Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Sbírka úloh z fyzikální olympiády

určená všem zájemcům jako doplněk ke studiu fyziky

Jaroslav Reichl

Obsah

1. Kinematika

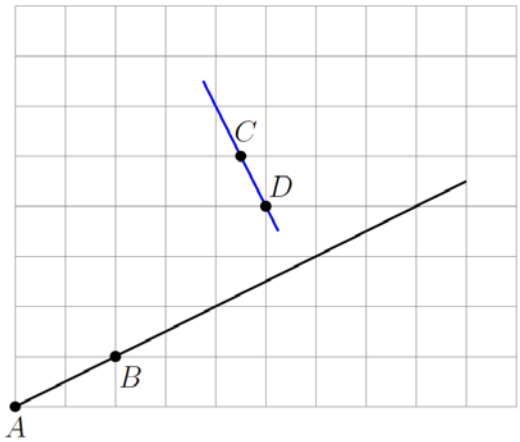
1.1 FO - 57 - I - C

Na obr. 1 je mapa. Měřítko na obou osách je stejné. Dlouhá čára je silnice, po které jede stálou rychlostí autobus. Ve 12:30 h je v bodě A, po 20 minutách v bodě B. Z chaty k zastávce autobusu na silnici míří po nejkratší cestě stálou rychlostí chodec, který se v 8:00 h nacházel v bodě C a po 2 hodinách cesty se nacházel v bodě D.

a) Porovnejte velikosti rychlostí autobusu a chodce.

b) Jak dlouho bude čekat chodec na zastávce na příjezd autobusu?

c) V zimě je cesta namáhavější. Chodec musí jít pomaleji, proto vyjde dříve. V bodě C je v 7:15 h, v bodě D je pak v 10:00 h. Stihne autobus, který jede přesně na čas?



obr. 1

1.2 FO - 40 - I - D

Na kulečníkovém stole leží dvě koule A a B o stejném poloměru $r = 30$ mm. Dva mantinely, které při hře využijeme, představují dvě souřadnicové osy *x* a *y*. Počáteční souřadnice středů koulí jsou $A = [400; 600]$ mm a $B = [300; 150]$ mm. Koule A má po dvou odrazech od mantinelů zasáhnout kouli B.

a) Jakým směrem musíme kouli A vyslat, aby došlo k centrálnímu rázu? Jak dlouhá bude v tomto případě trajektorie pohybu koule A do místa srážky?

b) O jaký úhel se může počáteční směr pohybu koule A odchýlit od směru určeného v úloze a), má-li se koule A koule B alespoň dotknout?

Obě úlohy řešte graficky i početně. Předpokládejte, že odrazy koule od mantinelů jsou dokonale pružné a tření mezi koulí a mantinelem je zanedbatelné.

1.3 FO - 42 - I - D

Vrtulové letadlo urazí za bezvětří přímou vzdálenost $d = 1200$ m mezi místy A a B za dobu $t_0 = 36$ min. Během letu však fouká vítr stálé velikosti i směru rychlostí $u = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Určete maximální možné zpoždění Δt_1 letadla při daném větru.

b) Určete maximální možný časový předstih Δt_2 letadla při daném větru.

c) Určete předstih či zpoždění Δt_3 letadla fouká-li vítr kolmo k trase AB.

d) Určete směr větru, při kterém dorazí letadlo do cíle za stejnou dobu jako za bezvětří. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném, ale stálém směru větru letadlo nebude mít zpoždění?

1.4 FO - 30 - I - D

Motorový člun, jehož motor pracuje stále se stejným výkonem, by se v klidné vodě pohyboval rychlostí $\vec{v}$. Sledujme pohyb tohoto člunu v řece, v níž proudí voda rychlostí $\vec{v}_0$. Nejkratší možná doba, za kterou člun přeplave na druhý břeh, je t_1.

a) Určete šířku *d* řeky.

b) Určete velikost průměrné rychlosti člunu v_1 vzhledem ke břehu.

c) Jakou dráhu *s* urazí člun?

d) Za jakou dobu t_2 by přeplaval člun na druhý břeh, jestliže má přitom urazit co nejkratší dráhu? Určete také velikost rychlosti člunu v_2 vzhledem ke břehu.

Úlohu řešte nejdříve obecně, potom pro hodnoty: $v = 7{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_0 = 1{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t_1 = 28\ \mathrm{s}$.

