1. RLC obvody

RLC obvody je název pro obvody, které jsou připojeny ke zdroji střídavého napětí a které jsou obecně tvořeny rezistorem o odporu R, ideální cívkou s indukčností L a ideálním kondenzátorem s kapacitou C. Bude-li obvod tvořen jen dvěmi z uvedených prvků, nebude se v matematických vztazích popisujících chování obvodu vyskytovat člen odpovídající prvku, který v obvodu není zařazen. Proto bude výklad proveden pro obecný případ RLC obvodu.

1.1 Sériový obvod

1.1.1 Fyzikální popis

Prvky obvodu (viz obr. 1) prochází stejný proud, ale napětí na jednotlivých prvcích se liší jak hodnotou tak i vzájemnou fází: napětí u_R na rezistoru má stejnou fázi jakou proud, napětí u_L na cívce předbíhá proud a napětí u_C na kondenzátoru se za proudem zpožďuje.

Stejná fáze proudu a napětí na rezistoru je dána vlastností rezistoru. Není žádný fyzikální důvod, proč by mělo k fázovému posunu docházet. Na cívce a kondenzátoru je ale situace jiná …

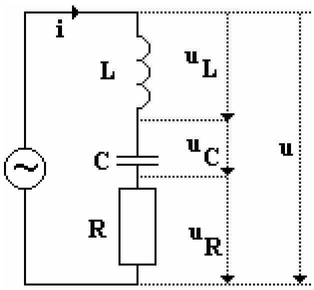
Zpoždění proudu vzhledem k napětí na cívce je způsobeno elektromagnetickou indukcí napětí v cívce, kterou prochází střídavý proud. Průchodem tohoto proudu vzniká v cívce časově proměnné (tj. nestacionární) magnetické pole, které je příčinou indukce napětí v cívce. Následkem toho začíná cívkou procházet proud, který má ovšem ve srovnání s proudem, který indukovaný proud svým magnetickým polem vyvolal, opačný směr. Cívka si totiž snaží udržet původní magnetické pole, které v ní bylo předtím, než začalo docházet ke změnám tohoto pole.

Právě uvedený poznatek je obsahem **Lenzova zákona:**

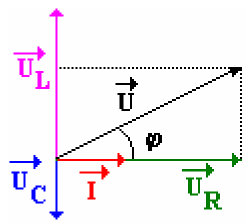
> INDUKOVANÝ ELEKTRICKÝ PROUD V UZAVŘENÉM OBVODU MÁ TAKOVÝ SMĚR, ŽE SVÝM MAGNETICKÝM POLEM PŮSOBÍ PROTI ZMĚNĚ MAGNETICKÉHO INDUKČNÍHO TOKU, KTERÁ JE JEHO PŘÍČINOU (RESP. KTERÁ TENTO PROUD VYVOLALA).

Předbíhání proudu vzhledem k napětí na kondenzátoru je způsobeno periodickým nabíjením a vybíjením kondenzátoru. Ten se v první čtvrtině periody střídavého napětí nabíjí. V okamžiku, kdy dosáhne napětí na kondenzátoru maximální hodnoty, prochází kondenzátorem nulový proud. Pak se kondenzátor začíná vybíjet, což znamená, že postupně klesá napětí mezi jeho deskami a roste proud, který jím protéká. Jakmile proud dosáhne svého maxima (v polovině periody), je kondenzátor vybit a začíná se nabíjet opačně, než byl nabit původně. Proud postupně klesá, až dosáhne opět nulové hodnoty. V ten okamžik je kondenzátor nabit na maximální napětí, které je ovšem opačné, než napětí, na které byl nabit na konci první čtvrtiny periody. V poslední čtvrtině periody se kondenzátor opět vybíjí a proud se zvětšuje. Právě popsaný děj se periodicky opakuje.

Vzhledem k právě popsaným fázovým rozdílům mezi proudem a napětím na cívce a kondenzátoru, nelze efektivní hodnotu výsledného napětí U v celém obvodu získat prostým aritmetickým součtem!



obr. 1



obr. 2

1.1.2 Matematický popis pomocí reálných čísel

S využitím fázorového diagramu (viz obr. 2), který získáme zakreslením fázorů napětí a proudu do kartézské soustavy souřadnic, je možné získat i výsledné napětí sériového zapojení rezistoru, cívky a kondezátoru. Proud a napětí na rezistoru nejsou fázově posunuté. Vzhledem k tomu, že v sériovém obvodu prochází všemi prvky stejný proud (v obvodu nejsou žádné uzly, takže se proud nemá kde dělit do různých větví obvodu), znázorňuje se tento proud na vodorovnou osu fázorového diagramu. Tento proud I je společný všem prvkům v RLC obvodu.

