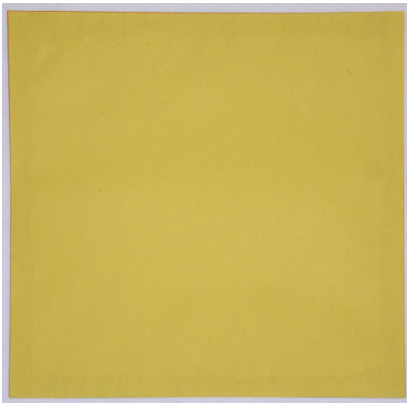


Hodnoty goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku

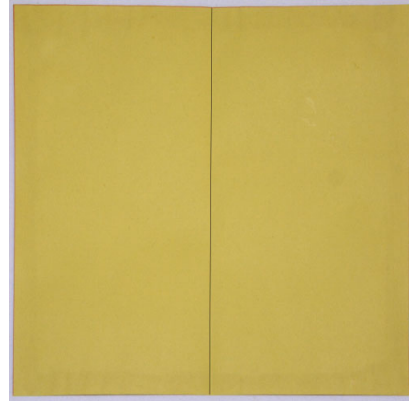
Pomocí čtvercového papíru lze pouhým skládáním získat poměrně jednoduchou pomůcku pro zjednodušení zapamatování si hodnot funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens v pravoúhlém trojúhelníku pro úhly 30° a 60° (na základě první skládačky z papíru) a 45° (na základě druhé skládačky).

Začneme s pomůckou pro úhly 30° a 60° . Papír, který byl použit pro nafotografování níže uvedených obrázků, byl slepen ve dvou různobarevných listů papíru, aby byl postup skládání lépe vidět. Při vlastním skládání je možné použít libovolný čtvercový papír.

Čtvercový papír (viz obr. 1) přeložíme na polovinu a zase zpět rozevřeme. Získaný sklad (který je na obr. 2 vyznačen černou čarou) je pouze pomocný, ale hraje při výrobě celé pomůcky zásadní roli.

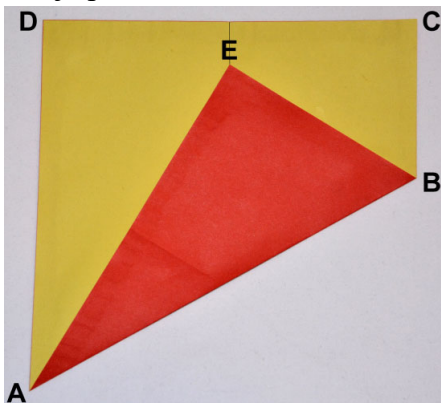


obr. 1



obr. 2

Vlastní skládání začneme přeložením jednoho z vrcholů čtvercového papíru tak, aby se dostal na připravený sklad z minulého kroku skládání. Nově vytvářený sklad přitom vychází ze sousedního vrcholu čtverce (viz obr. 3). Další popsany sklad je opět pomocný - dokážeme tím velikost úhlu při vrcholu A v pravoúhlém trojúhelníku AEB . Tento sklad spočívá v přeložení protilehlého vrcholu k vrcholu, se kterým jsme pracovali v minulém kroku, na vytvořenou přeponu AB trojúhelníka AEB . Výsledek skládání je zobrazen na obr. 4. Z tohoto obrázku je patrné že, velikost úhlu EAD je shodná s velikostí úhlu EAB .



obr. 3

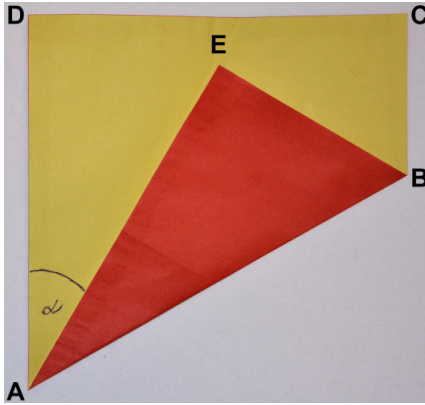


obr. 4

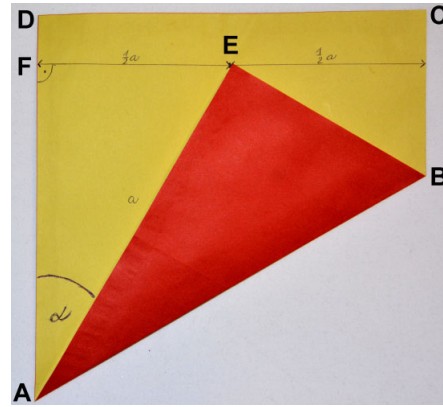
Po zpětném otevření právě provedeného skladu tedy můžeme tvrdit, že hodnota úhlu $\alpha = \sphericalangle EAD$ je rovna 30° (viz obr. 5). Nyní si na papír vyznačíme polohu bodu E a pomocí pravítka sestrojíme kolmici k prvnímu skladu (viz obr. 2). Vzhledem k tomu, že uvedený sklad půlí právě sestrojenou kolmici, platí $|EF| = \frac{1}{2}a$, kde a je délka strany původního čtverce

(viz obr. 6). Dále je zřejmé, že hodnota úhlu AEF v pravoúhlém trojúhelníku AFE je rovna 60° . Délka strany AE je přitom rovna a , tj. délce strany původního čtverce.