1.5 FO - 39 - I - D

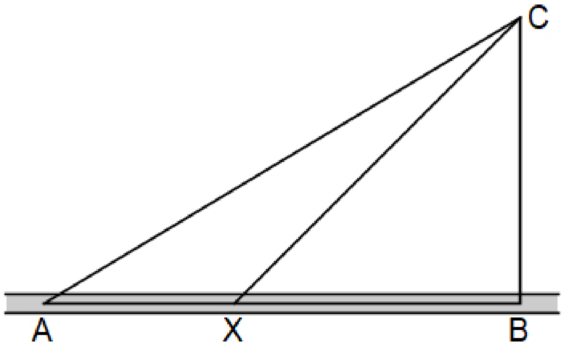
Z bodu A ležícího na přímé silnici se má cyklista dostat do bodu C, který leží na poli ve vzdálenosti $d_1 = |\mathrm{BC}| = 300\ \mathrm{m}$ od silnice (viz obr. 2). Vzdálenost bodů A a B je $d_0 = 500\ \mathrm{m}$. Cyklista je schopen jet po silnici stálou rychlostí o velikosti $v_0 = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a po poli stálou rychlostí o velikosti $v_1 = 14{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Určete dobu t_0 jízdy cyklisty po trase ABC.

b) Určete dobu t_1 jízdy cyklisty po poli po úsečce AC.

c) Jak velkou rychlosti v_1' by musel cyklista vyvinout po poli při dané velikosti rychlosti v_0 po silnici, aby doba jízdy po uvedených trasách ABC a AC byla stejná?

d) Stanovte polohu bodu X, ve kterém musí cyklista opustit silnici, aby doba jízdy t_x po trase AXC danými velikostmi rychlostí v_0 a v_1 byla nejkratší. Úlohu řešte přibližně pomocí kalkulačky rozdělením úsečky AB např. na 10 stejných dílů nebo přesněji pomocí libovolného programu na počítači.



obr. 2

1.6 FO - 40 - I - B

Ve vodorovné rovině je zvolena pravoúhlá soustava souřadnic 0*xy*. Na ose *x* je bod $\mathrm{A} = [a; 0]$, ve kterém se nachází puška. Na ose *y* je bod $\mathrm{B} = [0; b]$. Z počátku soustavy souřadnic se směrem k bodu B pohybuje těleso stálou rychlostí o velikosti v_1. V okamžiku, kdy těleso prochází bodem B, vystřelíme z pušky. O jaký úhel je třeba „předsadit“ pušku, aby těleso bylo zasaženo? Vzdálenost bodů A a B je tak malá, že pohyb střely lze považovat za přímočarý s konstantní velikostí rychlosti v_2. Těleso považujte za hmotný bod. Řešte pro hodnoty *a* = 60 m, *b* = 20 m, $v_1 = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $v_2 = 100\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1.7 FO - 39 - I - D

Na obr. 3 jsou zobrazeny grafy závislosti dráhy na čase hmotných bodů A, B, C a D.

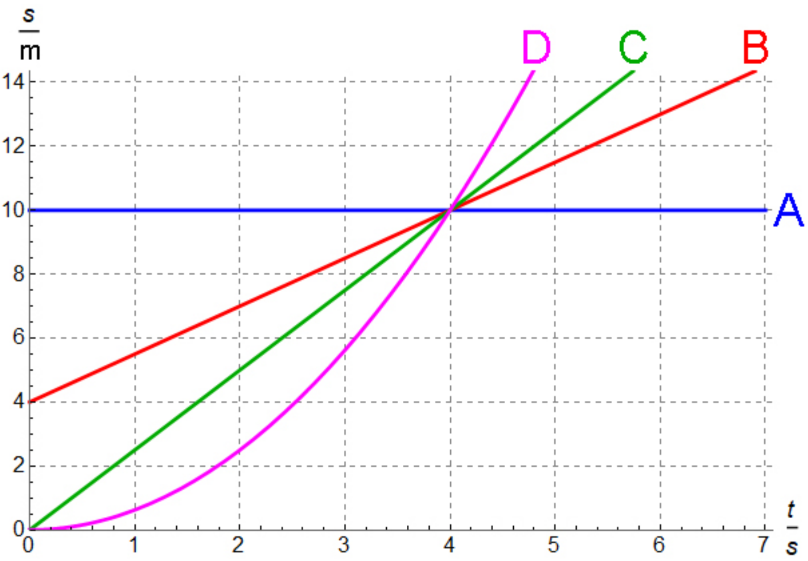
a) Charakterizujte slovy jednotlivé pohyby.

b) Určete velikost průměrné rychlosti jednotlivých pohybů na časovém intervalu od 0 s do 4 s.

c) Určete velikost okamžité rychlosti jednotlivých pohybů v čase 4 s.