Na tutéž osu se nanáší i napětí na rezistoru. Důvod je prostý: na rezistoru nedochází k žádnému fázovému posuvu, takže i fázory napětí a proudu nejsou vůči sobě nijak pootočené.

Napětí na cívce se nanáší na kladnou poloosu y. To plně odpovídá fyzikálnímu popisu chování cívky v obvodu střídavého proudu (resp. střídavého napětí): napětí vrcholí (tj. dosahuje svého maxima) dříve než proud, který jí prochází (a který prochází celým obvodem). Je nutné si uvědomit, že fázorový diagram znázorňuje rozložení fázorů napětí a proudu jen v určitém časovém okamžiku: v čase $t = 0$ a pak vždy za periodu. Fakt, že se okamžité hodnoty proudu i napětí v obvodu mění, si lze představit tak, že fázorový diagram bude rotovat kolem svého počátku (kolem počátku kartézské soustavy) proti směru hodinových ručiček (tj.

vlevo). Pak je jasné, že napětí na cívce skutečně dosahuje svého maxima v čase $t = 0$, zatímco proud v čase $t = \frac{T}{4}$. A to je plně v souladu s fyzikálním popisem chování cívky připojené ke zdroji střídavého napětí.

Na základě podobných úvah je zřejmé, že napětí na kondenzátoru, které se za proudem opožďuje (resp. proud procházející kondenzátorem předbíhá napětí), je nutné zakreslit na zápornou poloosu *y*.

Vyjádřit vztah mezi efektivními hodnotami napětí U_R, U_L a U_C na jednotlivých prvcích obvodu znamená „vektorově“ (tj. se započtením příslušného fázového posunu) sečíst fázory odpovídající uvedeným napětím:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_\mathrm{R} + \mathbf{U}_\mathrm{L} + \mathbf{U}_\mathrm{C}.$$

<u>Poznámka:</u> *Fázory jsou v textu označené tučným písmem a na obrázcích (aby nemohlo dojít k záměně se skalárními veličinami) jsou označené jako vektory.*

Podle obr. 2 lze pro efektivní hodnotu *U* výsledného napětí s využitím Pythagorovy věty psát:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2.$$

Aby bylo možné vzájemně porovnat parametry jednotlivých prvků RLC obvodu, zavádí se i pro cívku a kondenzátor „zdánlivé“ odpory. „Zdánlivý“ odpor cívky se nazývá **induktance** (**induktivní reaktance**) X_L a platí pro ni vztah:

$$X_\mathrm{L} = \omega L = \frac{U_\mathrm{L}}{\mathrm{I}}.$$

„Zdánlivý“ odpor kondenzátoru se nazývá **kapacitance** (**kapacitní reaktance**) X_C a je definována vztahem:

$$X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C} = \frac{U_\mathrm{C}}{\mathrm{I}}.$$

V obou uvedených vztazích je $\omega = 2\pi f$, kde *f* je frekvence střídavého napětí resp. proudu, a nazývá se úhlová frekvence. Pro jednotky uvedených veličin platí: $[R] = [X_\mathrm{L}] = [X_\mathrm{C}] = \Omega$.

S využitím těchto vztahů lze vztah pro výsledné napětí RLC obvodu dále rozepsat a poté upravit:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$$

$$U^2 = (RI)^2 + (X_L I - X_C I)^2$$

$$U^2 = R^2 I^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

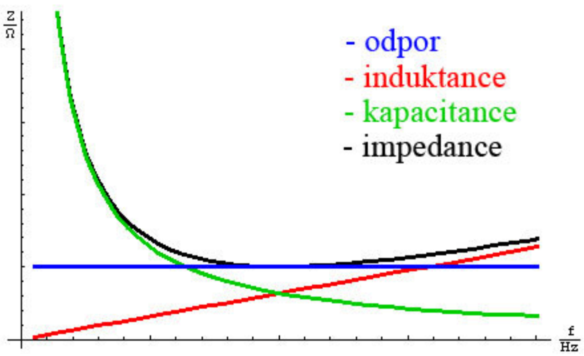
Obvod jako celek je pak charakterizován jediným parametrem, který se nazývá **impedance** *Z*. Impedance představuje „zdánlivý“ odpor celého RLC obvodu. Proto pro ni platí:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\ ;\ [Z] = \Omega.$$

