat řeku, plave v klidné vodě rychlostí o velikosti $2\,m.s^{-1}$. Vypočtěte velikost rychlosti plavce vzhledem ke břehu, jestliže plave směrem, který svírá se směrem proudu úhel $30°$. Jak je řeka široká, jestliže plavec přeplave na druhou stranu řeky za půl minuty? O kolik metrů byl plavec unesen proudem?

7.11 Na nosník, který je tvořen dvěma trámky, je zavěšeno břemeno o hmotnosti $10\,kg$. Určete velikost sil, které působí na jednotlivé trámky, je-li $\alpha = 45°$ a $\beta = 30°$. Jakým způsobem jsou trámky namáhány? Velikost tíhového zrychlení volte $10\,m.s^{-2}$.



7.12 Petr a Pavel táhnou společně vozík o hmotnosti $10\,kg$, na němž je naložen náklad o hmotnosti $40\,kg$. Vozík se pohybuje se zrychlením $1{,}5\,m.s^{-2}$, přičemž Petr na něj působí silou, která svírá se směrem pohybu úhel $30°$ a má velikost $50\,N$. Určete velikost a směr síly, kterou na vozík působí Pavel. Odporové a třecí síly zanedbejte.

7.13 Lampa visí na dvou vláknech délky $50\,cm$ a $70\,cm$, která svírají úhel o velikosti $70°40'$. Jak daleko od sebe jsou vlákna připevněna ve stropu?

7.14 Po silnici jede nákladní automobil. Vedle silnice v lese je ukryt radiolokátor, kterým bylo zjištěno, že v daném okamžiku je přední část automobilu od radiolokátoru vzdálena $9\,m$ a zadní část $12\,m$, přičemž radiolokátor „vidí“ automobil pod úhlem $40°20'$. Jak dlouhý je nákladní automobil?

8. Komplexní čísla

8.1 Vypočítejte: $\frac{5-4i}{3+i}-\frac{-3+2i}{-4+2i}+2-4i$. **8.2** Vypočítejte: $\frac{-2+i}{-3-2i}+\frac{3-2i}{5-i}-(2-4i)$.

8.3 V komplexním čísle $3+bi$ určete b tak, aby dané komplexní číslo bylo komplexní jednotkou.

8.4 V komplexním čísle $a-0{,}8i$ určete a tak, aby dané komplexní číslo bylo komplexní jednotkou.

8.5 Jsou dána komplexní čísla $a=3+2i$, $b=-2+3i$, $c=-1+i$. Zjistěte, která z nich jsou komplexními jednotkami a vypočtěte komplexní číslo, pro které platí: a) $\frac{a}{c'}+\overline{a}.b$, b) $\frac{\overline{b}}{a'}.|ac|-b$, c) $\left|-\frac{c}{\overline{a}.b'}+c.\overline{b}\right|$.

8.6 Určete reálná čísla x a y tak, aby platilo: $(2+i)(-1+i)=x-2yi$.

8.7 Určete reálná čísla x a y tak, aby platilo: $\frac{(1-i)^3-1}{(1+i)^3+1}=x-4yi-1$.

8.8 Určete všechna komplexní čísla tvaru $z=a+bi$, pro která platí: $|z|=3$ a $|a|=\sqrt{3}|b|$.

8.9 Určete všechna komplexní čísla tvaru $z=a+bi$, pro která platí: $|z|=4$ a $|a|=|b|$.

8.10 Vynásobte a vydělte (v uvedeném pořadí) komplexní čísla $z_1=\sqrt{5}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ a $z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ a poté je vyjádřete v algebraickém tvaru.

8.11 Vyjádřete komplexní číslo $z=-\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{6}i$ v goniometrickém tvaru.

8.12 Převeďte číslo $z=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ na goniometrický tvar a poté jej umocněte na třicátou.

8.13 S použitím Moivreovy věty vypočítejte: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{60}$.

8.14 Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $(2+2i)^{30}$.

8.15 Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $(\sqrt{3}-i)^{21}$.

8.16 Napište kvadratickou rovnici, jejíž jeden kořen je komplexní číslo a) $-4-i$, b) $-2+6i$.

8.17 V množině komplexních čísel řešte rovnici $2x-\frac{9}{3-x}=\frac{x^2}{x-3}-\frac{2(x+2)}{x-3}$.

8.18 V množině komplexních čísel řešte rovnici $x-2-\frac{4(1-x)}{x}=\frac{8}{x}$.

8.19 V množině komplexních čísel řešte rovnici $\frac{6x}{x-1}+2x^2=2x-\frac{x^3}{1-x}$.

8.20 V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^2+3=3\frac{1-x^2}{1-3x}+\frac{2x(x-2)}{3x-1}$.

8.21 V množině všech komplexních čísel řešte rovnici $x^3+1=0$.

8.22 V množině všech komplexních čísel řešte rovnici $x^4-1=0$.

8.23 V množině všech komplexních čísel řešte rovnici $2x^3-\sqrt{3}+i=0$.

8.24 V množině všech komplexních čísel řešte rovnici $6x^3+2\sqrt{5}-2i\sqrt{15}=0$.

8.25 V množině všech komplexních čísel řešte rovnici $2\pi x^4+\pi+\pi i=0$.

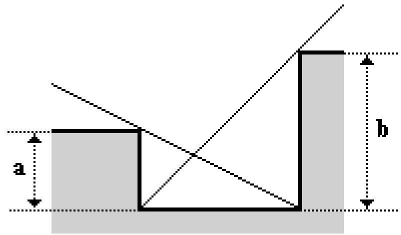
8.26 Určete souřadnice vrcholů pravidelného pětiúhelníku, který je vepsán do kružnice, která má střed v počátku soustavy souřadnic a poloměr $4\,cm$.

8.27 Určete souřadnice vrcholů pravidelného šestiúhelníku, jehož nejdelší úhlopříčka má délku $5\,cm$. Střed šestiúhelníku vhodně zvolte v soustavě souřadnic.

9. Grafy funkcí

9.1 Napište rovnici lineární funkce *g*, víte-li, že platí: $g(-2)=5$ a $g(2)=-9$. Určete definiční obor, obor hodnot, načrtněte její graf a vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic.

9.2 V příkopu stojí dva žebříky, které se opírají v rozích příkopu a na jeho okrajích. Jak vysoko je průsečík obu žebříků, jestliže $a=2\ m$ a $b=3\ m$?



9.3 Nakreslete graf funkce $f: y=|x+3|+|2x-4|$, určete definiční obor a obor hodnot.

9.4 Nakreslete graf funkce $f: y=-|x-2|+|2x+2|-x$, určete definiční obor a obor hodnot.

9.5 Nakreslete graf funkce $g: y=2|-x+3|-|3x-3|+|x|$, určete definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami kartézského systému souřadnic a intervaly monotonie.

9.6 Nakreslete graf funkce $h: y=|2x+3|-|1-x|-3x$, určete definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami kartézského systému souřadnic a intervaly monotonie.

9.7 Nakreslete graf funkce $f: y=|x-2|+3$,určete definiční obor a obor hodnot.

9.8 Nakreslete graf funkce $f: y=|-|x+1|-3|$, určete definiční obor a obor hodnot.

9.9 Nakreslete graf funkce $h: y=||x|-2|+1$, určete definiční obor a obor hodnot.

9.10

Funkci $y=|ax+b|+c$ do grafu dejte,
tu, která vás napadne,
jaký má obor hodnot pozor dejte,
sic nedobře příklad dopadne.

Obor hodnot je dobře znám:
od trojky do nekonečna utíká,
intervaly monotonie určí každý sám
i body, kde graf funkce osy protíná.

9.11

Funkci $y=|ax+b|+c$ do grafu dejte,
tu, která vás napadne,
na intervaly monotonie pozor dejte,
sic nedobře příklad dopadne.

Interval monotonie je dobře znám:
od mínus dvojky do nekonečna funkce růst začíná,
obor hodnot pak určí každý sám
i body, kde graf funkce osy protíná.

9.12 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\dfrac{|x|+x}{x}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.13 Načrtněte pěkně graf funkce $g: y=\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.14 Načrtněte pěkně graf funkce $h: y=\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}-\sqrt{x^2-1}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.15 Napište rovnici kvadratické funkce *f*, pro kterou platí: $f(-1)=28$, $f(1)=4$ a $f(3)=-4$. Určete její definiční obor, obor hodnot, souřadnice vrcholu, načrtněte jí a vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic.

9.16 Napište rovnici kvadratické funkce *h*, která se dotýká osy *x* a prochází body $A=[1;3]$ a $B=\left[-3;\frac{1}{3}\right]$. Určete její definiční obor, obor hodnot, souřadnice vrcholu, načrtněte jí, vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic a určete intervaly monotonie.

9.17 Napište rovnici kvadratické funkce *f*, která má tyto vlastnosti: je sudá, $H(f)=\langle 3;\infty)$ a prochází bodem $A=[2;5]$. Určete její definiční obor, souřadnice vrcholu, načrtněte jí, vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic a určete největší interval, na němž je tato funkce prostá.

9.18 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=x^2-6x+11$, určete její definiční obor a obor hodnot. Určete intervaly monotonie.

9.19 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=x^2+8x+18$, určete její definiční obor a obor hodnot. Určete intervaly monotonie. Nalezněte největší interval, na němž je možné k dané funkci sestrojit funkci inverzní. Najděte její rovnici, určete definiční obor a obor hodnot a zakreslete do téhož systému souřadnic.

9.20 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-0{,}5x^2+x+0{,}5$, určete její definiční obor a obor hodnot. Určete intervaly monotonie. Nalezněte největší interval, na němž je možné k dané funkci sestrojit funkci inverzní. Najděte její rovnici, určete definiční obor a obor hodnot a zakreslete do téhož systému souřadnic.

9.21 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=|2x^2+4|x||$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.22 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-x^2+4x-3$, určete její definiční obor a obor hodnot. Vypočtěte průsečíky grafu funkce s osami kartézského systému.

9.23 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|-x^2+2x-4\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.24 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|x^2+4x+1\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.25 Určete definiční obor funkce $f: y=3x^2-6|x|-2$ a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá.

9.26 Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ a zjistěte, zda je sudá nebo lichá.

9.27 Určete definiční obor funkce $f: y=x^3+x^4$ a zjistěte, zda je sudá nebo lichá.

9.28 Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{x^3}{4+x^2}.\operatorname{tg} x$ a zjistěte, zda je sudá nebo lichá.

9.29 Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{x^5-x^3-3x}{x^6-5}$ a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá.

9.30 Určete definiční obor funkce $f: y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá.

9.31 Určete definiční obor funkce $f: y=\log(\cos x)$ a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá.

9.32 Určete definiční obor funkce $f: y=\log|\cos 2x|$ a zjistěte, zda je funkce sudá nebo lichá.

9.33 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=2\sin\left|2x+\dfrac{\pi}{4}\right|-1$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky s osami souřadnic.

9.34 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|-0{,}5\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.35 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|2\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{6\pi}{6}\right)-1\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky s osami souřadnic.

9.36 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.37 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\operatorname{tg}\left|x+\dfrac{3\pi}{4}\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.38 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\operatorname{cotg}\left|2x-\dfrac{\pi}{2}\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky s osami souřadnic.

9.39 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)-2\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.40 ***Určete obor funkčních hodnot funkce $f: y=\dfrac{1}{2}\left(\cos x+\sin x+\left|\cos x-\sin x\right|\right)$.

9.41 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\dfrac{\dfrac{16-x^4}{4x^2}}{\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right).\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky této funkce s osami kartézského systému souřadnic. Napište rovnici funkce inverzní k dané funkci a zakreslete ji do téhož obrázku.

9.42 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=(5+x):\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{x}\right)$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky této funkce s osami kartézského systému souřadnic.

9.43 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|\dfrac{x^2-4x+4}{(x-2)(x+3)}\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky této funkce s osami kartézského systému souřadnic.

9.44 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x+1}{2x}}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.45 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{|x|+3}{|x|} + \dfrac{|x|}{|x|-3} + \dfrac{9}{x^2 - 3|x|}$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky této funkce s osami kartézského systému souřadnic.

9.46 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|\left(\dfrac{4}{x^2+4x} - \dfrac{2}{x+4} + \dfrac{x}{16+4x}\right) : \left(\dfrac{4}{x} - 2 + \dfrac{x}{4}\right)\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.47 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{x-4}{x} + \dfrac{x}{x+4} + \dfrac{16}{x^2+4x}$, určete její definiční obor, obor hodnot a vypočítejte její průsečíky s osami kartézského systému souřadnic. Poté napište a do téhož obrázku zakreslete graf funkce inverzní k dané funkci. Určete její definiční obor a obor hodnot.

9.48 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left(\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{2}{x-2} + 1\right) : \left(\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{2}{x+2} + 1\right)$, určete její definiční obor, obor hodnot a vypočítejte její průsečíky s osami kartézského systému souřadnic.

9.49 Načrtněte pěkně graf funkce $g: y = \left(x^3 + 27\right)^{\frac{1}{2}} . (x+3)^{0,5} . \sqrt{\left(x^2 + 9 - 3x\right)^{-1}}$ a určete její definiční obor a obor hodnot.