d) Sestrojte do jednoho grafu závislost velikosti rychlostí na čase pro jednotlivé hmotné body.

e) Určete celkovou uraženou dráhu v čase $t_1 = 9{,}2\ \mathrm{s}$ jednotlivých pohybů, pokud by pohyb pokračoval podle uvedené grafické závislosti.



obr. 3

1.8 FO - 40 - I - D

Vlak metra může jet maximální rychlostí o velikosti $v = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a zrychlovat nebo zpomalovat se zrychlením o maximální velikosti $a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Vzdálenost mezi dvěma sousedními stanicemi je d = 960 m.

a) Určete nejkratší možnou dobu $t_{\min}$ jízdy mezi stanicemi. Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané číselné hodnoty.

b) Určete nejkratší možnou dobu $t'_{\min}$ jízdy mezi stanicemi, je-li za jinak stejných podmínek z provozních důvodů snížena maximální rychlost na velikost $v' = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

c) Určete nejkratší možnou dobu $t''_{\min}$ jízdy mezi stanicemi, je-li za jinak stejných podmínek povoleno při rozjíždění a při brzdění zrychlení s maximální velikostí $a' = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

d) Sestrojte do jednoho grafu závislosti velikosti rychlosti na čase pro všechny tři popsané pohyby.

e) Pomocí sestrojených grafu určete u každého pohybu dráhu uraženou v čase 10 s.

1.9 FO - 40 - I - D

Automobil jedoucí rychlostí o velikosti $v_0 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ začne na přímočaré trajektorii brzdit se stálým zrychlením o velikosti $a = 0{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete dráhu s_1 uraženou v čase $t_1 = 20\ \mathrm{s}$ po začátku brzdění.

b) Sestrojte grafy závislostí velikosti rychlosti na čase a dráhy na čase v časovém intervalu od 0 s do 20 s.

c) Určete velikost okamžité rychlostí na konci dráhy $s_2 = 50\ \mathrm{m}$.

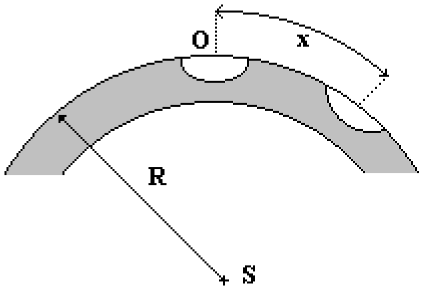
d) Určete průměrnou velikost rychlosti v časovém intervalu $t_3 = 5\ \mathrm{s}$ až $t_3 = 12\ \mathrm{s}$.

e) Určete časový interval délky $\Delta t = 4\ \mathrm{s}$, během něhož urazí automobil během brzdění dráhový úsek $\Delta s = 30\ \mathrm{m}$.

1.10 FO - 30 - I - D

Ve vagóně metra provozovaného na přímé vodorovné trati je na vodorovném stolku ve směru jízdy položená vodováha. Vnější poloměr křivosti rourky vodováhy je *R*. Při rozjíždění vlaku metra, které trvalo dobu t_1, se malá bublina vodováhy posunula z klidové polohy o úsek délky x_1 (viz obr. 4). Potom se bublina vrátila zpět do původní polohy a v této poloze zůstala po dobu t_2. Při zastavování vlaku metra se bublina vychýlila o úsek délky x_3. Rozjíždění i zastavování vlaku považujeme za rovnoměrně zrychlený pohyb.

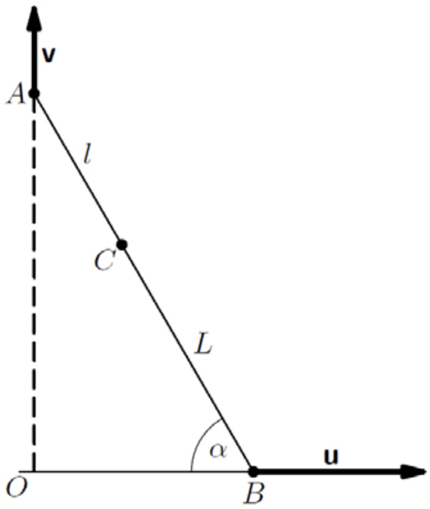
a) Kterým směrem vzhledem ke směru jízdy vlaku metra se bublina vychýlí z rovnovážné polohy při rozjíždění a při zastavování vlaku metra? Odpověď zdůvodněte.
b) Určete velikost zrychlení a_1 vlaku metra při rozjíždění.
c) Určete maximální hodnotu velikosti rychlosti v vlaku metra.
d) Určete hodnotu velikosti zrychlení vlaku při zastavování.
e) Určete dobu t_3, po kterou vlak metra zastavuje.
f) Určete vzdálenost d sousedních stanic metra.
g) Určete průměrnou rychlost v_p vlaku metra na sledovaném úseku tratě.
Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $R = 6\ \mathrm{cm}$, $t_1 = 12\ \mathrm{s}$, $x_1 = 12\ \mathrm{mm}$, $t_2 = 50\ \mathrm{s}$, $x_3 = 15\ \mathrm{mm}$. Na obrázku vyznačuje bod O vodorovnou klidovou polohu bubliny vodováhy.



