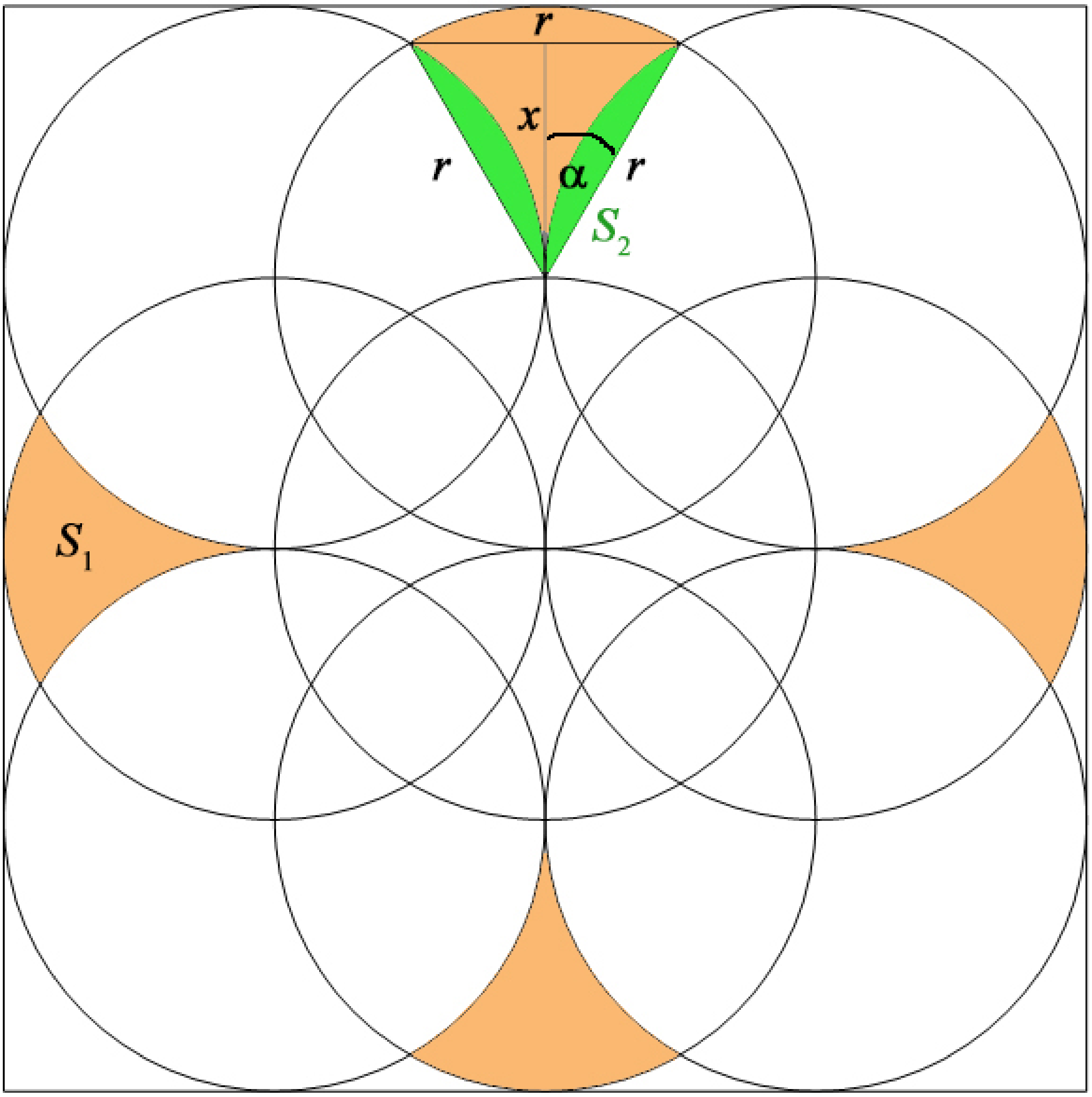
5. OBSAH PLOCHY

Hledaná plocha S je složena ze čtyř stejných ploch S_1. Pro výpočet plochy S_1 určíme nejdříve obsah kruhové výseče S_V. Vzhledem k tomu, že plocha S_1 je větší než plocha výseče S_V o dvě stejné plochy S_2, je trojúhelník zobrazený na obr. 8 související s uvažovanou kruhovou výsečí rovnostranný. Plocha S_2 je přitom stejná jako plocha kruhové úseče odpovídající dané kruhové výseči. Na základě faktu, že popsaný trojúhelník je rovnostranný, je $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.



obr. 8

Pro obsah kruhové výseče můžeme psát: $S_V = \frac{2\alpha}{2} r^2 = \frac{\pi}{6} r^2$.

Pro obsah plochy S_2 můžeme psát: $S_2 = S_V - S_t$, kde S_t je plocha rovnostranného uvažovaného trojúhelníka. Pro jeho výšku x platí: $x = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = r\frac{\sqrt{3}}{2}$. Provedené částečné odmocnění je v pořádku, protože r označuje poloměr kruhu, tedy r je kladné číslo.

Můžeme tedy psát: $S_2 = \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot x = \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{12} \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right)$.

Pro plochu S_1 nyní dostaneme: $S_1 = S_V - 2S_2 = \frac{\pi}{6} r^2 - 2 \cdot \frac{r^2}{12} \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right) = \frac{r^2}{6} \left(3\sqrt{3} - \pi \right)$.

Pro hledanou plochu S tak dostáváme: $S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{r^2}{6} \left(3\sqrt{3} - \pi \right) = \frac{2r^2}{3} \left(3\sqrt{3} - \pi \right)$.

Obvod vyznačených útvarů je dán délkou části kružnice ohraničující kruhovou výseč odpovídající úhlu 2α. Ve shodě s úvodním vysvětlením a obr. 8 je třeba tuto délku započítat třikrát, abychom získali obvod jednoho z vyznačených útvarů. Celý obvod proto bude roven: $o = 4 \cdot 3 \cdot 2\alpha \cdot r = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot r$.