9.50 Načrtněte pěkně graf funkce $h: y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \dfrac{3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - \dfrac{3+\sqrt{x}}{1-x}$ a určete její definiční obor a obor hodnot.

9.51 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{2(1-x)}{3-x}$, určete její definiční obor a obor hodnot. Napište rovnici funkce inverzní k dané funkci, určete její definiční obor a obor hodnot a zakreslete ji do téhož obrázku.

9.52 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{-3|x|+14}{|x|-4}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.53 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{2|x|+1}{|x|-3}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.54 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|\dfrac{x-6}{2-x}\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky grafu funkce s osami kartézského systému souřadnic.

9.55 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \dfrac{|x-6|}{2-x}$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky grafu funkce s osami kartézského systému souřadnic.

9.56 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = -\left|\dfrac{5x-13}{x-3}\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.57 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = -\dfrac{5x-13}{|x-3|}$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.58 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = |x-3|^3 + 1$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.59 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|(x+2)^{-5} - 1\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a výpočtem určete průsečíku grafu funkce s osami souřadného systému.

9.60 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|\sqrt{|x-1|} - 2\right| + 1$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.61 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \sqrt[3]{2-|x|} + 3$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.62 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|(x+1)^{-2} + 3\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.63 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = -\left[(2-x)^{-3} - 1\right]$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.64 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y = \left|(|x|-3)^4 - 2\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.65 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|(x+2)^{0,6}-3\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.66 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|2^{x+1}-3\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic.

9.67 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-2^{|-x+2|}+1$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.68 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|3^{-x+3}-2\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.69 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|+2}-1$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.70 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|+3}-2\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.71 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x-1}-3$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočítejte průsečíky s osami kartézského systému souřadnic.

9.72 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\log_5|x-2|+1$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.73 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=|\log(x+3)-1|$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočtěte průsečíky grafu funkce s osami souřadného systému.

9.74 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\log(2-x)-1$, určete její definiční obor a obor hodnot a vypočtěte průsečíky grafu funkce s osami souřadného systému.

9.75 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=\log_{\frac{1}{9}}(|x|-1)+2$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.76 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\left|\log_{0,5}|x-4|-2\right|$, určete její definiční obor a obor hodnot.

9.77 Pro která reálná *a* je funkce $f: y=\left(\frac{1}{a+1}\right)^{1-x}$ klesající?

9.78 Pro která reálná *a* je funkce $g: y=\left(\frac{2a+3}{a-1}\right)^{2(x+2)}$ rostoucí?

9.79 Pro která reálná *a* je funkce $f: y=\left(\frac{a+4}{1-a}\right)^{(3a+6)x}$ klesající?

9.80 Pro která reálná *a* je funkce $f: y=\log_{|-2a|}$ a) klesající, b) rostoucí?

9.81 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=2\cdot 3^{-x+1}-4$, určete definiční obor, obor hodnot. Napište rovnici inverzní funkce k funkci *f*.

9.82 Načrtněte pěkně graf funkce $f: y=-\log_4(x+2)+3$, určete definiční obor, obor hodnot. Napište rovnici inverzní funkce k funkci *f*.

9.83 K funkci $g: y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ určete funkci inverzní. U obou funkcí určete definiční obor a obor hodnot.

9.84 V množině všech reálných čísel řešte graficky rovnici $|x-1|^{-3}+2=|x-2|$.

9.85 V množině všech reálných čísel řešte graficky rovnici $\left|(x+2)^{-4}-3\right|=2^{|x+1|}$.

9.86 V množině všech reálných čísel řešte graficky rovnici $\left|\frac{2x-10}{x-3}\right|=\sin|x|+1$.

9.87 V množině všech reálných čísel řešte graficky rovnici $\log|x+2|-3=|3\cos 2x+2|$.

9.88 Určete všechna $x\in R$, pro která nabývá funkce $f: y=\log_4\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$ nezáporných hodnot.

9.89 Určete všechna $x\in R$, pro která nabývá funkce $f: y=\log_a\left(\frac{2}{6x-3}\right)$ záporných hodnot, je-li a) $a\in(0;1)$, b) $a\in(1;\infty)$.

9.90 Určete definiční obor funkce: a) $f: y=\log_5(-x+5)$, b) $g: y=\sqrt{\log(-x)}$, c) $h: y=\log(\log x)$, d) $j: y=\sqrt{\log(\log x)}$.

9.91 Určete definiční obor funkce $f: y=\sqrt{\log(\cos x)}$.

9.92 Určete definiční obor funkce $g: y=\log(\sin x)$.

9.93 Určete definiční obor funkce $f: y=\log(-x^2+6x-9)$.

9.94 Určete definiční obor funkce $f: y=\log(|2x+2|+|3x+1|-5)$.

9.95 Určete definiční obor funkce $g: y=\left(\dfrac{3x-x^2+10}{40+2x^2}\right)^{0,5}$.

9.96 Určete definiční obor funkce $h: y=\left(\dfrac{\log(2-x)}{-5-2x^2}\right)^{0,5}$.

9.97 Je dána funkce $f: y=\log(x^2-21)$. Určete všechna $x\in R$, pro která platí: $f(x)\in\langle 2;\infty)$.

9.98 Je dána funkce $f: y=\log\left[100(x^2+19)\right]$. Určete všechna $x\in R$, pro která platí: $f(x)\in(2;4\rangle$.

10. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

10.1 V *R* řešte rovnici: $9^{x^2+3x+3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-x^2}$.

10.2 V *R* řešte rovnici: $\dfrac{3.\left(5^{x+1}\right)^x}{25^{x+2}}.125=75.5^{2x+1}$.

10.3 V *R* řešte rovnici: $4.3^{2x-3}-3^{2x-5}=105$.

10.4 Řešte v *R*: $7^{2(x+1)}-49^{x+\frac{1}{2}}=98-8.7^{2x+1}$.

10.5 V *R* řešte rovnici: $6^{x+2}=1080+6^{x+1}$.

10.6 V *R* řešte rovnici: $5^{2(x+1)}+5^{2x+1}=150$.

10.7 V *R* řešte rovnici: $3^{3(x+1)}=216+3^{3x+1}$.

10.8 V *R* řešte rovnici: $2^{2x+5}-20+2^{2x+3}=300$.

10.9 V *R* řešte rovnici: $2^{2x}-2^{2+x}=5.2^x-8$.

10.10 V *R* řešte rovnici: $3^{2x}-3^{x+3}=3^4-3^{x+1}$.

10.11 V *R* řešte rovnici: $\left(2^{x+1}\right)^x.4^{4+x}=64.4^6$.

10.12 V *R* řešte rovnici: $\left(3^x\right)^{x+4}.\dfrac{\left(3^{2x}\right)^x}{9^{x-1}}=27.81$.

10.13 V *R* řešte rovnici: $5^x+\dfrac{5^3}{5^x}=30$.

10.14 V *R* řešte rovnici: $6^{x-1}.\left(6^x-7\right)=5.6^x-6$.

10.15 V *R* řešte rovnici: $\dfrac{3^{x+1}}{3^{1-x}}-\dfrac{3^{2x-1}}{3^{x-2}}=3^{x+2}-27$.

10.16 V *R* řešte rovnici: $\dfrac{5^{3x-3}}{5^{x-3}}-\dfrac{5^x}{5^{-1}}=5.\left(5^{x-1}-1\right)$.

10.17 V *R* řešte rovnici: $\dfrac{5.2^{2x+4}}{16}+\dfrac{15.2^{2x}}{2^x}=\dfrac{5.2^{x+3}}{2^{x+1}}$.

10.18 V *R* řešte rovnici: $\dfrac{6^{x^2}}{2^{-15}}=\dfrac{3^{-15}}{\left(6^{12}\right)^{1-x}}$.

10.19 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sqrt[2x+7]{4^{13-x}}=1024$.

10.20 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{2^x.3^{x+3}}{6^{7-x}.8^{x-4}}=9^{x-2}$.

10.21 Určete všechna reálná *x*, pro která platí: $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.

10.22 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sqrt[x]{81}+\dfrac{27}{\sqrt[x]{81}}=12$.

10.23 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5.2^{x+\sqrt{x^2-2}}.2^{-1}=6$.

10.24 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\sqrt{5^{3x}+19}-\sqrt{5^{3x}-4}=1$.

10.25 V *R* řešte rovnici: $4^{x-2}-17.2^{x-4}=-1$.

10.26 V *R* řešte rovnici: $3^x+3^{3-x}=28$.

10.27 V množině $R\times R$ řešte soustavu rovnic $4^{x+y}=128$ a $5^{3x-2y-3}=1$.

10.28 V množině $R\times R$ řešte soustavu rovnic $4^{(x-y)^2-1}=1$ a $5^{x+y}=125$.

10.29 V množině $R\times R$ řešte soustavu rovnic $8^{2x+1}=32.2^{4y-1}$ a $5.5^{x-y}=\sqrt{25^{2y+1}}$.

10.30 ***V množině všech reálných čísel řešte rovnici $x^{x^3}=3$.

10.31 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $e^{x+1}\geq e^{2x+2}$.

10.32 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $0{,}5^{3x-2} < 0{,}5^{4x+3}$.

10.33 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_x\left(2x^2 - 3x - 4\right) = 2$.

10.34 V množině reálných čísel řešte rovnici $\log_x 32 - \log_x 8 = 2$.

10.35 Řešte rovnici $\log x^2 - 4\log x + 4 = 0$ s neznámou $x \in R$.

10.36 Řešte rovnici $\log_2\left(x^2 - 3\right) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$ s neznámou $x \in R$.

10.37 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $1 - \log\sqrt{2x-1} = \log\sqrt{x-9}$.

10.38 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{\log x^3 - 2}{\log^3 x} + \dfrac{3}{\log x} = 2$.

10.39 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\log 3x - \log(x+1) = 1$.

10.40 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{\log\left((x+1)^2(x+2)\right)}{\log(x+3)} = 3$.

10.41 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $2^{\frac{3}{\log_2 x}} = \dfrac{1}{64}$.

10.42 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $\dfrac{4^{x+1}}{2^{3x-5}} = \dfrac{\log 16}{\log 4}$.

10.43 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $x^{\log x} = 1000x^2$.

10.44 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $x^{\log x + 1} = 100$.

10.45 V množině všech reálných čísel řešte rovnici $x^{\log x} = 10000$.

10.46 Určete všechna reálná čísla *x*, pro která platí a) $\log_2\left(x^2 + 2x\right) = 3$, b) $\log_2\left(x^2 + 2x\right) < 3$.

10.47 Určete všechna reálná čísla *x*, pro která platí: $\dfrac{x^3 + x}{x^2 + x - 2}.\log_{0,5} 2 > 0$.

10.48 V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $\dfrac{\log_2^2(x-3)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$.

10.49 ***V množině reálných čísel řešte rovnici: $\log x + \dfrac{1}{|\log x|} = 2$.

10.50 Určete definiční obor funkce $f: y = \log\left(5x^2 - 8x - 4\right)$.

10.51 V množině reálných čísel řešte rovnici: $x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$.

10.52 V množině reálných čísel řešte rovnici: $x^{3\log x - 5} = x^{4 - 7\log x}$.

10.53 V množině reálných čísel řešte rovnici: $3^{x+2} + 3^{x+1} = 78 - 9^{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}$.

10.54 V množině reálných čísel řešte rovnici: $0{,}4^3.\dfrac{125^x}{8^x} = 27$.

10.55 V množině reálných čísel řešte rovnici: $3\left(2^{x+1} - 1\right) = 2^{5-x} - 2^{1-x} - 3$ a výsledek vyjádřete pomocí přirozeného logaritmu.

11. Reichlův pel-mel aneb něco navíc pro chytré hlavy

11.1 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $2^{\cos x} > 2^{\sin x}$.

11.2 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $\sin^2 \pi x + \log_2^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$.

11.3 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $\sqrt{\cos \pi x} + \sqrt[4]{x^3 - x^2 - 2x} = 0$.

11.4 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $\left|x^2 - 5x + 6\right| + \sqrt{2x-3} = 0$.

11.5 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $3\sin^2 x + 5\sin^2 \dfrac{x}{3} = 8$.

11.6 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $3^{\left|x-\frac{1}{4}\right|+2} - 4\sin 2\pi x = 5$.

11.7 V množině všech reálných čísel řešte rovnici: $5^{\left|1-4x^2\right|} = \sin \pi x$.

11.8 Určete, pro která $c \in R$ má rovnice $6\cos^2 x + 3\sin^2 x = c$ řešení.

11.9 Načrtněte pěkně graf funkce a) $f: y = \log_x(\log_x x)$, b) $g: y = 10^{\log x}$.

11.10 Načrtněte pěkně graf funkce a) $f: y = \log_x x^x$, b) $g: y = \log_{|x|}|x|^{|x|}$.

11.11 Načrtněte pěkně graf funkce a) $f: y = \log_x x^2$, b) $g: y = \log_x \sqrt{x}$, c) $h: y = \log_{\sqrt{x}} x$.

11.12 Načrtněte pěkně graf funkce a) $f: y = \log_x x^{||x|-1|}$, b) $g: y = \log_{|x|}|x|^{||x|-1|}$.

11.13 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $\log_{0,5}\sqrt{x+1} < 1 + \log_{0,5}\sqrt{4-x^2}$.