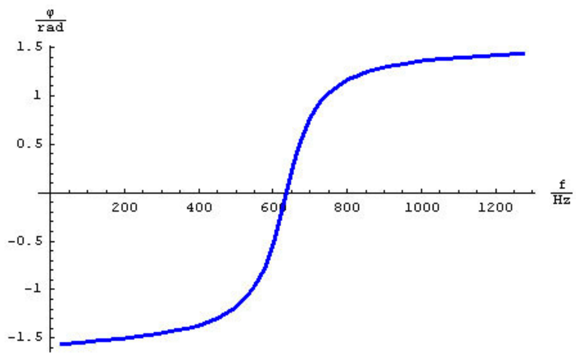
Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu pak je možné podle obr. 2 psát:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},\ \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Dále je možné zavést pojem **reaktance** $X = X_L - X_C$, která charakterizuje vlastnosti té části obvodu střídavého proudu, v níž se elektromagnetická energie nemění v teplo, ale jen v energii elektrického a magnetického pole. Reaktance tedy popisuje chování cívky a kondenzátoru.



obr. 3



obr. 4

Zvláštní případ nastává v RLC obvodu v sérii, je-li při dané frekvenci induktance obvodu stejná jako jeho kapacitance: $X_L = X_C$. Impedance je pak dána jen odporem rezistoru: $Z = R$. Fázový rozdíl proudu a napětí je nulový a obvod má vlastnost rezistence (tj. obvod se chová jako kdyby v něm byl zapojen jen rezistor bez cívky a bez kondenzátoru). Impedance je proto ze všech možných stavů daného obvodu nejmenší a proto obvodem (při daném napětí) prochází největší proud. Tento stav se označuje jako **rezonance** střídavého obvodu a příslušnou **rezonanční frekvenci** f_0 lze určit z podmínky

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C},$$

z níž vyplývá:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

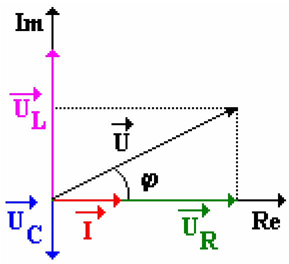
Skutečnost, že při rezonanci je impedance obvodu minimální, dokumentuje i obr. 3, na kterém jsou zobrazeny grafy závislosti odporu, induktance, kapacitance a impedance na frekvenci proudu (resp. napětí). Odpor rezistoru na frekvenci proudu nezávisí, induktance cívky se s rostoucí frekvencí proudu zvětšuje a kapacitance kondenzátoru s rostoucí frekvencí proudu klesá. Impedance dosahuje svého minima právě v případě rezonance obvodu, kdy je její hodnota totožná s odporem rezistoru a kapacitance a induktance jsou stejné.

Na obr. 4 je zobrazen průběh fázového posunu proudu a napětí.

1.1.3 <u>Matematický popis pomocí komplexních čísel</u>

Přeformulováním řady fyzikálních problémů do komplexních čísel se tyto problémy většinou matematicky zjednoduší. S komplexními čísly se totiž velmi jednoduše pracuje a pro každý typ úlohy (podle matematického zápisu rovnic, podle povahy hledaného řešení, …) je vhodný jiný zápis komplexních čísel. Důležité je ovšem na konci úlohy správně interpretovat získané řešení, tj. přiřadit komplexním číslům (resp. jejich imaginárním částem) správný fyzikální smysl.

Na základě fyzikálního popisu RLC obvodu (viz odstavec 1.1.1), který je zobrazen na obr. 1, je možné zakreslit fázory proudu a napětí na jednotlivých prvcích obvodu i do Gaussovy roviny, do níž se zobrazují komplexní čísla. Z počátku bude postup stejný jako v odstavci 1.1.2: proud procházející obvodem je na všech prvcích obvodu stejný a má nulový fázový posun vůči napětí na rezistoru. Proto se obě tyto veličiny zobrazují na reálnou osu (viz obr. 5).
Napětí na cívce, které se předbíhá oproti proudu procházejícímu cívkou právě o $90°$, se zobrazuje na kladnou imaginární poloosu. Analogicky se napětí na kondenzátoru (které se za proudem tekoucím kondenzátorem o $90°$ opožďuje) zobrazí na zápornou imaginární poloosu. Grafická znázornění na obr. 2 a obr. 5 jsou tedy velmi podobná. Výpočet se ale liší.



obr. 5

Napětí $\mathbf{U}_R$ na rezistoru o odporu R je dáno vztahem

$$\mathbf{U}_R = R.\mathbf{I}.$$

Napětí $\mathbf{U}_L$ na cívce o indukčnosti L je dáno vztahem:

$$\mathbf{U}_L = X_L.\mathbf{I} = \omega L \mathbf{I} \mathrm{j},$$

kde j je imaginární jednotka, pro kterou platí $j^2 = -1$.