obr. 4

1.11 FO - 57 - I - A

Chlapec pouští draka a pohybuje se přitom rychlostí $\vec{u}$. Nit se odvíjí z cívky a v okamžiku, kdy napjatá nit svírá s horizontem úhel α, pohybuje se drak svisle vzhůru rychlostí $\vec{v}$ (viz obr. 5).
Jakou velikost a směr má rychlost $\vec{w}$, se kterou se v tomto okamžiku pohybuje uzlík na niti, který je od chlapcovy ruky vzdálen L a jehož vzdálenost od draka je l?
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $u = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, l = 8 m, L = 12 m a $\alpha = 60°$.



obr. 5

1.12 FO - 40 - I - A

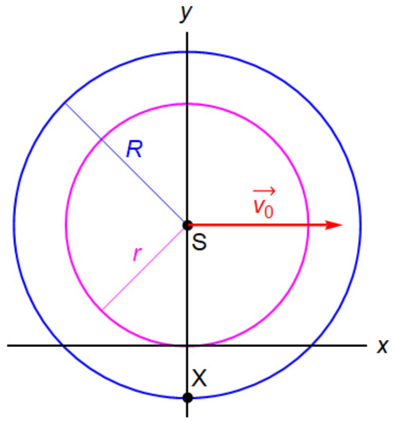
Na vodorovné položce se rovnoměrně odvaluje válec o poloměru $r = 30$ cm. Osa válce se pohybuje rychlostí o velikosti $v_0 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Na podstavu válce je připevněno kolo o poloměru R = 50 cm, které přesahuje přes okraj podložky. Osy obou těles jsou totožné.
a) Napište parametrické rovnice trajektorie bodu X na obvodu kola. Počáteční polohu bodu a vztažnou soustavu zvolte podle obr. 6.

b) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice rychlosti a velikost rychlosti bodu X. Určete velikost rychlosti v nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie.

c) Bod X se střídavě pohybuje vpřed a vzad. Určete, v jakém poměru jsou doby trvání těchto pohybů.

d) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice a velikost zrychlení bodu X.

e) V okolí nejnižších a nejvyšších bodů trajektorie lze pohyb bodu X popsat přibližně jako rovnoměrný pohyb po kružnici. Určete poloměry příslušných oskulačních kružnic.



obr. 6

1.13 FO - 53 - I - D

Kolotoč tvoří vodorovná kruhová deska s upevněnými modely zvířat se sedačkami. Na kolotoči se točí dva kamarádi, Tomáš a Jan. Tomáš sedí na koni ve vzdálenosti $r_1 = 3,2\ \mathrm{m}$ od osy otáčení, Jan na velbloudu ve vzdálenosti $r_2 = 2,4\ \mathrm{m}$ od osy otáčení. Kolotoč se otáčí rovnoměrně, doba jedné otáčky je $T = 7$ s.

a) Určete obvodové rychlosti v_1 a v_2 a úhlové rychlosti ω_1 a ω_2 Tomáše a Jana.

b) Během zastavování rovnoměrně zpomaleným pohybem kolotoč vykonal přesně 2,5 otáčky. Určete dobu t_0, za kterou se kolotoč zastavil.

c) Určete velikosti a_{d1} a a_{d2} dostředivých zrychlení Tomáše a Jana během rovnoměrného otáčivého pohybu a velikosti a_1 a a_2 jejich tečných zrychlení během zastavování.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

2. <u>Dynamika</u>

2.1 FO - 31 - II - C

Těleso o hmotnosti m se v čase $t = 0$ s nachází v klidu v bodě A. V čase $t = 0$ s na něj začala působit stálá síla $\vec{F_1}$, která na těleso působila po dobu t_1. Potom působila na těleso stálá síla $\vec{F_2}$, jejíž směr je opačný vzhledem ke směru síly $\vec{F_1}$. Na těleso působila po dobu t_1. V čase $2t_1$ těleso procházelo bodem A rychlostí o velikosti v_2.

a) Určete maximální vzdálenost tělesa od bodu A v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$.

b) Určete velikosti sil F_1 a F_2.

