

4. VÁLCE Z PAPIRU FORMÁTU A4

Obstojí intuice před matematickým (nebo fyzikálním) důkazem?

Předpokládejme, že rozměry papíru formátu A4 jsou: délka a a šířka b .

Při matematickém řešení si uvědomíme, že objem válce je dán vztahem

$$V = \pi r^2 v, \quad (1)$$

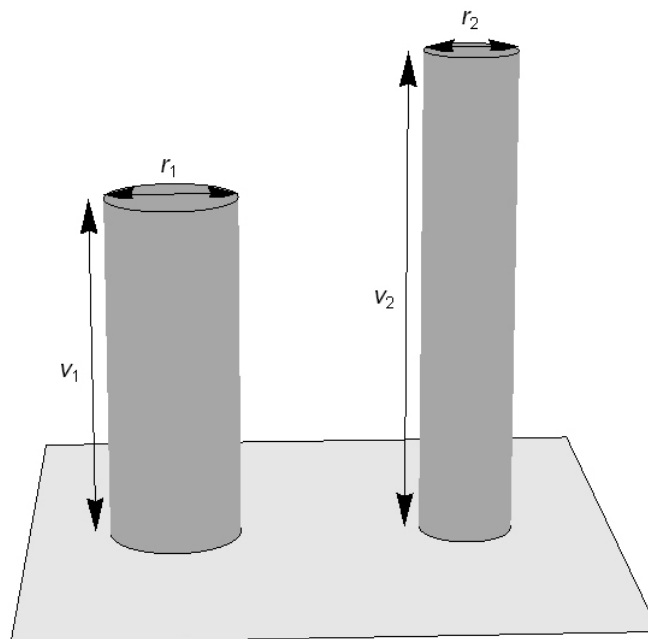
kde r je poloměr podstavy válce a v jeho výška.

Označíme-li parametry nižšího válce r_1 a v_1 a parametry vyššího válce symboly r_2 a v_2 (viz obr. 7), můžeme se shodě se vztahem (1) pro objem nižšího válce psát

$$V_1 = \pi r_1^2 v_1, \quad (2)$$

a pro objem vyššího válce pak můžeme psát

$$V_2 = \pi r_2^2 v_2. \quad (3)$$



obr. 7

Poloměr nižšího válce je dán vztahem $r_1 = \frac{a}{2\pi}$ a jeho výška je $v_1 = b$. Objem tohoto válce je tedy podle vztahu (2) roven

$$V_1 = \pi \left(\frac{a}{2\pi} \right)^2 b = \frac{a^2 b}{4\pi}. \quad (4)$$

Poloměr vyššího válce je dán vztahem $r_2 = \frac{b}{2\pi}$ a jeho výška je $v_2 = a$. Objem tohoto válce je proto podle vztahu (3) roven

$$V_2 = \pi \left(\frac{b}{2\pi} \right)^2 a = \frac{a \cdot b^2}{4\pi}. \quad (5)$$

Porovnáním vztahů (4) a (5) za předpokladu, že platí $a > b$, dostáváme $V_1 > V_2$. Nižší válec má tedy větší objem než válec vyšší. Lze si též uvědomit, že pro délky stran a a b použitého papíru formátu A4 platí

$$a = b \cdot \sqrt{2}. \quad (6)$$

Potom lze vztahy (4) a (5) přepsat ve tvarech

$$V_1 = \frac{2 \cdot b^3}{4\pi}. \quad (7)$$

a

$$V_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot b^3}{4\pi}. \quad (8)$$

Závěr $V_1 > V_2$ plyne pochopitelně i ze vzájemného porovnání vztahů (7) a (8). Přitom poměr objemů obou válců tedy je:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{\sqrt{2} \cdot b^3}{4\pi}}{\frac{2 \cdot b^3}{4\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (9)$$

resp.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{2 \cdot b^3}{4\pi}}{\frac{\sqrt{2} \cdot b^3}{4\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \quad (10)$$

Porovnat objemy válců lze i experimentálně. Modely plášťů obou válců postavíme na vodorovnou podložku (viz obr. 8) a nasypeme dovnitř nějaký sypký materiál; v tomto případě bylo použito zrní pro dokrmování ptáků.

Plášť vyššího válce naplníme zrním (viz obr. 9). Pak vezmeme plášť širšího válce a nasuneme jej kolem vyššího válce (viz obr. 10). Pak plášť vyššího válce opatrně vytáhneme tak, aby se sypký materiál přesunul do pláště nižšího válce (viz obr. 11).

I experimentálně jsme získali stejný závěr: nižší válec má větší objem, protože v horní části jeho pláště zůstalo po přemístění zrní z vyššího válce volné místo.



obr. 8



obr. 9



obr. 10



obr. 11