<u>Poznámka:</u> V matematice se tatáž imaginární jednotka značí symbolem i. Symbol j je zde volen záměrně, aby nedocházelo k záměně s okamžitou hodnotou proudu, která se značí i. Přeznačením imaginární jednotky se matematické definice a pravidla, kterými se počítání s komplexními čísly řídí, nezmění!

Analogicky lze definovat napětí $\mathbf{U}_C$ na kondenzátoru vztahem

$$\mathbf{U}_C = X_C.\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C \mathrm{j}}.$$

Na první pohled není jasné, že napětí na kondenzátoru U_C má fázový posun vůči proudu, který má mít - tj. že se za proudem v obvodu zpožďuje o čtvrt periody. To je možné ukázat tak, že napětí vyjádříme tak, jak se komplexní čísla běžně vyjadřují, tj. imaginární jednotkou v čitateli:

$$\mathbf{U}_C = \frac{\mathbf{I}}{\omega C \mathrm{j}} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C \mathrm{j}}.\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}} = \frac{\mathbf{I}}{\omega C \mathrm{j}^2}\mathrm{j} = -\frac{\mathbf{I}}{\omega C}\mathrm{j}.$$

Z tohoto vztahu je vidět, že napětí na kondenzátoru skutečně má smysl nanášet v Gaussově rovině na zápornou imaginární poloosu.

Jiným způsobem je možné odvodit kapacitanci kondenzátoru pomocí goniometrického tvaru komplexních čísel. Stačí si uvědomit (a to je vysvětleno už v odstavci 1.1.1 a zobrazeno na obr. 2), že napětí na kondenzátoru je vzhledem k proudu posunuto o $-\frac{\pi}{2}$. Pak lze psát:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}.$$

Ve srovnání s popisem RLC obvodu pomocí reálných čísel (viz odstavec 1.1.2), se při použití komplexních čísel změní i výpočet hodnoty celkového napětí U. Úvodní úvaha je stejná:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_\mathrm{R} + \mathbf{U}_\mathrm{L} + \mathbf{U}_\mathrm{C}.$$

Po dosazení:

$$\mathbf{U} = R\mathbf{I} + \omega L\mathbf{I}\mathrm{j} - \frac{\mathbf{I}}{\omega C}\mathrm{j} = R\mathbf{I} + \left(\omega L\mathbf{I} - \frac{\mathbf{I}}{\omega C}\right)\mathrm{j} = \mathbf{I}\left[R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right].$$

Číselná hodnota výsledného napětí U je pak dána absolutní hodnotou komplexního čísla, ve které už nevystupuje imaginární jednotka j:

$$U = I\left|R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right| = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

což je stejný vztah jako vztah, který byl odvozen s použitím reálných čísel (viz odstavec 1.1.2).

Pro impedanci pak platí:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}$$

a její číselná hodnota je dána vztahem

$$Z = \left|R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\mathrm{j}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

což je opět stejný vztah, který byl odvozen při popisu pomocí reálných čísel (viz odstavec 1.1.2).

Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu lze použít stejný vztah jako v odstavci 1.1.2 (viz obr. 5):

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_\mathrm{L} - U_\mathrm{C}}{U_\mathrm{R}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Matematický popis rezonance se neliší. Při rezonanci prochází obvodem maximální proud a proto je tedy impedance obvodu minimální. To znamená, že

$$X_\mathrm{L} = X_\mathrm{C},$$

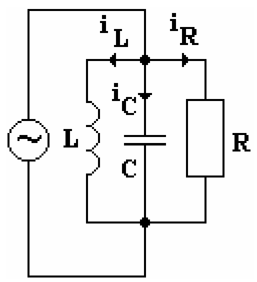
odkud přímo vyplývá vztah pro rezonanční frekvenci f_0:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