11.14 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $\log^2_{0,1} x > 7$.

11.15 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $\log_{x^2}(x+2) < 1$.

11.16 V množině všech reálných čísel řešte nerovnici: $4 \geq \left|4 - 2^{-x}\right| > 2$.

Následující příklady (11.17 až 11.23) vycházejí z umělecké dílny profesora Ypsilona (jinak Doc. RNDr. Emil Calda, CSc. z MFF UK), jehož výtvarné umění vychází z přesvědčení, že adekvátní obraz reality může podat pouze matematika. Na první pohled jsou jeho obrazy pro diváky nezběhlé v matematice tvořeny jistou množinou matematických znaků a symbolů a jejich umělecký zážitek je nulový. Divák v matematice alespoň trochu školený, umístí do roviny obrazu kartézskou soustavu souřadnic *0xy* (osy jsou rovnoběžné s rámem obrazu) a jejím prostřednictvím přiřadí prvkům množiny vytvořené umělcem příslušné body na plátně. A to je úkol i pro vás.

Pracemi profesora Ypsilona se nechal inspirovat, nechal na sebe působit jeho práce profesor Reichl (jinak Mgr. Jaroslav Reichl ze SPŠST Panská) a pokračoval nezávisle na profesoru Ypsilon v započatém díle. Šel ale ještě dále než sám profesor Ypsilon a v některých svých dílech využíval dokonce i různé barevné odstíny.

11.17

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \frac{7}{4}\pi \wedge |y| \leq |\cos x|\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq 2\pi \wedge y = 2 + \sin x\right\}$

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq 2\pi \wedge y = -2 + \sin 2x\right\}$

Y: SETKÁNÍ V AKVÁRIU

11.18

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq 1 \wedge 2 \geq y \geq 3^{|x|} - 1\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq 1 \wedge 3^{|-x|} - 1 \geq y \geq -\frac{2}{3}\right\}$

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq \pi \wedge y = -2 + \cos 2x\right\}$

$M_4 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq \pi \wedge y = -\frac{5}{2} + \cos 2x\right\}$

Y: HUSITÉ NA BALTU

11.19

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 4\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; |x| \leq 1 \wedge y = 1 + \sqrt{|x|}\right\}$

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; |x-1| \leq 1 \wedge y = -2 + \sqrt{|x-1|}\right\}$

$M_4 = \left\{[x; y] \in R^2; |x-2| \leq 1 \wedge y = \sqrt{|x-2|}\right\}$

$M_5 = \left\{[x; y] \in R^2; \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \wedge y \leq -1 - |x-4|\right\}$

Y: MĚSÍČNÍ NOC

11.20

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -4; 4\rangle, -6 \leq y \leq -|x| + 5\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle 2,5; 3,5\rangle, -x + 5 \leq y \leq 4,5\right\}$

jinou barvou

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -3; -1,5\rangle, y \in \langle -3; -1\rangle\right\}$

$M_4 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle 1,5; 3\rangle, y \in \langle -3; -1\rangle\right\}$

$M_5 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -0,5; 0,5\rangle, y \in \langle -6; -3,5\rangle\right\}$

RE: PŘIJĎTE POBEJT!

11.21

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -3; 9\rangle, \frac{2}{3}|x| + \frac{2}{3}|x-6| - 5 \leq y \leq 3\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle 1; 7\rangle, 3,5 \leq y \leq -x + 10,5\right\}$

jinou barvou

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; -\pi \leq x \leq 3\pi, y = 0,5|\sin 2x| - 0,5\right\}$

$M_4 = \left\{[x; y] \in R^2; -\pi \leq x \leq 3\pi, y = 0,5|\sin 2x| - 0,75\right\}$

RE: AHOJ MOŘE

11.22

$M_1 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle 1; 7\rangle, y = \frac{1}{2}|2-x| + \frac{1}{2}|x-6| - 3\right\}$

$M_2 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle 2,5; 5,5\rangle, y \in \langle -1; 0,5\rangle\right\}$

$M_3 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -7; -3\rangle, 3|x+5| + 2 \leq y \leq 8\right\}$

$M_4 = \left\{[x; y] \in R^2; x \in \langle -7; -3\rangle,\right.$

$\left. 8 \leq y \leq -\frac{1}{2}|x+6| - \frac{1}{2}|x+4| + 10\right\}$

RE: SETKÁNÍ V CUKRÁRNĚ

11.23	**11.24**
$M_1 = \left\{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 4{,}5;\, 8{,}5\rangle, -3 \le y \le -\frac{3}{2}\lvert 6{,}5 - x\rvert + 8\right\}$ $M_2 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -4{,}5;\, 4{,}5\rangle,\, y \in \langle -3;\, 2\rangle\}$ $M_3 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -4{,}5;\, -3\rangle,\, y \in \langle 2;\, 3\rangle\}$ $M_4 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -1{,}5;\, 0\rangle,\, y \in \langle 2;\, 3\rangle\}$ $M_5 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 1{,}5;\, 3\rangle,\, y \in \langle 2;\, 3\rangle\}$ jinou barvou $M_6 = \left\{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 0;\, 3\rangle,\, 0 \le y \le -\frac{2}{3}\lvert x - 1{,}5\rvert + 1\right\}$ $M_7 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 0;\, 3\rangle,\, y \in \langle -3;\, 0\rangle\}$	$M_1 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 0;\, 3\rangle,\, y = \lvert x - 1{,}5\rvert + 4\}$ $M_2 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -4;\, 7\rangle,\, y \in \langle -3;\, 4\rangle\}$ $M_3 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -6;\, 9\rangle,$ $y = -\frac{3}{4}\lvert x + 5\rvert - \frac{3}{4}\lvert 8 - x\rvert + \frac{25}{4}\}$ jinou barvou $M_4 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle -3;\, 3\rangle,\, y \in \langle -2;\, 3\rangle\}$ $M_5 = \{[x;\, y] \in R^2;\, x \in \langle 3{,}5;\, 6\rangle,\, y \in \langle -2;\, 3\rangle\}$
RE: AŤ ŽIJE KRÁL!	**RE: ČESKÁ MARKÝZA NOVA JE PRIMA**

Řešení úloh

1. *Mocniny, odmocniny*

1.1 $\frac{b^6}{c^5 d^2}$; $a, b, c, d \neq 0$

1.2 $x^3 \left(\frac{x^2}{vz}\right)^8$; $x, y, z, v \neq 0$

1.3 $32\left(b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}}\right)^7$; $a > 0$, $b > 0$

1.4 $\frac{8a^4}{45}$; $abcd \neq 0$

1.5 $\frac{5}{9} a^{10} b^6 x^{-12} y^{-7}$; $abxy \neq 0$

1.6 $\frac{16}{3} a^2 b^{-1} x^3 y^{-1} z^{-2}$; $abxyz \neq 0$

1.7 a; $a > 0$

1.8 $\frac{1}{a}$; $a > 0$

1.9 $\sqrt[15]{a^{11}}$; $a > 0$

1.10 $\sqrt[8]{\frac{(a+b)^3}{a-b}}$; $\frac{a-b}{a+b} > 0$

1.11 $\sqrt[30]{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{37}}$; $\frac{a-x}{a+x} > 0$

1.12 $x + y$; $x > -y$

1.13 $3 + \sqrt{3}$

1.14 $\frac{17}{9} . \sqrt{3}$

1.15 $-3.\left(2+\sqrt{5}\right)\sqrt{2-\sqrt{5}}$

1.16 $-3\left(8 + 2.\sqrt{2} + 4.\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}\right)$

1.17 $\frac{6.\sqrt[3]{25} + 10}{5}$

1.18 $-\left(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$

1.19 $\sqrt[5]{a^3}$; $a > 0$

1.20 $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

1.21 $5 - 2\sqrt{3}$

1.22 $6 - \sqrt{15} + \sqrt{3}$

1.23 $\frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$; $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$

1.24 $\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}\right)$

1.25 $\frac{4x-2}{1-x}$; $x > 0$, $x \neq 1$

1.26 x; $x > 1$

2. *Úpravy algebraických výrazů*

2.1 $(2-d)\left(4 + 2d + d^2\right)$

2.2 $(m+n)(m+n-p)$

2.3 $2x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$

2.4 $(x+5)(x-2)$

2.5 $(u+3)\left(u^2 - 3u + 9\right)$

2.6 $(b+5)(b-x)(b+x)$

2.7 $(x+3)(x-4)$

2.8 $(k-2)(k+2)(k-3)$

2.9 $(x+1)\left(x^2-1\right)^2$

2.10 1; $a \neq \pm b$, $a \neq 0$

2.11 $\frac{1}{a+b}$; $a \neq \pm b$, $ab \neq 0$

2.12 $\frac{v^2 - 12v + 3}{2v\left(v^2 - 9\right)}$; $v \neq \pm 3$, $v \neq 0$

2.13 $\frac{4n - m}{6(m-n)^2}$; $m \neq \pm n$

2.14 $\frac{z(k+z)}{k-z}$; $k \neq \pm z$, $kz \neq 0$

2.15 $\frac{x^2}{y(x-y)}$; $x \neq \pm y$, $xy \neq 0$

2.16 $\frac{x-1}{x+1}$; $x \neq 0, \pm 1$

2.17 $\frac{1}{(xy)^2}$; $x \neq y$, $xy \neq 0$

2.18 $(a+2)^2$; $a \neq \pm 2$, $a \neq 0$

2.19 $(x-1)^2$; $x \neq \pm 1, \pm 2$

2.20 $\frac{a - ab - 2b^2}{a^2 - ab + b^2}$; $a \neq b, 0$, $a^2 - ab + b^2 \neq 0$

2.21 $\frac{6(x+2)}{x^2+3}$; $x \neq -2, 1, 9$

2.22 -1; $x \neq -6, \pm 4, 3$

2.23
$a^4 + 4 = a^4 + 4 + 4a^2 - 4a^2$ a další úpravy

3. *Lineární rovnice a nerovnice*

3.1 $O = R$, $D = R - \{-3; 2\}$, $P = \emptyset$

3.2 $O = R$, $D = R - \{3\}$, $P = R - \{3\}$

3.3 $O = R$, $D = R - \{-3; 3\}$, $P = \{-1{,}5\}$

3.4 $O = R$, $D = R - \{-3; 1\}$, $P = \emptyset$

3.5 $O = D = R$, $P = \langle 0; 1 \rangle$

3.6 $O = D = R$, $P = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$

3.7 $O = D = R$, $P = \{-2; 0\}$

3.8 $O = D = R$, $P = \{3; 6\}$

3.9 $p \in (-\infty; -0{,}5) \cup \langle 0; \infty)$

3.10 $O = D = R$, $a = 5 \Rightarrow P = R$, $a \neq 5 \Rightarrow P = \{3a(a+5)\}$

3.11 $O = D = R$, $a = 1 \Rightarrow P = R$, $a = -1 \Rightarrow P = \emptyset$, $|a| \neq 1 \Rightarrow P = \left\{\frac{4\left(a^2 + a + 1\right)}{a+1}\right\}$

3.12 $O = D = R$, $a = 4 \Rightarrow P = R$, $a \neq 4 \Rightarrow P = \left\{\frac{1}{9}(a-4)(a+5)\right\}$

3.13 $a \in R - \left\{-\frac{21}{2}\right\}$

3.14 $a \in R - \left\{-\frac{10}{9}\right\}$, $P = \left\{\left[-\frac{1}{14}; \frac{37}{28}\right]\right\}$

3.15 a) $O = D = N \times N$, $P = \emptyset$, b) $O = D = R \times R$, $P = \{[2; -3]\}$

3.16 $O = D = R \times R$, $P = \{[x; 2x+3]\}$

3.17 $O = R \times R$, $D = R - \{1\} \times R$, $P = \emptyset$

3.18 $O = D = R$, $P = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 1{,}5; \infty)$

3.19 $O = D = R$, $P = (-\infty; -5) \cup (2; \infty)$

3.20 $O = R$, $D = R - \{2\}$, $P = \langle -2; 2)$

3.21 $O = R$, $D = R - \{-6\}$, $P = (-\infty; -6) \cup (0{,}5; \infty)$

3.22 $O = R$, $D = R - \{4\}$, $P = \langle 2{,}5; 4)$

3.23 $O = R$, $D = R - \{0{,}5\}$, $P = \left(-\frac{5}{12}; 0{,}5\right)$

3.24 $O = R$, $D = R - \{-2; 1\}$, $P = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$

3.25 $O = D = R$, $P = (-\infty; -1{,}5) \cup (2{,}5; \infty)$

3.26 $O = D = R$, $P = (-\infty; -6) \cup (0; 2) \cup (8; \infty)$

3.27 $O = D = R$, $P = \langle 0; 4\rangle$

3.28 $x \in (-\infty; -2{,}8\rangle \cup (2; \infty)$

3.29 $O = R$, $D = R - \{3; 4\}$, $P = \langle -2; 1)$

3.30 $O = R$, $D = R - \{-3\}$, $P = (-\infty; -5{,}5) \cup \left\langle -\frac{4}{3}; \infty\right)$

