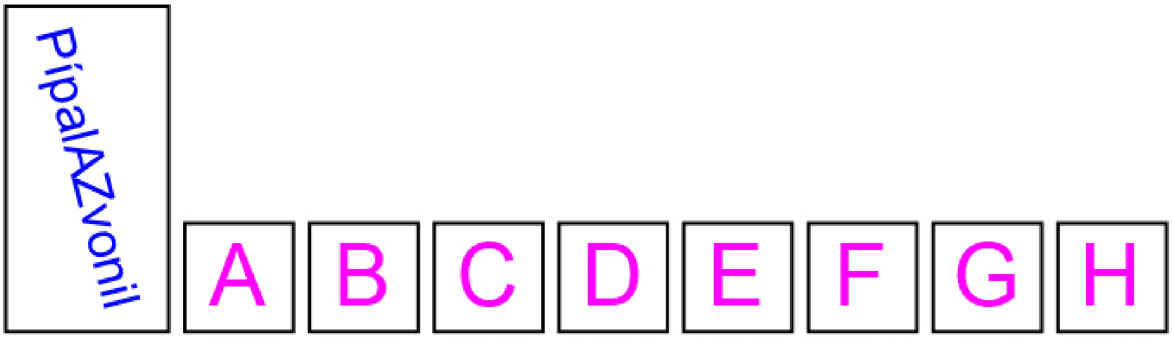
7. ***<u>ZÁKAZNÍCI VE FRONTĚ</u>***

… aneb kolika způsoby v ní mohou zákazníci stát!

Představme si, že před prodejnou mobilních telefonů jsou označená místa, na kterých mohou zákazníci stát (viz písmena A až H zobrazená na obr. 14; vzhledem k tomu, že žáků stojících před obchodem je osm, víc označených míst není nutné brát v úvahu). Na tato místa si mohou stoupnout různí žáci. To je naznačeno na obr. 14 jmény umístněnými pod označenými místy; pro ilustraci je uvedeno několik možností obsazení míst žáky.



Jarda	Vojta	Martin	Luděk	Jarmila	Božidara	Kamil	Rudolf
Jarda	Vojta	Martin	Luděk	Jarmila	Božidara	Rudolf	Kamil
Jarda	Vojta	Martin	Luděk	Jarmila	Kamil	Božidara	Rudolf
Vojta	Rudolf	Kamil	Božidara	Jarmila	Luděk	Martin	Jarda
Luděk	Rudolf	Kamil	Božidara	Jarmila	Martin	Vojta	Jarda
Vojta	Božidara	Martin	Jarda	Rudolf	Kamil	Jarmila	Luděk
Rudolf	Kamil	Božidara	Jarmila	Luděk	Martin	Vojta	Jarda

obr. 14

Mají-li stát žáci ve frontě bez omezení, pak na místě A může stát libovolný z osmi žáků, na místě B libovolný ze sedmi zbývajících žáků, na místě C libovolný ze šesti zbývajících žáků, … až na místě G libovolný ze dvou zbývajících žáků a na místě H už může stát poslední zbývající žák. Každé umístění konkrétního žáka lze kombinovat s libovolným umístěním jiného žáka. Proto je celkový počet možností v tomto případě roven: $m_1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$.

Výsledek naznačeného součinu není u podobných úloh nutné uvádět - výrazně cennější je uvést postup (tj. v tomto případě naznačený součin), jakým celkový počet získáme. Konkrétní číselný výsledek může sloužit pouze k ilustraci toho, jak je výsledné číslo velké.

Má-li stát Jarda u dveří prodejny, může být místo A obsazeno právě jím. Nikdo jiný na něj nemůže vstoupit. Proto na místě A může stát pouze jediný žák. Na místě B ale může stát libovolný se sedmi zbývajících, na místě C libovolný ze šesti zbývajících žáků, ... Celkový počet způsobů rozestavění do fronty tedy je: $m_2 = 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Má-li stát Jarda u dveří prodejny a Vojta má být poslední, pak jsou jednoznačně obsazena místa A a H: na každém z nich může stát pouze jeden konkrétní žák. Na místě B pak může stát libovolný ze zbývajících šesti zatím neumístěných žáků, na místě C libovolný ze zbývajících pěti žáků, …, na místě F může stát libovolný ze dvou neumístěných žáků a na místě G poslední zbývající žák. Celkem tedy je možností: $m_3 = 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 720$.