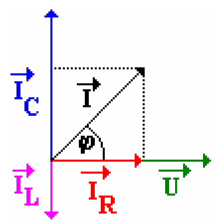
1.2 Paralelní RLC obvod

1.2.1 Fyzikální podstata

Fyzikální podstata činnosti paralelního RLC (viz obr. 6) obvodu vyplývá z chování rezistoru, cívky a kondenzátoru v obvodu střídavého proudu, které bylo popsáno v odstavci 1.1.1. Odlišnost spočívá ve skutečnosti, paralelně spojené prky obvodu mají stejné napětí, ale procházejí jimi různé proudy. Ty se liší se nejen hodnotou, ale i fází: proud i_R procházející rezistorem má stejnou fázi jako napětí na rezistoru, proud i_L procházející cívkou se za napětím opožďuje o čtvrtinu periody a proud i_C procházející kondenzátorem ho o stejný fázový posun předbíhá.



obr. 6



obr. 7

1.2.2 Matematický popis pomocí reálných čísel

Vzhledem k různým fázím proudů, není možné získat celkový proud obvodu aritmetickým součtem proudů v jednotlivých větvích, ale je nutné opět využít fázory:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_\mathrm{R} + \mathbf{I}_\mathrm{L} + \mathbf{I}_\mathrm{C}.$$

Pro efektivní hodnotu I výsledného proudu dostaneme (podle obr. 7):

$$I^2 = I_\mathrm{R}^2 + \left(I_\mathrm{C} - I_\mathrm{L}\right)^2,$$

kde I_R, I_L a I_C jsou efektivní hodnoty proudů v jednotlivých větvích obvodu. Na základě skutečnosti, že napětí je na všech třech prvcích obvodu stejné a podle definice výpočtu napětí (resp. proudu) na rezistoru, cívce a kondenzátoru, lze psát:

$$I = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Obvod je opět charakterizován jediným parametrem - impedancí Z, pro kterou platí:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

Paralelní zapojení RLC obvodu je vhodné popisovat pomocí **admitance** Y, která je definovaná vztahem

$$Y = \frac{1}{Z};\ [Y] = \Omega^{-1},$$

z něhož po dosazení vztahu pro impedanci dostaneme

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Pro fázový rozdíl proudu a napětí lze podle obr. 7 psát:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{I_C - I_L}{I_R} = -\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right),\ \varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

Záporné znaménko před zlomkem $\frac{I_C - I_L}{I_R}$ je ve výrazu pro $\operatorname{tg}\varphi$ proto, aby bylo možné vzájemně srovnat fázové posunutí (viz obr. 4 a obr. 9) v sériovém a paralelním obvodu. V paralelním obvodu je totiž úhel φ orientován opačně, než u sériového obvodu. Na obr. 7 je tedy tento úhel orientován „od proudu k napětí“.

I u paralelního RLC obvodu je možné hovořit o **rezonanci**. Ta nastává opět při **rezonanční frekvenci** f_0, při níž je fázový rozdíl proudu a napětí nulový - a tedy impedance je maximální resp. admitance je minimální a obvodem prochází minimální proud. Pro rezonanční frekvenci v tom případě platí:

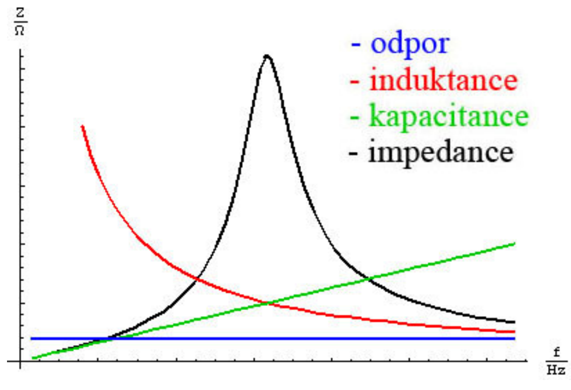
$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L},$$

odkud pro rezonanční frekvenci paralelního RLC obvodu vyplývá stejný vztah jako je ten, který popisuje rezonanci sériového RLC obvodu (viz odstavec 1.1.2 a 1.1.3):

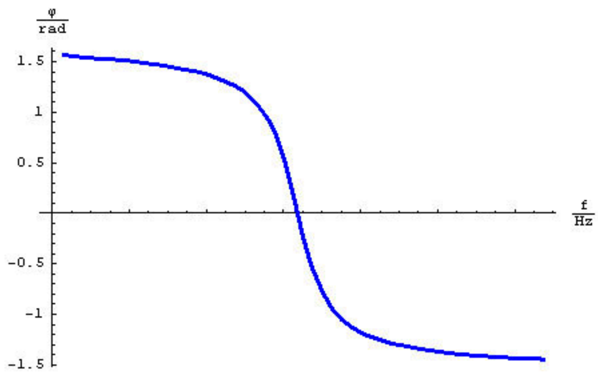
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Závislost impedance, „kapacitance“, „induktance“ a „odporu“ na frekvenci je zobrazena na obr. 8.