3.31 4 modré, 8 žlutých, 7 zelených a 3 červené

3.32 55

3.33 20 *m* od vyššího stromu

3.34 3000 kroků

3.35 8 *hl*

3.36 84 *let*

3.37 40 talentů

3.38 8 disků a 30 oštěpů

3.39 52 stokorun a 124 dvěstěkorun

3.40 cena: 80 franků, clo: 10 franků

3.41 60 *m*

3.42 80 schodů, 3 schody za sekundu

3.43 syn: 8 let, otec 32 let

3.44 všechna dvojciferná čísla tvaru $10a + b$, kde $b = a + 3$

3.45 2,5 a 3,5

3.46 $O = R$, $D = R - \{0; 1\}$, $P = \emptyset$

3.47 $O = R$, $D = R - \{1\}$, $P = \{3\}$

3.48 kůň 5 pytlů, mezek 7 pytlů

4. Kvadratické rovnice a nerovnice

4.1 $O = R$, $D = R - \{-4; 4\}$, $P = \{-2; 2\}$

4.2 $O = R$, $D = R - \{-1; 0\}$, $P = \{-4; 3\}$

4.3 $O = R$, $D = R - \{-6; 4\}$, $P = \left\{-3{,}5; -\frac{2}{7}; 2\right\}$

4.4 $O = D = R$, $P = \{0\}$

4.5 $O = D = R$, $P = \{-9; 1; -4 \pm \sqrt{7}\}$

4.6 $O = D = R$, $P = \{-3; 3\}$

4.7 $O = D = R$, $P = \{-10; 10\}$

4.8 $k(4x^2 + 11x + 5) = 0;\ k \in R - \{0\}$

4.9 a) $k(x^2 - 36x + 240) = 0;\ k \in R - \{0\}$, b) $k(x^2 - 17x + 67) = 0;\ k \in R - \{0\}$

4.10 $b = -7$

4.11 $c = 3$

4.12 $a = 15$

4.13 $b = \pm 9$

4.14 $O = R$, $D = R - \{0{,}5\}$, $p \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty) \Rightarrow P = \left\{p \pm \sqrt{p(p-1)}\right\}$, $p = 0 \vee p = 1 \Rightarrow P = \{p\}$, $p \in (0; 1) \Rightarrow P = \emptyset$

4.15 $O = R$, $D = R - \{0\}$, $a = 0 \Rightarrow P = \emptyset$, $a \in R - \{0\} \Rightarrow P = \left\{\frac{1}{a}; a\right\}$

4.16 $O = D = R$, $p = 0 \Rightarrow P = \{-0{,}25\}$, $p = -1 \Rightarrow P = \{0{,}5\}$, $p > -1 \wedge p \neq 0 \Rightarrow P = \left\{\frac{-2p - 3 \pm \sqrt{p+1}}{2p}\right\}$, $p < -1 \Rightarrow P = \emptyset$

4.17 $O = D = R$, $p < 9 \Rightarrow P = \left\{-3 \pm \sqrt{9-p}\right\}$, $p = 9 \Rightarrow P = \{-3\}$, $p > 9 \Rightarrow P = \emptyset$

4.18 $O = D = R$, $p = -5 \Rightarrow P = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$, $p < 4 \wedge p \neq -5 \Rightarrow P = \left\{\frac{-(p+2) \pm \sqrt{4-p}}{p+5}\right\}$, $p = 4 \Rightarrow P = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $p > 4 \Rightarrow P = \emptyset$

4.19 čtverec

4.20 $\frac{4}{3}\sqrt{15}\ km \doteq 5{,}16\ km$ od D

4.21 silnice svírá s řekou úhel $60°$

4.22 $O = R$, $D = \left\langle 0; \frac{225}{4}\right\rangle$, $P = \{9\}$

4.23 $O = R$, $D = R - \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right)$, $P = \emptyset$

4.24 $O = R$, $D = R - \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$, $P = \{4\}$

4.25 $O = R$, $D = R - \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$, $P = \emptyset$

4.26 $O = R$, $D = \langle 0{,}5; \infty)$, $P = \{1\}$

4.27 a) $O = Z$, $D = \left\{x \in Z; \left(x \geq -\frac{5}{8} \wedge x \leq -0{,}488\right) \vee x \geq 0{,}926\right\}$, $P = \emptyset$, b) $O = R$, $D = \left\langle -\frac{5}{8}; -0{,}488\right\rangle \cup \langle 0{,}926; \infty)$, $P = \{-0{,}5\}$

4.28 $O = R$, $D \subset R: x \geq -\frac{7}{4} \wedge 1 \geq x^2\left(x + \frac{7}{4}\right)$, $P = \{0\}$

4.29 $O = R$, $D = \langle -1; \infty)$, $P = \{3\}$

4.30 $O = R$, $D = \langle 2; \infty)$, $P = \{10\}$

4.31 $O = D = R$, $P = \left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$

4.32 $O = D = R$, $P = (-3; -2)$

4.33 $D(f) = (-\infty; -3{,}5\rangle \cup \langle 2; \infty)$

4.34 $D(g) = (-\infty; 0{,}5) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$

4.35 $D(h) = (-\infty; -2{,}5) \cup (3; 3{,}5) \cup (3{,}5; \infty)$

4.36 $D(k) = (-0{,}4; 2)$

4.37 $D(l) = \emptyset$

4.38 $O = R$, $D = R - \{-2; 1\}$, $P = R - \langle -2; 0)$

4.39 $O = R$, $D = R - \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$, $P = \left\langle -1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$

4.40 $O = R$, $D = R - \{7\}$, $P = (-\infty; -9\rangle$

4.41 $O = R$, $D = R - \{0\}$, $P = (-2; 0) \cup (6; \infty)$

4.42 $O = D = R$, $P = (-3; 3)$

4.43 $O = D = R$, $P = (-1; 1)$

4.44 $O = D = R$, $P = (-\infty; -4) \cup (1; \infty)$

4.45 $O = D = R$, $P = (2; 4)$

4.46 $O = D = R \times R$, $P = \{[0; 1], [-0{,}8; -0{,}2]\}$

4.47 $O = D = R \times R$, $P = \{[10; 8]\}$

4.48 $O = D = R \times R$, $P = \{[1; 6], [-6; -1]\}$

4.49 $O = D = R \times R$, $P = \{[0; 1], [-8; 17]\}$

4.50 $O = D = R \times R$, $P = \emptyset$

4.51 16 nebo 48 opic

4.52 72 včel

4.53 první hospodyně měla 40 vajec, druhá 60

4.54 33 cm, 44 cm, 55 cm

4.55 7 studentů, 10,50 Kč

4.56 125 cm x 75 cm

4.57 15 schodů

4.58 7 s nebo 15 s

4.59 8 Ω a 24 Ω

4.60 12 hodin, 6 hodin

4.61 73

4.62 56 let

4.63 12 lidí

5. Úpravy goniometrických výrazů

5.1 $\sin x = 0{,}8$, $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{3}{4}$

5.2 $\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{15}}{15}$, $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{15}$

5.3 $\sin x = \frac{-a}{a^2 + b^2}$, $\cos x = \frac{-b}{a^2 + b^2}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{b}{a}$, $ab \neq 0$

5.4 $\operatorname{tg} x = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{2\sqrt{6} - 4}$

5.5 $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $x \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$

5.6 $x \in R$

5.7 $x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$

5.8 $x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$

5.9 $x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$

5.10 $x \in R$

5.11 $\frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{4}; k \in Z\right\}$

5.12 $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, $x \in R - \{k\pi; k \in Z\}$

5.13 $\operatorname{tg} x$, $x \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; (4k+3)\frac{\pi}{4}; k \in Z\right\}$

5.14 1, $x \in R - \left\{(4k+3)\frac{\pi}{4}; k \in Z\right\}$

5.15 $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

5.16 $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

5.17 $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

5.18 $\sqrt{\frac{4-\sqrt{2}.\left(\sqrt{3}-1\right)}{4+\sqrt{2}.\left(\sqrt{3}-1\right)}}$

5.19 $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$

6. Goniometrické rovnice a nerovnice

6.1 $O = D = \langle 0;\, 2\pi \rangle$, $P = \left\{\frac{11}{12}\pi;\, \frac{23}{12}\pi;\, \frac{\pi}{4};\, \frac{5\pi}{4}\right\}$

6.2 $O = D = R$, $P = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.3 $O = D = R$, $P = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{4} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.4 $O = R$, $D = \left\langle \arcsin\left(-\frac{5}{8}\right) + 2k\pi;\, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \right\rangle;\, k \in Z$, $P = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.5 $O = R$, $D = \left\langle \arcsin\left(\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right) + 2k\pi;\, (2k+1)\pi - \arcsin\left(\frac{5-\sqrt{33}}{4}\right) \right\rangle;\, k \in Z$, $P = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.6 $O = D = R$,
$P = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.7 $O = D = R$, $P = \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi;\, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.8 $O = D = R$,
$P = \left\{2k\pi;\, \frac{\pi}{3} + 4k\pi;\, \frac{5\pi}{3} + 4k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.9 $O = D = R$,
$P = \left\{\frac{\pi}{12} + k\pi;\, \frac{5\pi}{12} + k\pi;\, \frac{3\pi}{4} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.10 $O = D = R$,
$P = \left\{k\frac{\pi}{4};\, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2};\, \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2};\, k \in Z\right\}$

6.11 pro $a < 7$ nemá rovnice řešení

6.12 a) $O = D = \langle 0;\, 2\pi \rangle$, $P = \left\{\frac{\pi}{3};\, \frac{5\pi}{3}\right\}$, b) $O = D = \langle 0;\, 2\pi \rangle$, $P = \left\langle 0;\, \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{3};\, 2\pi \right\rangle$

6.13 a) $O = D = \langle 0;\, 2\pi \rangle$, $P = \left\{0;\, \frac{\pi}{3};\, \frac{2\pi}{3};\, \frac{4\pi}{3};\, \frac{5\pi}{3};\, 2\pi\right\}$, b) $O = D = \langle 0;\, 2\pi \rangle$,
$P = \left\langle 0;\, \frac{\pi}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{2\pi}{3};\, \pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{4\pi}{3};\, \frac{5\pi}{3} \right\rangle$

6.14 $O = R$, $D = R - \left\{0;\, \frac{2}{(2k+1)\pi};\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{4}{(4k-1)\pi};\, k \in Z\right\}$

6.15 $O = R$, $D = R - \{k\pi;\, k \in Z\}$, $P = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.16 $O = R$, $D = R - \{k\pi;\, k \in Z\}$, $P = \left\{\frac{2\pi}{3} + k\pi;\, \frac{5\pi}{6} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.17 $O = D = R$, $P = \left\{2k\pi;\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.18 $O = R$, $D = R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1);\, k \in Z\right\}$

6.19 $O = R$, $D = R - \{k\pi;\, k \in Z\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{4}(2k+1);\, \frac{\pi}{3} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.20 $O = D = R$, $P = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\, \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi;\, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi;\, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.21 $O = R$, $D = R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2};\, -\frac{\pi}{4} + k\pi;\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\, \frac{7\pi}{12} + k\pi;\, \frac{11\pi}{12} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.22 $O = R$, $D = R - \left\{k\pi;\, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.23 $O = R$, $D = R - \{k\pi;\, k \in Z\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\, \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.24 $O = R$, $D = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.25 $O = R$, $D = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi;\, k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.26 $O = R$, $D = R - \left\{k\frac{\pi}{2};\, k \in Z\right\}$, $P = \left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi;\, \frac{\pi}{3} + k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.27 $O = D = R$, $P = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\, 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.28 $O = D = R$, $P = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi;\, k \in Z\right\}$

6.29 $O = D = R$, $P = \left\langle\frac{\pi}{6} + k\pi;\, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle;\, k \in Z$

7. Trigonometrie, sinová a kosinová věta

7.1 69,46 cm, 30,25°

7.2 10,85 cm

7.3 $\cos x = \frac{1}{3}$

7.4 pomocí sinové věty

7.5 $\alpha = 44{,}05°$, $\beta = 52{,}62°$, $\gamma = 83{,}33°$

7.6 nemá řešení

7.7 $\alpha = 33°$, $b = 4{,}58\ cm$, $c = 8{,}75\ cm$

7.8 $a = 4{,}21\ cm$, $\beta = 41{,}95°$, $\gamma = 123°14'$

7.9 3,46 m

7.10 6,8 $m.s^{-1}$, 138,3 m, 150 m

7.11 AC: 51,8 N tahem, BC 73,2 N tlakem

7.12 40,4 N, 38,26°

7.13 71,29 cm

7.14 7,77 m

8. Komplexní čísla

8.1 $2{,}3 - 5{,}6i$

8.2 $-\frac{27}{26} + \frac{83}{26}i$

8.3 nemá řešení

8.4 $a = \pm 0{,}6$

8.5 žádné, a) $-\frac{5}{2} + \frac{27}{2}i$, b) $-\frac{24\sqrt{6}+26}{13} + \frac{10\sqrt{6}-39}{13}i$, c) $\frac{2}{13}\sqrt{1138}$