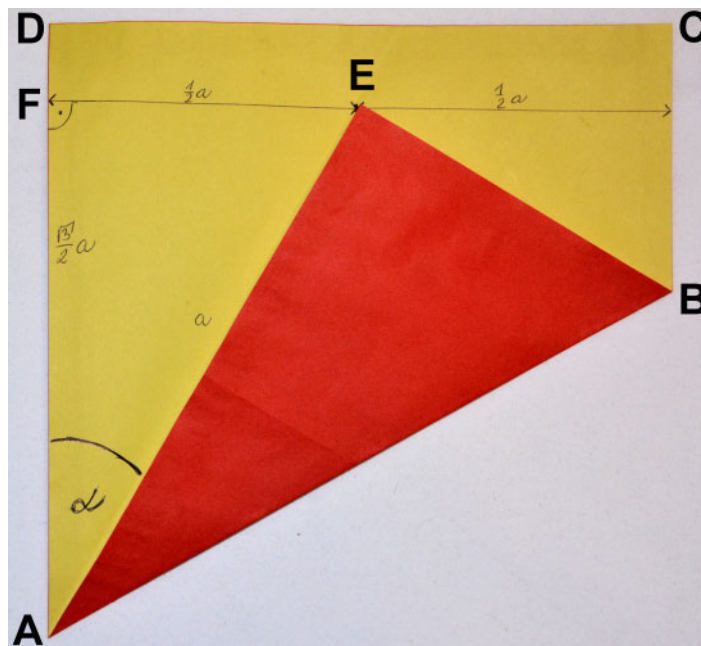
Délku strany AF pravoúhlého trojúhelníka AFE můžeme vyjádřit pomocí Pythagorovy věty: $|AF| = \sqrt{|AE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Nyní je pravoúhlý trojúhelník AFE připraven k odečítání hodnot goniometrických funkcí úhlů 30° a 60° . Trojúhelník AFE s jeho dopočtenými charakteristikami je zobrazen na obr. 7.



obr. 5



obr. 6



obr. 7

Na základě vlastností trojúhelníka AFE zobrazeného na obr. 7 tedy můžeme psát:

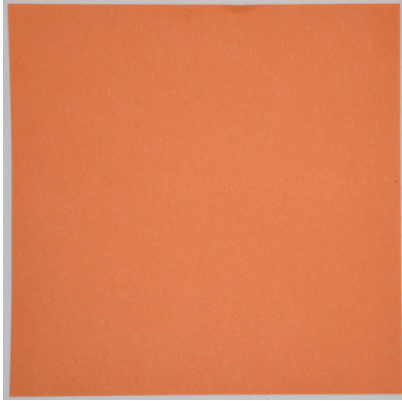
$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \frac{a}{a} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1)$$

Analogicky můžeme psát i vztahy pro goniometrické funkce tangens a kotangens:

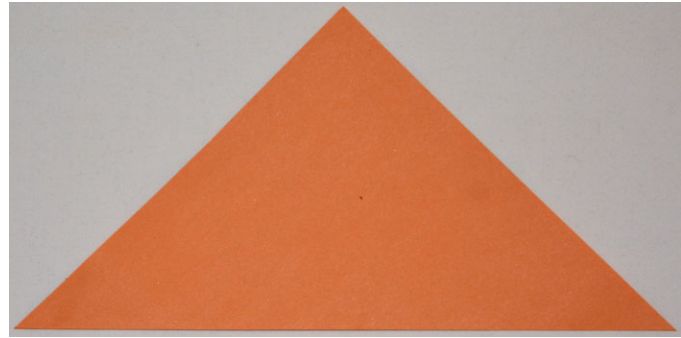
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3} \quad (2)$$

Pro vytvoření pomůcky pro zapamatování si hodnot goniometrických funkcí úhlu 45° použijeme papír ve tvaru čtverce (viz obr. 8). Ten přehneme na polovinu podél jedné

z úhlopříček (viz obr. 9). Dále označíme strany původního čtverce symbolem a , vyznačíme hodnotu jednoho ze dvou shodných úhlů u přepony pravoúhlého trojúhelníka KLM a pomocí Pythagorovy věty dopočítáme délku přepony KL v daném pravoúhlém trojúhelníku (tj. délku úhlopříčky původního čtverce): $|KL| = \sqrt{|KM|^2 + |LM|^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Toto označení je zobrazeno na obr. 10.



obr. 8



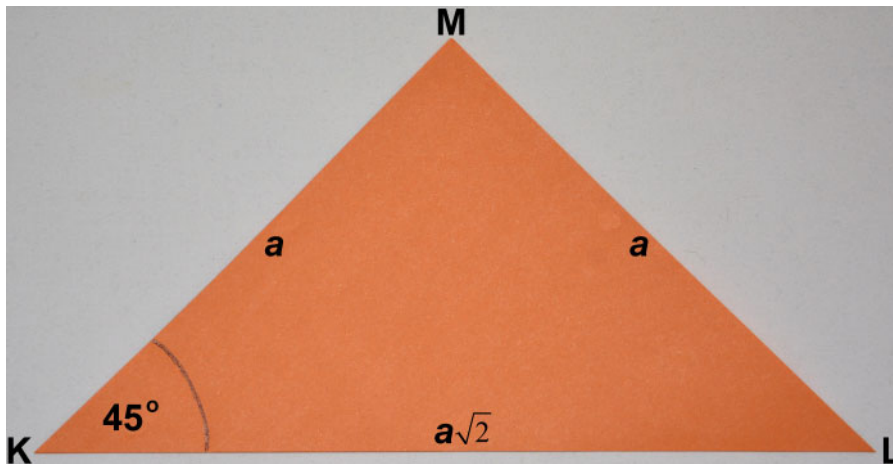
obr. 9

Nyní již můžeme pro hodnoty goniometrických funkcí sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku KLM podle obr. 10 psát:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

Analogicky můžeme pro hodnoty funkcí tangens a kotangens psát:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1. \quad (4)$$



obr. 10