<u>Poznámka:</u> Zdánlivé odpory cívky a kondenzátoru jsou v uvozovkách, že se nejedná o tytéž veličiny jako v případě sériového obvodu, ale o jejich převrácené hodnoty.



obr. 8

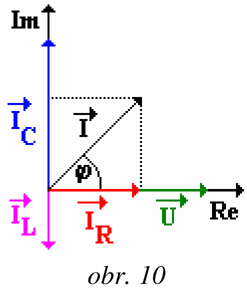


obr. 9

1.2.3 <u>Matematický popis pomocí komplexních čísel</u>

Popis paralelního RLC obvodu pomocí komplexních čísel je analogický popisu sériového RLC obvodu (viz odstavec 1.1.3). Podle obr. 10 je vidět, že proud procházející rezistorem není vzhledem k napětí na rezistoru nijak posunut. Proto platí:

$$\mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{U}}{R}.$$



obr. 10

Proud na cívce se zpožďuje za napětím, takže s využitím komplexních čísel lze psát:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{U}}{X_L \mathrm{j}} = \frac{\mathbf{U}}{\omega L \mathrm{j}},$$

odkud po vydělení komplexního čísla (tj. po rozšíření celého výrazu imaginární jednotkou j), vychází:

$$\mathbf{I}_L = -\frac{\mathbf{U}}{\omega L}\mathrm{j}.$$

Pro proud na kondenzátoru, který se vzhledem napětí předbíhá, lze analogicky psát:

$$\mathbf{I}_\mathrm{C} = \frac{\mathbf{U}}{X_\mathrm{C}}\mathrm{j} = \mathbf{U}\omega C\mathrm{j}.$$

Pro výsledný proud lze nyní psát:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_\mathrm{R} + \mathbf{I}_\mathrm{L} + \mathbf{I}_\mathrm{C} = \frac{\mathbf{U}}{R} - \frac{\mathbf{U}}{\omega L}\mathrm{j} + \mathbf{U}\omega C\mathrm{j} = \mathbf{U}\left[\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\mathrm{j}\right].$$

Hodnota výsledného proudu je dána absolutní hodnotou komplexního čísla:

$$I = \left|U\left[\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\mathrm{j}\right]\right| = U\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

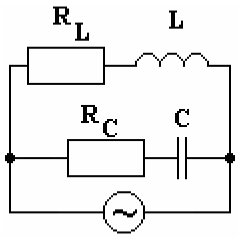
Admitanci obvodu je definovaná vztahem:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{U}} = \frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\mathrm{j}$$

a její číselná hodnota je dána vztahem

$$Y = \left|\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\mathrm{j}\right| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Jak je vidět, tak rovnice, které vyjadřují celkový proud obvodu i jeho admitanci jsou totožné s těmi, které byly odvozeny při počítání s reálnými čísly. Stejné výsledky lze odvodit i pro fázový posun mezi napětím a proudem v obvodu a pro rezonanční frekvenci.



obr. 11

Příklad: Určete rezonanční frekvenci obvodu, jehož schéma je na obr. 11.

Řešení: Řešení lze provést na základě výpočtu celkové admitance obvodu. Ta je dána vztahem

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\mathrm{L} + \mathbf{Y}_\mathrm{C} = \frac{1}{R_\mathrm{L} + \mathrm{j}X_\mathrm{L}} + \frac{1}{R_\mathrm{C} - \mathrm{j}X_\mathrm{C}}.$$

Postupnými úpravami lze získat:

$$\mathbf{Y} = \frac{R_\mathrm{L} - \mathrm{j}X_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + X_\mathrm{L}^2} + \frac{R_\mathrm{C} + \mathrm{j}X_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}^2 + X_\mathrm{C}^2} = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + X_\mathrm{L}^2} + \frac{R_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}^2 + X_\mathrm{C}^2} + \mathrm{j}\left(\frac{X_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}^2 + X_\mathrm{C}^2} - \frac{X_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + X_\mathrm{L}^2}\right).$$