8.6 $x = -3$, $y = -0{,}5$

8.7 $x = 0{,}8$, $y = -0{,}4$

8.8 $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$, $z_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

8.9 $z_1 = 2\sqrt{2}(1+i)$, $z_2 = 2\sqrt{2}(1-i)$, $z_3 = 2\sqrt{2}(-1+i)$, $z_4 = 2\sqrt{2}(-1-i)$

8.10 $z_1.z_2 = \sqrt{15}\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$, $z_1 : z_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{3}i$

8.11 $z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

8.12 $z = \sqrt{6}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$, $z^{30} = 6^{15}$

8.13 1

8.14 $\mathrm{Re}(z^{30}) = 0$, $\mathrm{Im}(z^{30}) = -2^{45}$

8.15 $\mathrm{Re}(z^{21}) = 0$, $\mathrm{Im}(z^{21}) = 2^{21}$

8.16 a) $x^2 + 8x + 17 = 0$, b) $x^2 + 4x + 40 = 0$

8.17 $O = C$, $D = C - \{3\}$, $P = \{2 \pm 3i\}$

8.18 $O = C$, $D = C - \{0\}$, $P = \{1 \pm i\sqrt{13}\}$

8.19 $O = C$, $D = C - \{1\}$, $P = \{0;\, 2 \pm 2i\}$

8.20 $O = C$, $D = C - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $P = \left\{0;\, \frac{1}{3}\left(3 \pm i\sqrt{30}\right)\right\}$

8.21 $O = D = C$, $P = \left\{-1;\, \pm 0{,}5\left(1 + i\sqrt{3}\right)\right\}$

8.22 $O = D = C$, $P = \{-1;\, -i;\, 1;\, i\}$

8.23 $O = D = C$, $P = \left\{\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi;\, \cos\frac{23}{18}\pi + i\sin\frac{23}{18}\pi;\, \cos\frac{35}{18}\pi + i\sin\frac{35}{18}\pi\right\}$

8.24 $O = D = C$, $P = \left\{ \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{5}}{3}} \left(\cos \frac{2}{9}\pi + i \sin \frac{2}{9}\pi \right); \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{5}}{3}} \left(\cos \frac{8}{9}\pi + i \sin \frac{8}{9}\pi \right); \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{5}}{3}} \left(\cos \frac{14}{9}\pi + i \sin \frac{14}{9}\pi \right) \right\}$

8.25 $O = D = C$,

$$P = \left\{ \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{5}{16}\pi + i \sin \frac{5}{16}\pi \right); \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{13}{16}\pi + i \sin \frac{13}{16}\pi \right); \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{21}{16}\pi + i \sin \frac{21}{16}\pi \right); \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{29}{16}\pi + i \sin \frac{29}{16}\pi \right) \right\}$$

8.26 $[4; 0]$, $\left[4\cos \frac{2}{5}\pi; 4\sin \frac{2}{5}\pi\right]$, $\left[4\cos \frac{4}{5}\pi; 4\sin \frac{4}{5}\pi\right]$, $\left[4\cos \frac{6}{5}\pi; 4\sin \frac{6}{5}\pi\right]$, $\left[4\cos \frac{8}{5}\pi; 4\sin \frac{8}{5}\pi\right]$

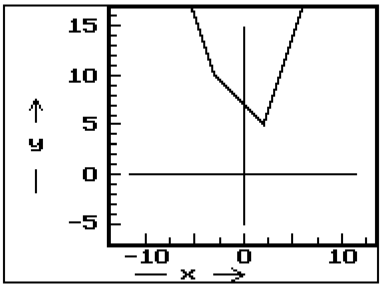
8.27 $\left[\frac{5}{2}; 0\right]$, $\left[\frac{5}{4}; \frac{5\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[-\frac{5}{4}; \frac{5\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[-\frac{5}{2}; 0\right]$, $\left[-\frac{5}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right]$, $\left[\frac{5}{4}; -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right]$

9. Grafy funkcí

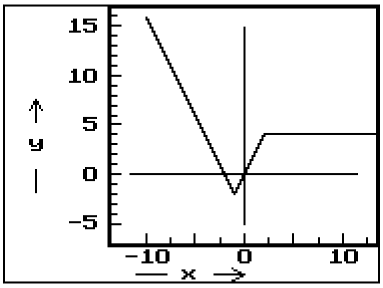
9.1 $y = -3{,}5x - 2$, $\left[-\frac{4}{7}; 0\right]$, $[0; 2]$

9.2 1,2 *m*

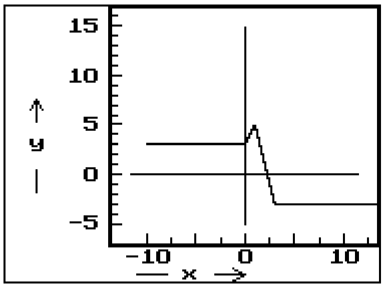
9.3 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 5; \infty)$



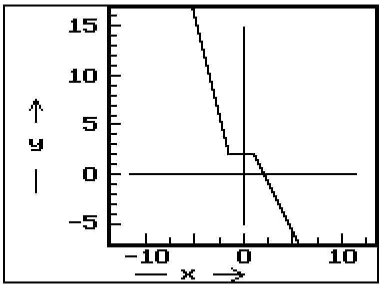
9.4 $D(f) = R$, $H(f) = \langle -2; \infty)$



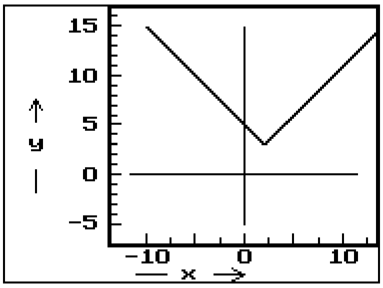
9.5 $D(f) = R$, $H(f) = \langle -3; 5\rangle$



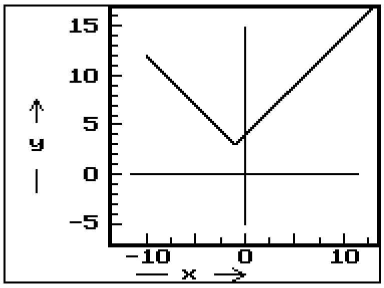
9.6 $D(f) = R$, $H(f) = R$



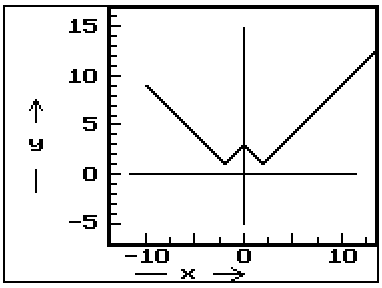
9.7 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 3; \infty)$



9.8 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 3; \infty)$



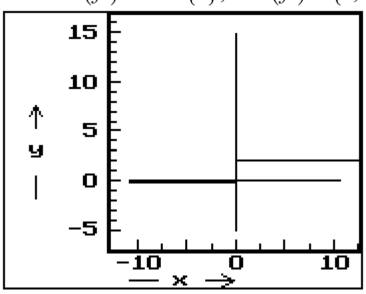
9.9 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty)$



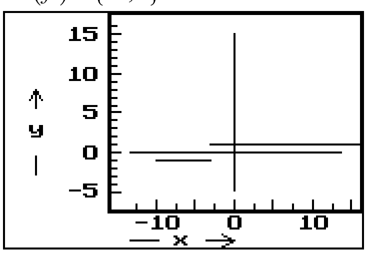
9.10 $y = |ax + b| + 3$ ($a, b \in R$, $a \neq 0$), $D(f) = R$, $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right\rangle$ klesající, $\left\langle -\frac{b}{a}; \infty\right)$ rostoucí, průsečík s *x* neexistuje, s *y*: $[0; |b| + 3]$

9.11 $y = |ax - 2a| + c$ ($a, c \in R$, $a \neq 0$), $D(f) = R$, $H(f) = \langle c; \infty)$, $\left[\frac{2a \pm c}{a}; 0\right]$ (pro $c \leq 0$), $[0; |-2a| + c]$

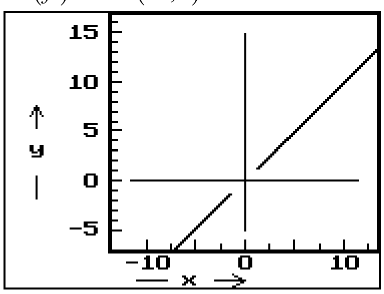
9.12 $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = \{0; 2\}$



9.13 $D(f) = R - \{-3\}$, $H(f) = \{-1; 1\}$



9.14 $D(f) = R - (-1; 1)$, $H(f) = R - (-1; 1)$

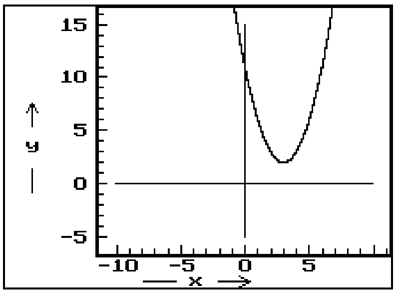


9.15 $f: y = x^2 - 12x + 14$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle -4; \infty)$, $V = [3; -4]$, $[3 \pm \sqrt{2}; 0]$, $[0; 14]$

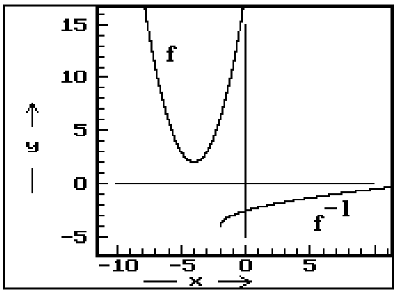
9.16 $f: y = \frac{1}{3}(x+2)^2$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$, $V = [-2; 0]$, $[-2; 0]$, $\left[0; \frac{4}{3}\right]$ nebo $f: y = \frac{1}{12}(x+5)^2$, $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$, $V = [-5; 0]$, $[-5; 0]$, $\left[0; \frac{25}{12}\right]$

9.17 $f: y = 0{,}5x^2 + 3$, $D(f) = R$, $V = [0; 3]$, s x není, $[0; 3]$, prostá na $(-\infty; 0\rangle$ nebo $\langle 0; \infty)$

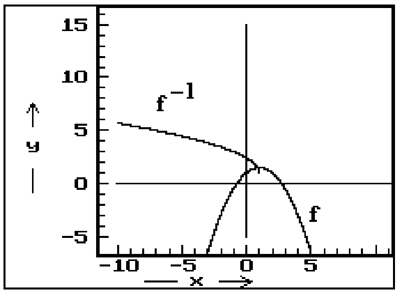
9.18 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 2; \infty)$



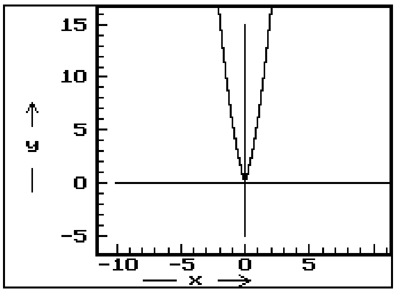
9.19 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 2; \infty)$



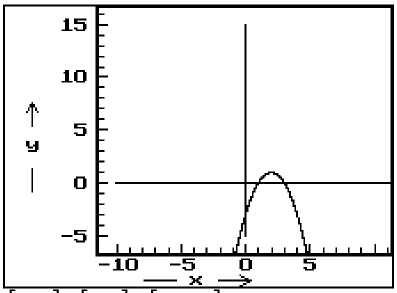
9.20 $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; 1\rangle$



9.21 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$

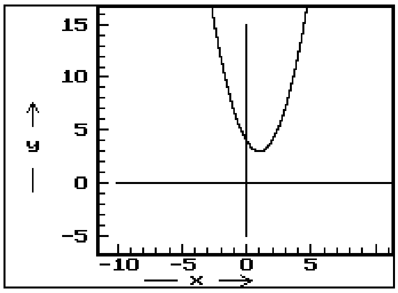


9.22 $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; 1\rangle$

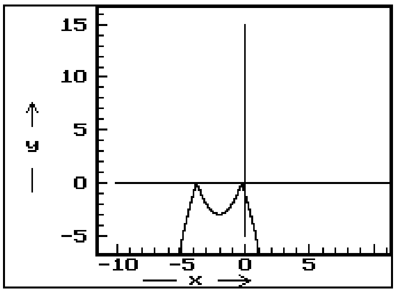


$[3; 0]$, $[1; 0]$, $[0; -3]$

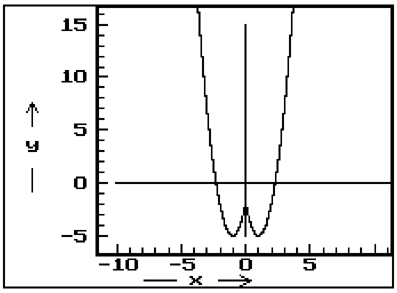
9.23 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$



