3. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

... aneb jestliže platí A, kolik je B?

Zadanou rovnost $\frac{1}{r^2+1}+\frac{1}{r^2-1}=2$ postupně upravíme.

Levou stranu rovnosti převedeme na společného jmenovatele a upravíme:

$$\frac{1}{r^2+1}+\frac{1}{r^2-1}=\frac{r^2-1+r^2+1}{\left(r^2+1\right)\left(r^2-1\right)}=\frac{2r^2}{r^4-1}.$$

Nyní se vrátíme k původní rovnosti a zapíšeme ji ve tvaru $\frac{2r^2}{r^4-1}=2$, který dále upravíme. Vynásobením jmenovatelem a vydělením číslem dva dostaneme rovnost $r^2=r^4-1$, z níž vyjádříme $r^4=r^2+1$.

Nyní upravíme druhý výraz. Začneme přepsáním jmenovatelů zlomků v jiném ekvivalentním tvaru, který umožní snadnější násobení (pokud tuto úpravu neuděláme, nic se nestane, pouze násobení výrazů ve jmenovateli bude technicky složitější). Poté převedeme oba zlomky na společného jmenovatele a upravíme:

$$\left(\frac{1}{r^2+1+r}+\frac{1}{r^2+1-r}\right)^{2022}=\left(\frac{r^2+1-r+r^2+1+r}{\left(r^2+1+r\right)\left(r^2+1-r\right)}\right)^{2022}=\left(\frac{2r^2+2}{\left(r^2+1\right)^2-r^2}\right)^{2022}=$$

$$=\left(\frac{2r^2+2}{r^4+2r^2+1-r^2}\right)^{2022}=\left(\frac{2\left(r^2+1\right)}{r^4+r^2+1}\right)^{2022}.$$

S využitím výše upravené první rovnosti dosadíme a provedeme finální úpravy:

$$\left(\frac{2\left(r^2+1\right)}{r^4+r^2+1}\right)^{2022}=\left(\frac{2\left(r^2+1\right)}{r^2+1+r^2+1}\right)^{2022}=\left(\frac{2\left(r^2+1\right)}{2\left(r^2+1\right)}\right)^{2022}=1^{2022}=1.$$

Všechny provedené úpravy jsou ekvivalentní pro $r\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.