Rezonance obvodu nastává tehdy, když

$$\frac{X_\mathrm{C}}{R_\mathrm{C}^2 + X_\mathrm{C}^2} = \frac{X_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + X_\mathrm{L}^2},$$

z čehož lze po úpravách postupně získat

$$X_\mathrm{C}\left(R_\mathrm{L}^2 + X_\mathrm{L}^2\right) = X_\mathrm{L}\left(R_\mathrm{C}^2 + X_\mathrm{C}^2\right)$$

$$\frac{1}{\omega_0 C}\left(R_\mathrm{L}^2 + \omega_0^2 L^2\right) = \omega_0 L\left(R_\mathrm{C}^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}\right)$$

$$R_\mathrm{L}^2 + \omega_0^2 L^2 = \omega_0^2 LC\left(R_\mathrm{C}^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2}\right)$$

$$R_\mathrm{L}^2 + \omega_0^2 L^2 = \omega_0^2 LCR_\mathrm{C}^2 + \frac{L}{C}$$

$$\omega_0^2 LC\left(R_\mathrm{C}^2 - \frac{L}{C}\right) = R_\mathrm{L}^2 - \frac{L}{C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

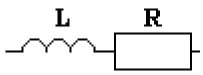
Ve srovnání s frekvencí sériového nebo paralelního obvodu (viz odstavce 1.1.2 a 1.2.2) je frekvence obvodu, jehož schéma je na obr. 11, dána komplikovanějším vztahem - liší se faktorem $\sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$, který je dán právě zapojením prvků v obvodu.

1.3 Náhradní schémata

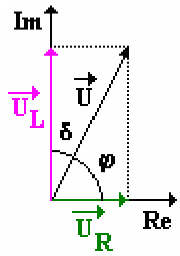
V předchozím textu bylo rozebíráno chování cívky a kondenzátoru ve střídavém RLC obvodu. Mlčky se předpokládalo, že jde o ideální prvky. To ale není ve skutečnosti pravda.

1.3.1 Cívka

Cívky jsou elektrotechnické součástky, které výrazným způsobem zesilují magnetické pole, případně na magnetické pole reagují (např. indukcí napětí, …). Jsou tvořeny závity izolovaného vodiče, který je navinut na jádru cívky. Samotný vodič má ale svůj (Ohmický) odpor. Proto je třeba skutečnou cívku chápat jako sériové spojení ideální cívky a rezistoru, který představuje odpor vinutí cívky (viz obr. 12).



obr. 12



obr. 13

U cívek, které mají podstatně větší induktanci ve srovnání s odporem svého vinutí, je možné odpor vinutí vůči induktanci celé cívky zanedbat.

Pro výslednou impedanci takové cívky platí:

$$\mathbf{Z} = R + \omega L \mathrm{j}$$

Proud procházející cívkou nebude posunut vůči napětí o $\frac{\pi}{2}$!!! Je nutné postupovat jako v RL obvodu (RLC obvod, ve kterém chybí kondenzátor) a počítat podle vztahu, který lze odvodit podle obr. 13:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R}.$$

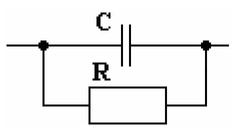
Úhel δ se nazývá **ztrátový úhel** a je to doplněk fázového posunu φ do úhlu $\frac{\pi}{2}$. Hodnota

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R}{\omega L}$$

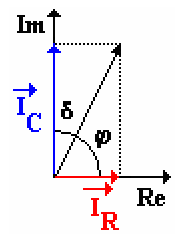
se nazývá **činitel jakosti cívky**.

1.3.2 Kondenzátor

Kondenzátory jsou součástky, které slouží pro kumulaci elektrické energie. Nejjednodušší jsou kondenzátory deskové, které jsou tvořeny minimálně dvěmi vzájemně rovnoběžnými deskami, mezi nimiž je dielektrikum (izolant). A právě izolant mezi deskami kondenzátoru je příčinou vzniku ztrát, které ovlivňují celkovou impedanci (už ne jen kapacitanci) kondenzátoru zapojeného do obvodu střídavého proudu.



obr. 14



obr. 15

Skutečný kondenzátor tedy lze nahradit paralelním zapojením ideálního kodnezátoru a rezistoru, který představuje ztráty v dielektriku (viz obr. 14).