Kdyby měli Martin a Luděk pevná pořadí, kde kdo z nich stojí (tj. pro každého z nich by bylo určeno jedno z míst A a H), byla by úloha stejná jako minulá. Tím, že máme možnost místo A obsadit dvěma žáky (Marinem nebo Luďkem), bude počet možností dvojnásobný ve srovnání s počtem možností z minulé úlohy: $m_4 = 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1440$.

Mají-li stát dvojčata vedle sebe, pak pro naše úvahy bude nejjednodušší, pokud se chytí za ruce. Tím máme k rozmístění ne osm žáků, ale sedm „skupinek“ (jednu dvoučlennou a šest jednočlenných). Úvaha vedoucí k nalezení počtu možností, jak se postavit do fronty, je stejná jako v první úloze. Navíc je ale nutné si uvědomit, že dvojčata mohou stát vedle sebe ve dvou různých pořadí (při prohlížení řady od pozice A může stát nejdříve Kamil, ale - při jinak stejném obsazení zbývajících pozic - může stát klidně první i Rudolf). Proto celkový počet možností je: $m_5 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10080$.

Vzhledem k tomu, že máme vypočítaný celkový počet možností postavení se do fronty bez omezení a počet možností, v nichž stojí dvojčata vedle sebe, tak celkový počet možností, kdy dvojčata nestojí vedle sebe, je dán rozdílem obou výše vypočtených způsobů. V tomto případě tedy celkový počet možností je: $m_6 = m_1 - m_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (8-2) = 30240$.

Pokud si Kamil sundá kšiltovku, nerozlišíme mezi Kamilem a Rudolfem. Tedy pořadí Kamil - Rudolf a Rudolf - Kamil budou stejná. S využitím vypočteného počtu možností m_1 tak získáme celkový počet možností v tomto případě: $m_7 = \frac{m_1}{2} = 20160$.

Má-li stát každé z dvojčat na jednom konci fronty, jedná se o úlohu analogickou úloze 3. Dvojčata pevně umístíme na konce fronty a mezi nimi může stát v libovolném pořadí 6 zbývajících žáků. Tím, že dvojčata od sebe nepoznáme, dostáváme pro celkový počet možností: $m_8 = 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 720$.

Násobit dvěma, abychom případně vyměnili toho, kdo bude stát u dveří, s tím, kdo bude poslední ve frontě, nemá smysl; Kamila a Rudolfa v tomto případě od sebe neodlišíme.

Mají-li stát dvojčata, která od sebe v tomto případě neodlišíme, vedle sebe, dostáváme úlohu podobnou jako je úloha 5. Jen v tomto případě nebudeme nalezený počet možností násobit dvěma (Kamila a Rudolfa od sebe nyní neodlišíme). Proto celkový počet možností je: $m_9 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Mají-li stát Jarda, Vojta a Martin vedle sebe, necháme kluky, ať se chytnou za ruce. Na jednotlivé pozice A až H budeme tedy umísťovat šest „skupinek“ žáků (jednu tříčlennou a pět jednočlenných). Navíc ale musíme zohlednit, že Jarda, Vojta a Martin se mohou vystřídat celkem $3 \cdot 2 \cdot 1$ způsoby, jak se navzájem chytí za ruce; celkový počet možností tedy vzroste 6krát. A dále nerozlišíme Kamila a Rudolfa, čímž se celkový počet možností sníží 2krát. Proto v tomto případě dostáváme celkem možností: $m_{10} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 2160$.

Zadanou úlohu by bylo možné řešit též s využitím pojmů z kombinatoriky (kombinatorické pravidlo součinu, kombinatorické pravidlo součtu, variace, permutace, …), ale tyto pojmy je pro účely této příležitosti zbytečné zavádět. Ten, kdo je zatím nezná, se s nimi v rámci studia matematiky seznámí.