9.24 $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; 0\rangle$



9.25 $D(f) = R$, $H(f) = \langle -5; \infty)$



9.26 $D(f) = R$, lichá

9.27 $D(f) = R$, ani lichá ani sudá

9.28 $D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z\right\}$, sudá

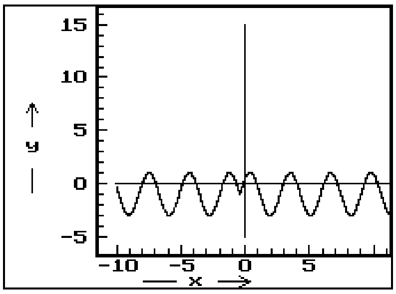
9.29 $D(f) = R - \left\{\pm \sqrt[6]{5}\right\}$, lichá

9.30 $D(f) = R$, lichá

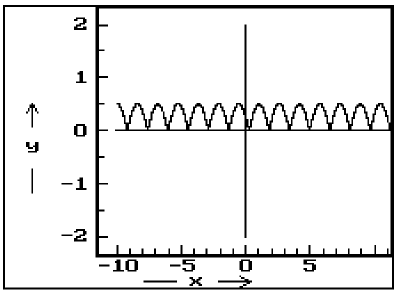
9.31 $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, $k \in Z$, sudá

9.32 $D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in Z\right\}$, $k \in Z$, sudá

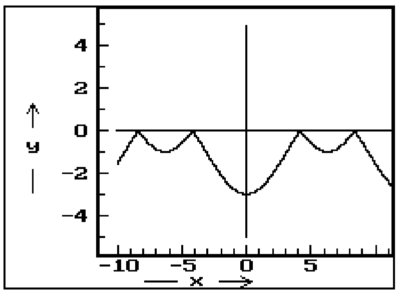
9.33 $D(f) = R$, $H(f) = \langle -3; 1\rangle$, $\left[-\frac{\pi}{24} + k\pi; 0\right]$, $\left[-\frac{5\pi}{24} + k\pi; 0\right]$, $\left[\frac{7\pi}{24} + k\pi; 0\right]$, $\left[-\frac{13\pi}{24} + k\pi; 0\right]$, $[0; \sqrt{2} - 1]$



9.34 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; 0{,}5\rangle$

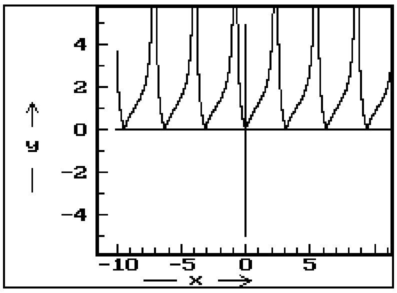


9.35 $D(f) = R$, $H(f) = \langle -3; 0\rangle$

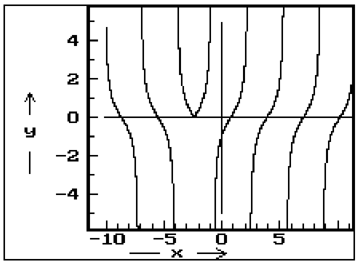


$\left[-\frac{4\pi}{3} + 4k\pi; 0\right]$, $\left[\frac{4\pi}{3} + 4k\pi; 0\right]$, $[0; -3]$

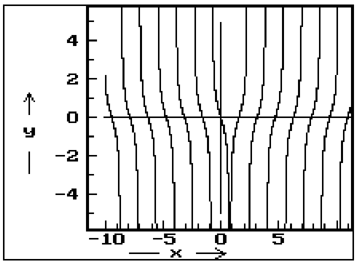
9.36 $D(f)=R$, $H(f)=\langle 0;\infty)$



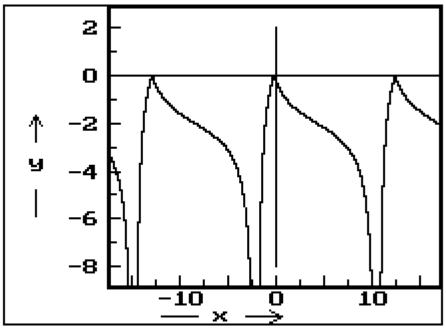
9.37 $D(f)=R-\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\,k\in Z\right\}$, $H(f)=R$



9.38 $D(f)=R-\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2};\,k\in Z\right\}$, $H(f)=R$

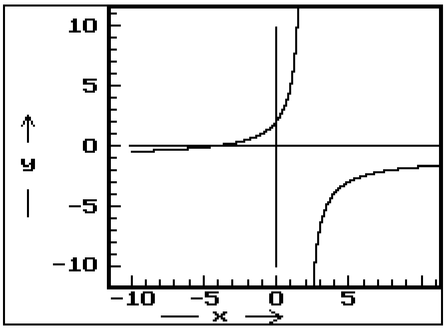


9.39 $D(f)=R-\left\{-\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi;\,k\in Z\right\}$, $H(f)=(-\infty;0\rangle$

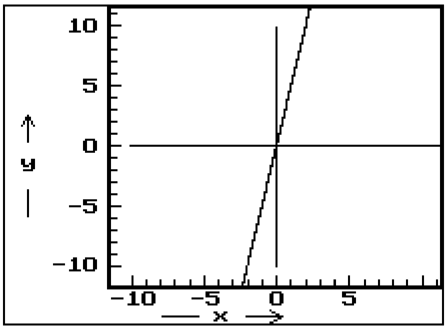


9.40 $H(f)=\left\langle -\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right\rangle$

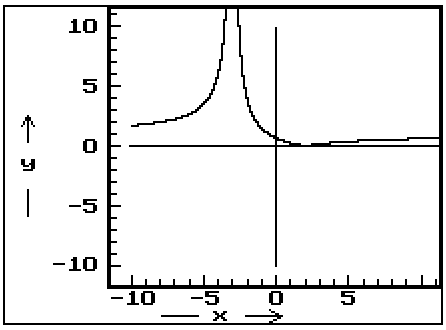
9.41 $D(f)=H\left(f^{-1}\right)=R-\{0;2\}$, $H(f)=D\left(f^{-1}\right)=R-\{-1;2\}$, $[-4;0]$, s y není



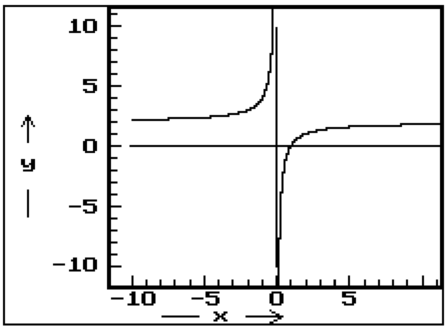
9.42 $D(f)=H(f)=R-\{0\}$, průsečíky nejsou



9.43 $D(f)=R-\{2;-3\}$, $H(f)=(0;\infty)$, s x není, $\left[0;\dfrac{2}{3}\right]$

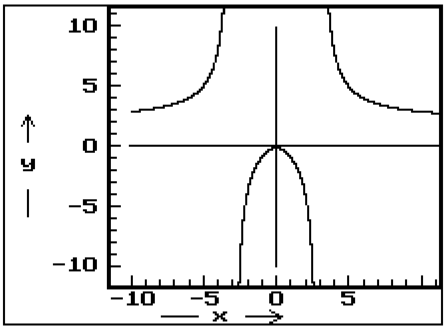


9.44 $D(f)=R-\{0;-1\}$, $H(f)=R-\{2;4\}$

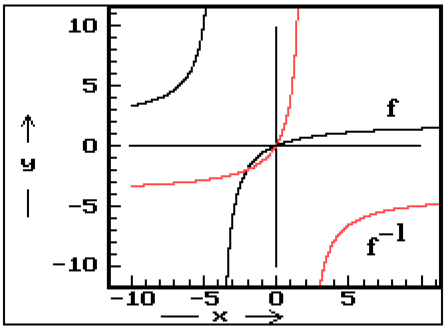


9.45 $D(f)=R-\{0;\pm 3\}$, $H(f)=R-\langle 0;2\rangle$, nejsou

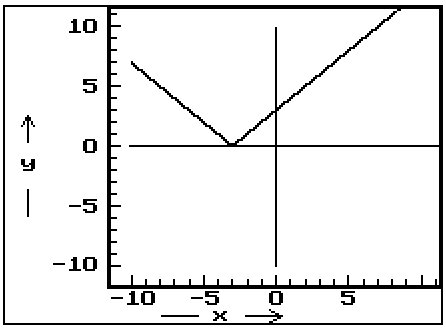
9.46 $D(f)=R-\{0;-4\}$, $H(f)=(0;\infty)$



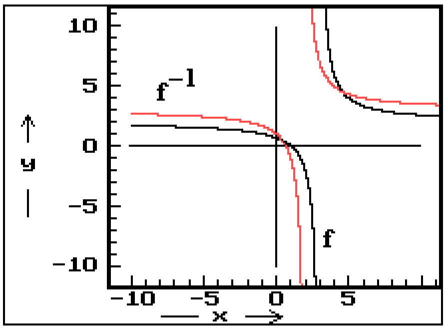
9.47 $D(f) = H(f^{-1}) = R - \{0; -4\}$,
$H(f) = D(f^{-1}) = R - \{0; 2\}$, průsečíky neexistují



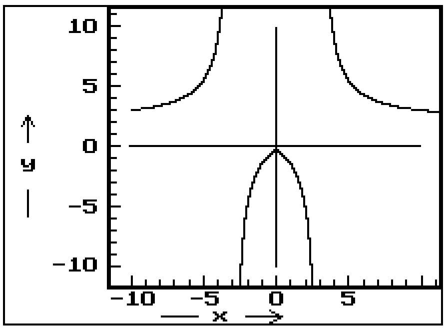
9.49 $D(g) = R$, $H(g) = \langle 0; \infty)$



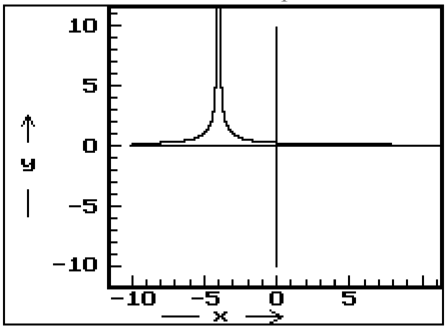
9.51 $D(f) = H(f^{-1}) = R - \{3\}$,
$H(f) = D(f^{-1}) = R - \{2\}$



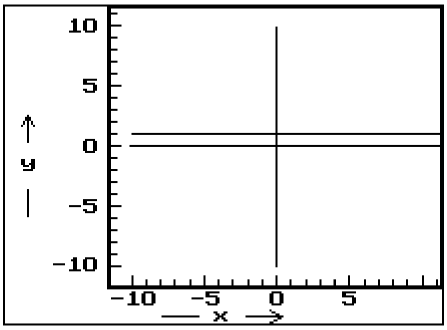
9.53 $D(f) = R - \{\pm 3\}$, $H(f) = R - \{2\}$



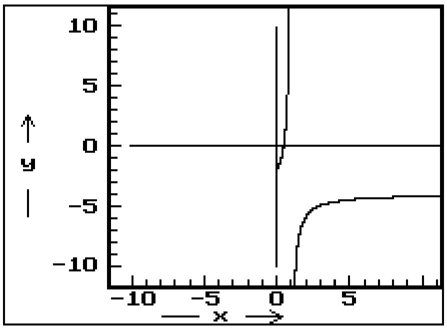
9.55 $D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = R - (0; 1\rangle$, $[6; 0]$, $[0; 3]$



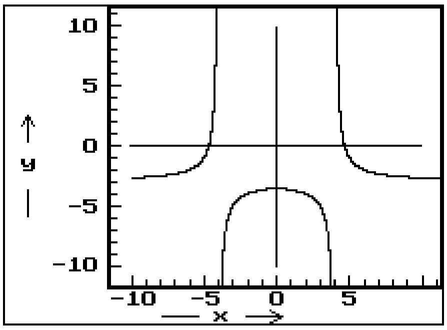
9.48 $D(f) = R - \{0; \pm 2\}$, $H(f) = \{1\}$



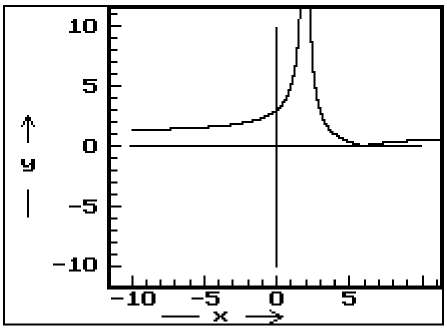
9.50 $D(f) = \langle 0; \infty) - \{1\}$, $H(f) = R - \{-4\}$



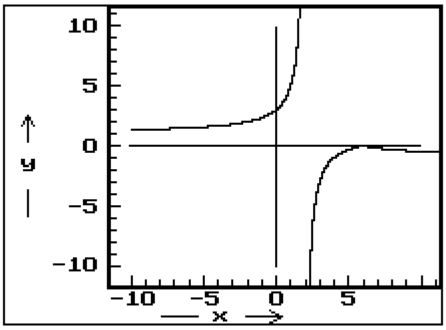
9.52 $D(f) = R - \{\pm 4\}$, $H(f) = R - \{-3\}$



