3. OBJEM A POVRCH TĚLESA

Začneme výpočtem objemu uvažovaného tělesa.

Základem je krychle, jejíž objem je (při označení délky její hrany *a*) roven $V_0 = a^3$.

Objem každé krychle vyříznuté z rohu původní krychle je: $V_1 = \left(\frac{a}{4}\right)^3 = \frac{a^3}{64}$.

Pokud má uvnitř krychle vzniknout otvor, kterými by bylo možné popsané hranoly postupně protáhnout, musíme začít odstraňovat nejdříve největší z hranolů.

Objem tohoto hranolu je: $V_\mathrm{H} = \left(\frac{3a}{10}\right)^2 \cdot a = \frac{9a^3}{100}$.

Odstraněním druhého hranolu odstraníme objem $V_2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(a - \frac{3a}{10}\right) = \frac{a^2}{25} \cdot \frac{7a}{10} = \frac{7a^3}{250}$.

Odstraněním třetího hranolu odstraníme objem $V_3 = 2 \cdot \left(\frac{a}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\left(a - \frac{3a}{10}\right) = \frac{a^2}{100} \cdot \frac{7a}{10} = \frac{7a^3}{1000}$.

Pro objem vzniklého tělesa tak platí: $V = V_0 - 8V_1 - V_\mathrm{H} - V_2 - V_3$. Po dosazení tak dostaneme $V = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{64} - \frac{9a^3}{100} - \frac{7a^3}{250} - \frac{7a^3}{1000} = \frac{3}{4}a^3$.

Kdybychom začali odstraňovat jako první jiný z uvedených hranolů, uvnitř otvoru v krychli by se objevily drobné zbytky původní krychle.

Povrch základní krychle je roven $S_0 = 6a^2$.

Odstraněním krychlí z vrcholů původní krychle se plocha povrchu nezmění.

Do výsledné plochy povrchu navíc přibude vnitřní plocha otvorů udělaných do krychle.

Vyříznutím prvního hranolu vytvoříme otvor s plochou $S_1 = 4 \cdot \frac{3a}{10} \cdot a = \frac{6a^2}{5}$. Musíme ale odečíst plochu, která připadá na otvory v plášti tohoto odstraněného hranu vzniklé odstraňováním dalších hranolů. Tato plocha je: $S_\mathrm{x} = 2 \cdot \left(\left(\frac{a}{5}\right)^2 + \left(\frac{a}{10}\right)^2\right) = 2 \cdot \left(\frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{100}\right) = \frac{a^2}{10}$.

Následným vyříznutím druhého hranolu vytvoříme dva otvory s celkovou plochou $S_2 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(a - \frac{3a}{10}\right) = \frac{4a}{5} \cdot \frac{7a}{10} = \frac{14a^2}{25}$.

Odstraněním třetího hranolu přidáme navíc plochu $S_3 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{a}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(a - \frac{3a}{10}\right) = \frac{2a}{5} \cdot \frac{7a}{10} = \frac{7a^2}{25}$.

Z každé stěny původní krychle navíc musíme odečíst čtverec, který je podstavou odstraňovaného hranolu; plocha těchto čtverců je: $S_\mathrm{C} = 2\left(\left(\frac{a}{10}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^2 + \left(\frac{3a}{10}\right)^2\right) = 2\left(\frac{a^2}{100} + \frac{a^2}{25} + \frac{9a^2}{100}\right) = \frac{7a^2}{25}$.

Celkový povrch vzniklého tělesa tedy je: $S = S_0 + S_1 - S_\mathrm{x} + S_2 + S_3 - S_\mathrm{C}$. Po dosazení získáme: $S = 6a^2 + \frac{6a^2}{5} - \frac{a^2}{10} + \frac{14a^2}{25} + \frac{7a^2}{25} - \frac{7a^2}{25} = \frac{383}{50}a^2$.