Pro impedanci skutečného kondenzátoru platí (podle odstavce 1.2.3):

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \omega C \mathrm{j}}.$$

Je vidět, že jednodušší vztah lze získat s využitím admitance:

$$\mathbf{Y}=\frac{1}{\mathbf{Z}}=\frac{1}{R}+\omega C\mathrm{j}.$$

Fázový rozdíl mezi proudem a napětí nebude $-\frac{\pi}{2}$, neboť ke kondenzátoru je paralelně připojen rezistor. Proto je třeba fázový rozdíl určit na základě paralelního zapojení RLC obvodu, ve kterém není zapojena cívka:

$$\mathrm{tg}\,\varphi=-\frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{R}}}=-\frac{\omega C}{\frac{1}{R}}=-\omega RC$$

Stejně jako u náhradního schématu cívky, i u kondenzátoru lze zavést ztrátový úhel δ tak, aby platilo $\varphi+\delta=-\frac{\pi}{2}$. Vztah

$$\mathrm{tg}\,\delta=-\frac{I_{\mathrm{R}}}{I_{\mathrm{C}}}=-\frac{\frac{1}{R}}{\omega C}=-\frac{1}{\omega RC}$$

definuje **ztrátový činitel kondenzátoru**.

1.4 Činitel jakosti obvodu

Činitel jakosti cívky, kondenzátoru a obvodu se definuje vztahem

$$Q=2\pi\frac{E}{E_{\mathrm{T}}},$$

kde E je maximální energie akumulovaná na daném prvku, jehož činitel jakosti je třeba určit, a E_{T} je energie, která se na daném prvku přemění na jiné formy energie (energii magnetického pole, elektrickou energii kondenzátoru, …).

V RL nebo RC obvodu je energie E_{T} dána součinem průměrného výkonu na rezistoru a periody T, tedy

$$E_{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2T=\frac{RI_{\mathrm{m}}^2}{2f},$$

kde f je frekvence střídavého proudu.

V RL obvodu je maximální akumulovaná energie na této části obvodu dána energií magnetického pole cívky, tedy

$$E_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2$$

a proto pro činitel jakosti obvodu platí

$$Q=2\pi\frac{E_{\mathrm{m}}}{E_{\mathrm{T}}}=2\pi\frac{\frac{LI_{\mathrm{m}}^2}{2}}{\frac{RI_{\mathrm{m}}^2}{2f}}=2\pi\frac{fL}{R}=\frac{\omega L}{R}.$$

V RC obvodu je maximální akumulovaná energie dána elektrickou energií kondenzátoru

$$E_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}CU_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}CI_{\mathrm{m}}^2X_{\mathrm{L}}^2=\frac{1}{2}\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{C\omega^2},$$

na základě čehož je možné pro činitel jakosti obvodu psát

$$Q=2\pi\frac{E_{\mathrm{e}}}{E_{\mathrm{T}}}=2\pi\frac{\frac{I_{\mathrm{m}}^2}{2C\omega^2}}{\frac{RI_{\mathrm{m}}^2}{2f}}=2\pi\frac{f}{CR\omega^2}=\frac{1}{CR\omega}.$$

V sériovém RLC obvodu, který je v rezonanci, se akumuluje konstantní množství energie. Je-li napětí na kondenzátoru maximální, neprochází cívkou proud. Proto

$$E_{\mathrm{m}}=E_{\mathrm{e}}$$

$$\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}CU_{\mathrm{m}}^2$$

Pro činitel jakosti tak lze psát (s využitím činitele jakosti pro RL a RC obvod)

$$Q=\frac{U_{\mathrm{C}}}{U_{\mathrm{R}}}=\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R}=\frac{1}{\omega_0 RC}\quad\left(\text{resp. } Q=\frac{U_{\mathrm{L}}}{U_{\mathrm{R}}}=\frac{\omega_0 L}{R}\right),$$

protože při rezonanci platí $U_{\mathrm{C}}=U_{\mathrm{L}}$.

V paralelním RLC obvodu, který je v rezonanci, se akumuluje konstantní množství energie. Prochází-li cívkou maximální proud, je napětí na kondenzátoru nulové; obecně

$$E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{e}}$$

$$\frac{1}{2}LI_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}CU_{\mathrm{m}}^2$$

a tedy

$$Q = \frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{R}}} = \frac{\omega_0 C}{\frac{1}{R}} = \omega_0 RC \ \ (\text{resp. } Q = \frac{I_{\mathrm{L}}}{I_{\mathrm{R}}} = \frac{\frac{1}{\omega_0 L}}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega_0 L}).$$