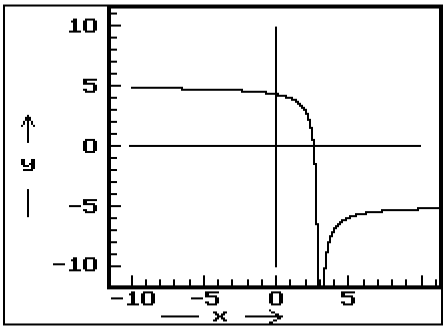
9.54 $D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = \langle 0; \infty)$, $[6; 0]$, $[0; 3]$



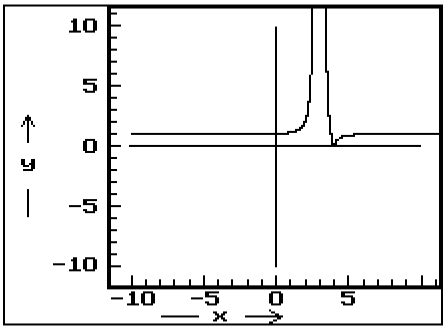
9.56 $D(f) = R - \{3\}$, $H(f) = (-\infty; 0\rangle$



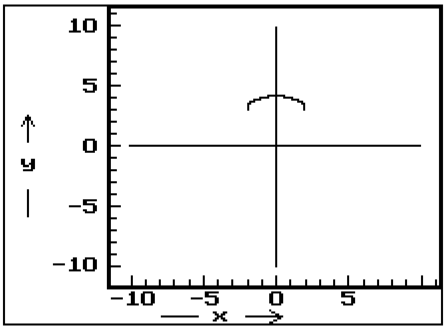
9.57 $D(f) = R - \{3\}$, $H(f) = (-\infty; 5)$



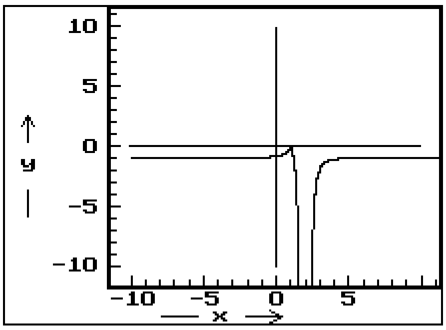
9.59 $D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = \langle 0; \infty)$



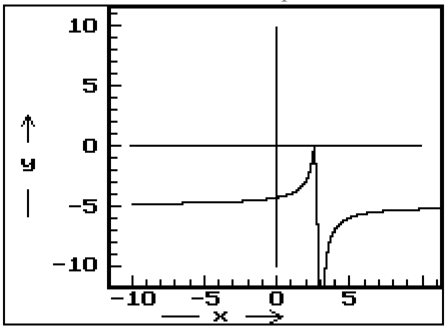
9.61 $D(f) = \langle -2; 2\rangle$, $H(f) = \left\langle 3; 3 + \sqrt[3]{2}\right\rangle$



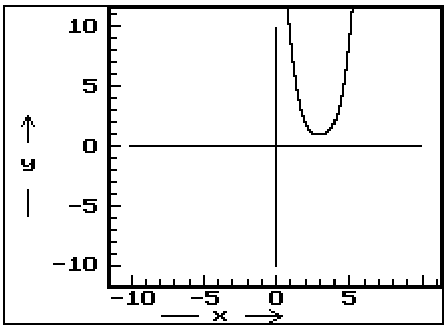
9.63 $D(f) = R - \{2\}$, $H(f) = (-\infty; 0\rangle$



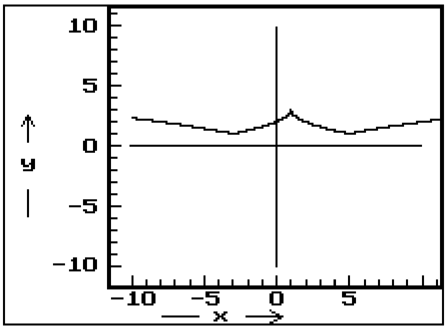
9.65 $D(f) = \langle -2; \infty)$, $H(f) = (-\infty; 0\rangle$



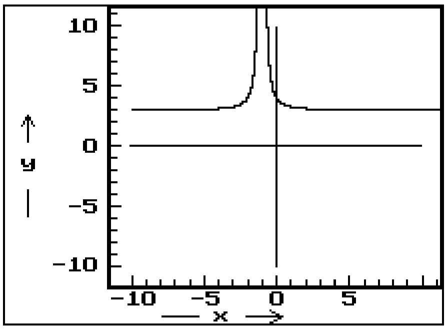
9.58 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty)$



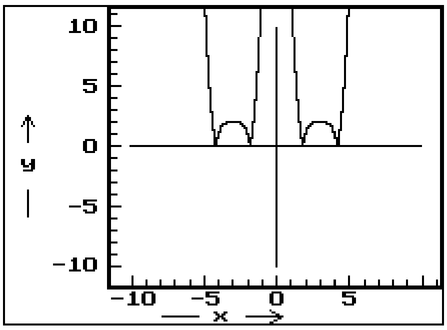
9.60 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 1; \infty)$



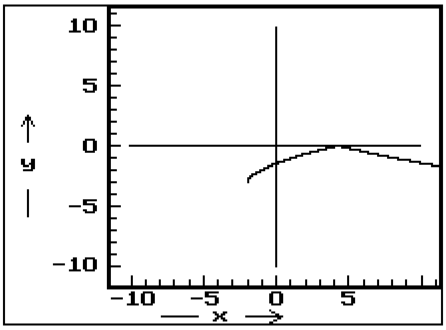
9.62 $D(f) = R - \{1\}$, $H(f) = (3; \infty)$



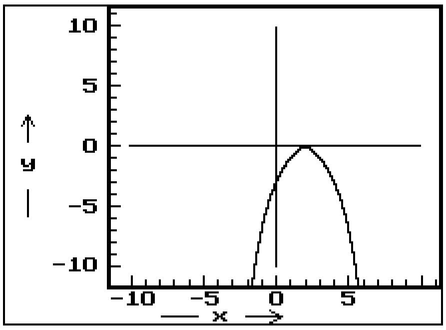
9.64 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$



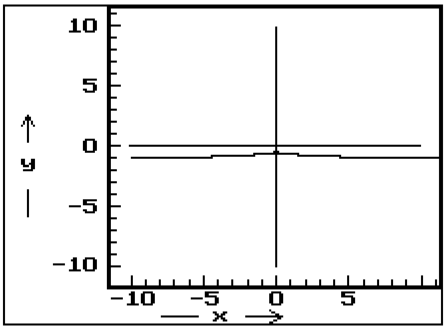
9.66 $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0; \infty)$, $[\log_2 3; 0]$, $[0; 1]$



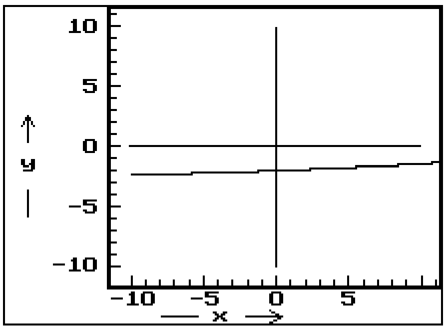
9.67 $D(f)=R$, $H(f)=(-\infty;0\rangle$



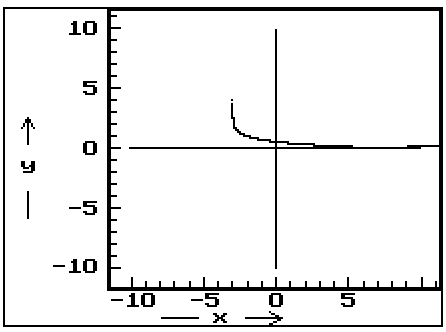
9.69 $D(f)=R$, $H(f)=\left(-1;\frac{5}{9}\right\rangle$

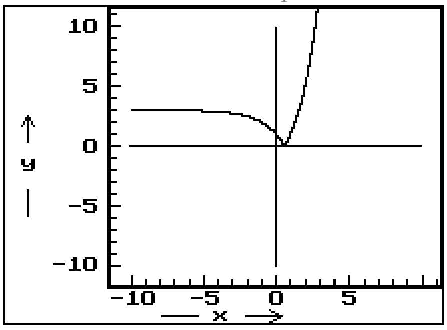


9.71 $D(f)=R$, $H(f)=(-3;\infty)$, $\left[1+\log_{\frac{\pi}{3}} 3;\, 0\right]$, $\left[0;\, \frac{3}{\pi}-3\right]$

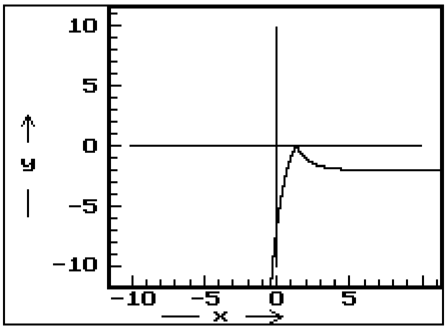


9.73 $D(f)=(-3;\infty)$, $H(f)=\langle 0;\infty)$, $[7;0]$, $[0;|\log 3-1|]$

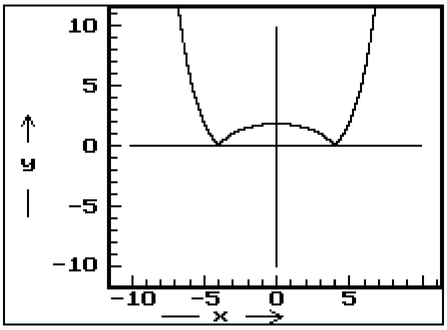




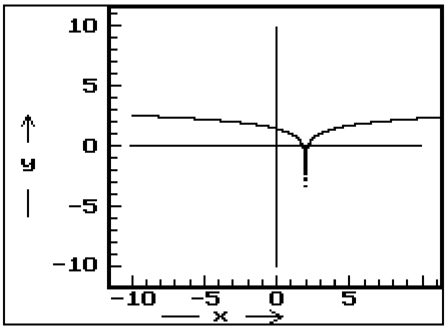
9.68 $D(f)=R$, $H(f)=(-\infty;0\rangle$



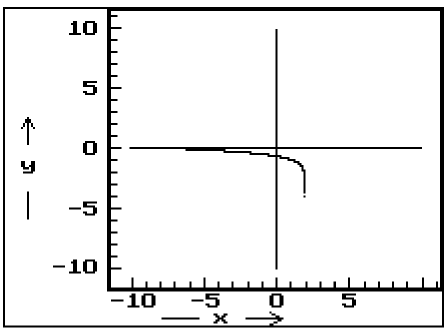
9.70 $D(f)=R$, $H(f)=\langle 0;\infty)$



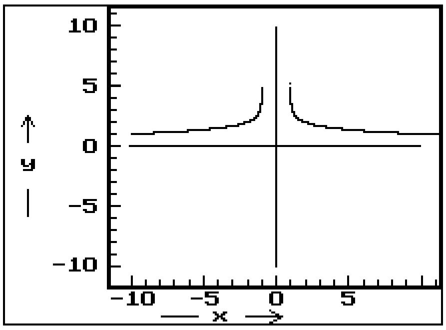
9.72 $D(f)=R-\{2\}$, $H(f)=R$



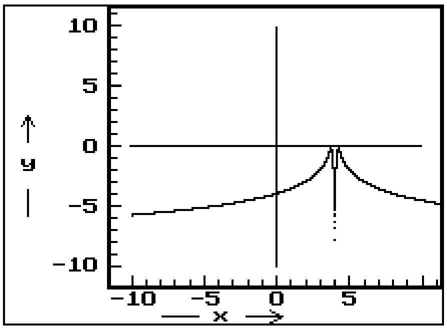
9.74 $D(f)=(-\infty;2)$, $H(f)=R$, $[-8;0]$, $[0;\log 2-1]$



9.75 $D(f)=R-\langle -1;1\rangle$, $H(f)=R$



9.76 $D(f)=R-\{4\}$, $H(f)=(-\infty;0\rangle$



9.77 $a\in(-1;0)$

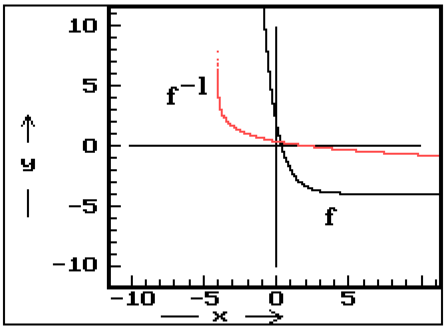
9.78 $a\in(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$

9.79 $a\in(-2;-1{,}5)$

9.80 a) $a\in(-0{,}5;0{,}5)-\{0\}$, b) $a\in R-\langle -0{,}5;0{,}5\rangle$

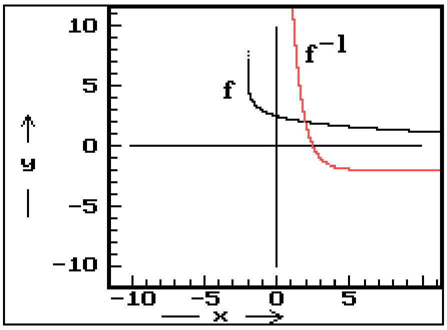
9.81 $D(f)=H\left(f^{-1}\right)=R$, $H(f)=D\left(f^{-1}\right)=(-4;\infty)$

$f^{-1}: y=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{2}+2\right)+1$



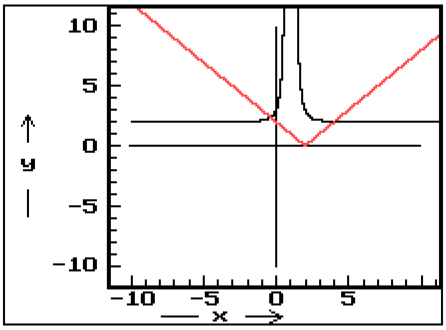
9.82 $D(f)=H\left(f^{-1}\right)=(-2;\infty)$, $H(f)=D\left(f^{-1}\right)=R$

$f^{-1}: y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-3}-2$

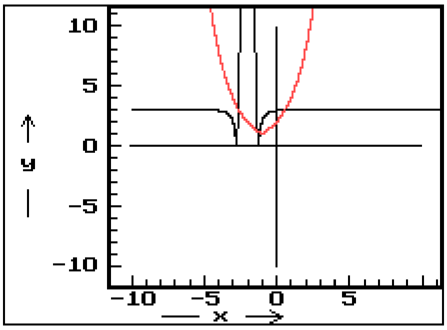


9.83 $g^{-1}: y=\log_2\dfrac{1+x}{1-x}$, $D(g)=R$, $D\left(g^{-1}\right)=(-1;1)$

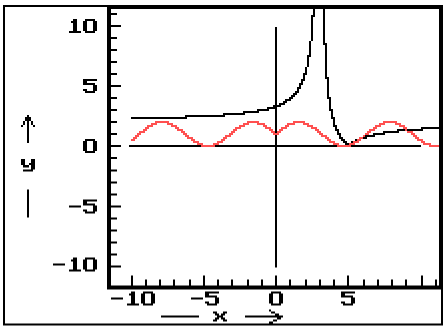
9.84 $O=R$, $D=R-\{1\}$, 2 řešení



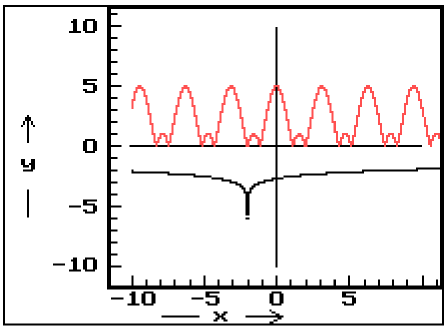
9.85 $O=R$, $D=R-\{-2\}$, 4 řešení



9.86 $O=R$, $D=R-\{3\}$, nekonečně mnoho řešení



9.87 $O=R$, $D=R-\{-2\}$, konečný počet řešení



9.88 $x\in(3;\infty)$

9.89 a) $x\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right)$, b) $x\in\left(\dfrac{5}{6};\infty\right)$

9.90 a) $D(f)=(-\infty;5)$, b) $D(g)=(-\infty;-1\rangle$, c) $D(h)=(1;\infty)$, d) $D(j)=\langle 10;\infty)$

9.91 $D(f)=\{2k\pi;\, k\in Z\}$

9.92 $D(f)=(2k\pi;\, 2k\pi+\pi);\, k\in Z$

9.93 $D(f)=\emptyset$

9.94 $D(f)=(0{,}4;\infty)$

9.95 $D(f)=\langle -2;5\rangle$

9.96 $D(f)=\langle -1;2)$

9.97 $x\in R-(-11;11)$

9.98 $x\in\langle -9;9\rangle$

10. Exponenciální a logaritmické rovnice a nerovnice

10.1 $O=D=R$, $P=\{-2;-4\}$

10.2 $O=D=R$, $P=\{-1;4\}$

10.3 $O=D=R$, $P=\{3\}$

10.4 $O=D=R$, $P=\{0\}$

10.5 $O=D=R$, $P=\{2\}$

10.6 $O=D=R$, $P=\{0{,}5\}$

10.7 $O=D=R$, $P=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

10.8 $O=D=R$, $P=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

10.9 $O=D=R$, $P=\{0;3\}$

10.10 $O=D=R$, $P=\{3\}$

10.11 $O=D=R$, $P=\{-5;2\}$

10.12 $O=D=R$, $P=\left\{1;-\frac{5}{3}\right\}$

10.13 $O=D=R$, $P=\{1;2\}$

10.14 $O=D=R$, $P=\{0;2\}$

10.15 $O=D=R$, $P=\{1;2\}$

10.16 $O=D=R$, $P=\{0;1\}$

10.17 $O=D=R$, $P=\{0\}$

10.18 $O=D=R$, $P=\{3;9\}$

10.19 $O=R$, $D=R-\{-3{,}5\}$, $P=\{-2\}$

10.20 $O=D=R$, $P=\{5\}$

10.21 $O=D=R$, $P=\{1{,}5\}$

10.22 $O=R$, $D=R-\{0\}$, $P=\{2;4\}$

10.23 $O=R$, $D=R-\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $P=\{1{,}5\}$

10.24 $O=R$, $D=\left\langle\frac{\log_5 4}{3};\infty\right)$, $P=\{1\}$

10.25 $O=D=R$, $P=\{0;4\}$

10.26 $O=D=R$, $P=\{0;3\}$

10.27 $O=D=R\times R$, $P=\{[2;1{,}5]\}$

10.28 $O=D=R\times R$, $P=\{[1;2],[2;1]\}$

10.29 $O=D=R\times R$, $P=\left\{\left[\frac{3}{14};\frac{1}{14}\right]\right\}$

10.30 $O=R$, $D=R^+$, $P=\{\sqrt[3]{3}\}$

10.31 $O=D=R$, $P=(-\infty;-1\rangle$

10.32 $O=D=R$, $P=(-\infty;5)$

10.33 $O=R$, $D=\left(\frac{3+\sqrt{41}}{4};\infty\right)$, $P=\{4\}$

10.34 $O=R$, $D=(0;1)\cup(1;\infty)$, $P=\{2\}$

10.35 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\{100\}$

10.36 $O=R$, $D=\left(\sqrt{3};\infty\right)$, $P=\{2\}$

10.37 $O=R$, $D=(9;\infty)$, $P=\{13\}$

10.38 $O=R$, $D=(0;1)\cup(1;\infty)$, $P=\left\{0{,}1;\sqrt{10};100\right\}$

10.39 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\emptyset$

10.40 $O=R$, $D=(-2;-1)\cup(-1;\infty)$, $P=\emptyset$

10.41 $O=R$, $D=(0;1)\cup(1;\infty)$, $P=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

10.42 $O=D=R$, $P=\{6\}$

10.43 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\{0{,}1;1000\}$

10.44 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\{0{,}01;10\}$

10.45 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\{0{,}01;100\}$

10.46 a) $O=R$, $D=R-\langle -2;0\rangle$, $P=\{-4;2\}$, b) $O=R$, $D=R-\langle -2;0\rangle$, $P=(-4;-2)\cup(0;2)$

10.47 $O=R$, $D=R-\{-2;1\}$, $P=(-\infty;-2)\cup(0;1)$

10.48 $O=R$, $D=(3;5)\cup(5;\infty)$, $P=(5;\infty)$

10.49 $O=R$, $D=(0;1)\cup(1;\infty)$, $P=\left\{10;10^{1-\sqrt{2}}\right\}$

10.50 $D(f)=R-\langle -0{,}4;2\rangle$

10.51 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\{0{,}1;1;10\}$

10.52 $O=R$, $D=(0;\infty)$, $P=\left\{1;10^{\frac{9}{10}}\right\}$

10.53 $O=D=R$, $P=\{\log_3 2\}$

10.54 $O=D=R$, $P=\left\{\log_{\frac{2}{5}}\frac{15}{2}\right\}$

10.55 $O=D=R$, $P=\left\{\frac{\ln 5}{2\ln 2}\right\}$

11. Reichlův pel-mel aneb něco navíc pro chytré hlavy

11.1 $O=D=R$, $P=\left(\frac{-3\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi\right); k\in Z$

11.2 $O=D=R$, $P=\{0;2\}$

11.3 $O=R$, $D=\langle -0{,}5;0\rangle\cup\langle 2;2{,}5\rangle\cup\langle -0{,}5+2k;0{,}5+2k\rangle; k\in Z, k\geq 2$, $P=\emptyset$

11.4 $O=R$, $D=\langle 1{,}5;\infty)$, $P=\emptyset$

11.5 $O = D = R$, $P = \left\{ \frac{3}{2}\pi + 3k\pi;\ k \in Z \right\}$

11.6 $O = D = R$, $P = \{0{,}25\}$

11.7 $O = D = R$, $P = \{0{,}5\}$

11.8 $c \in \langle 3;\ 6 \rangle$

11.9 a) $f: y = 0$, $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, b) $g: y = x$, $D(g) = (0;\ \infty)$

11.10 a) $f: y = x$, $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, b) $g: y = |x|$, $D(g) = R - \{0;\ \pm 1\}$

11.11 a) $f: y = 2$, $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, b) $g: y = 0{,}5$, $D(g) = (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, c) $h: y = 2$, $D(f) = (0;\ \infty) - \{1\}$

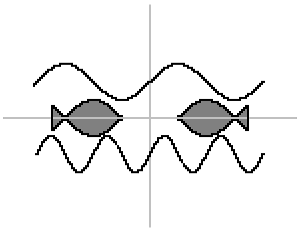
11.12 a) $f: y = \big||x| - 1\big|$, $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ \infty)$, b) $g: y = \big||x| - 1\big|$, $D(g) = R - \{0;\ \pm 1\}$

11.13 $O = R$, $D = (-1;\ 2)$, $P = (0;\ 2)$

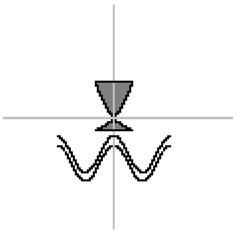
11.14 $O = R$, $D = (0;\ \infty)$, $P = \left(0;\ 10^{-\sqrt{7}}\right) \cup \left(10^{\sqrt{7}};\ \infty\right)$

11.15 $O = R$, $D = (-2;\ \infty) - \{-1;\ 0;\ 1\}$, $P = (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (2;\ \infty)$

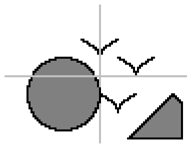
11.16 $O = D = R$, $P = \langle -3;\ -\log_2 6) \cup (-1;\ \infty)$



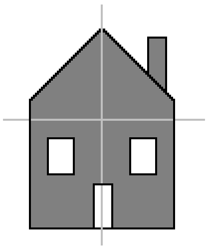
11.17



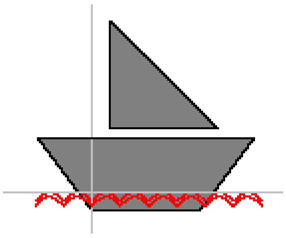
11.18



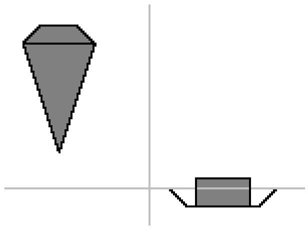
11.19



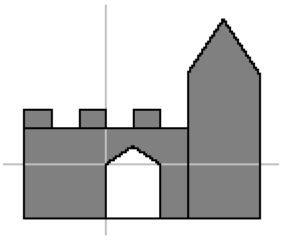
11.20



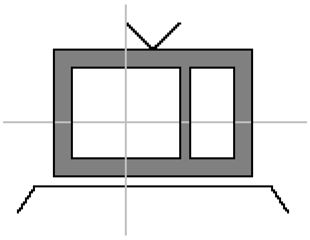
11.21



11.22



11.23



11.24

Zdroje a inspirace příkladů:

[1] I. Bušek: Řešené maturitní příklady z matematiky, SPN Praha, 1985

[2] P. Benda a kolektiv: Sbírka maturitních příkladů - matematika, SPN, Praha 1983

[3] Š. Novoveský, K. Križalkovič, I. Lečko: Zábavná matematika, SPN Praha, 1974

[4] S. Kowal: Matematika pro volné chvíle, SNTL, Praha 1985

[5] V. Slavík, O. Pokorná: Elementární matematika (minimální požadavky pro studium na ČZU), Praha 1995

[6] E. Calda: Rovnice ve škole neřešené, Prometheus Praha, 1995

[7] příklady z přijímacích zkoušek na vysoké školy technického směru z minulých let

[8] přednášky pro obor UVVP MF na MFF UK

[9] učitelé SPŠST (hlavně matematikové), přilehlých a spřátelených škol

[10] život a fantazie Jaroslava Reichla

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.