Úlohy a) a b) řešte nejdříve obecně, pak pro číselné hodnoty: $v_2 = 72\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $t_1 = 30\ \mathrm{s}$ a $m = 0,1$ kg.

c) Pro dané hodnoty sestrojte graf závislosti velikosti rychlosti tělesa na čase v intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$.

d) Ze sestrojeného grafu určete maximální vzdálenost tělesa od bodu A a porovnejte jí s hodnotou vypočtenou v bodě a).

e) Určete průměrnou velikost rychlosti v časovém intervalu $\langle 0; 2t_1 \rangle$. Vypočtenou velikost průměrné rychlosti vyznačte v grafu sestrojeném v bodě c).

Těleso považujte při řešení za hmotný bod.

2.2 FO - 30 - I - D

Petr sjíždí na sáňkách o hmotnosti *m* ze svahu, jehož úhel sklonu vzhledem k vodorovné rovině je α. Hmotnost Petra je m_1. Součinitel smykového tření mezi sáňkami a sněhem je *f*.

a) Určete velikost zrychlení *a*, s nímž se pohybují sáňky s Petrem.

b) Určete velikost rychlosti *v*, které dosáhnou sáňky s Petrem, když urazí dráhu *s*, jestliže pohyb začínal z klidu.

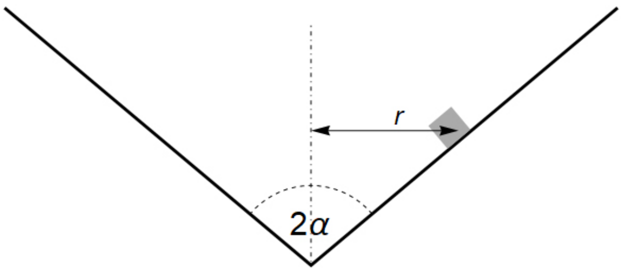
c) Určete velikost složky F_t síly rovnoběžné s nakloněnou rovinou a velikost složky F_n síly kolmé k nakloněné rovině, jimiž působí Petr na sáňky během jízdy po svahu.

d) Určete velikost celkové síly *F*, kterou působí během jízdy Petr na sáňky.

Odpor vzduchu zanedbejte. Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $\alpha = 22{,}6°$, $m_1 = 26$ kg, $m = 10$ kg, $f = 0{,}07$, $s = 30$ m a $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

2.3 FO - 31 - I - C

Na vnitřní stěně násypky ve tvaru komolého kužele s vrcholovým úhlem 2α leží krychle malých rozměrů. Vzdálenost jejího těžiště od osy kužele je *r* (viz obr. 7). Kužel se otáčí kolem své osy stálou úhlovou rychlostí ω. Určete úhlové rychlosti rotace kužele, při nichž krychle nemění svou polohu vzhledem k násypce. Součinitel statického tření mezi krychlí a stěnou kužele je *f*. Při řešení považujte krychli za hmotný bod. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: *f* = 0,2, $\alpha = 45°$, *r* = 3 cm a $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



obr. 7

2.4 FO - 57 - I - D

Jednou z pouťových atrakcí je soustava dvou rotujících kabin. Těžiště pasažéra o hmotnosti *m* sedícího v kabině se pohybuje rovnoměrně po kružnici o poloměru *r* = 4,5 m.

a) Rotor se otáčí tak, že pasažér v nejvyšší poloze je přitlačován k sedačce celkovou silou, jejíž velikost je rovna třetině velikosti jeho tíhové síly. Určete periodu *T* otáčení rotoru a velikost síly F_1, kterou působí pasažér v nejnižší poloze kabiny na sedačku a velikost obdobné síly F_2 v poloze, kdy rameno je vodorovné.

b) Rotor se otáčí tak, že pasažér je v nejvyšší poloze ve stavu beztíže. Určete periodu T_0 otáčení rotoru a dobu Δt během jedné periody, během níž se pasažér nachází ve stavu přetížení, tj. cítí se těžší, než když je kabina vzhledem k zemskému povrchu v klidu.

3. *Práce, energie, výkon*

3.1 FO - 39 - I - D

Automobil o hmotnosti *m* = 1200 kg získal rovnoměrně zrychleným pohybem z klidu za čas $t_1 = 6$ s velikost rychlosti $v_1 = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Určete dráhu s_1 uraženou během rozjíždění.

b) Určete velikosti tažné síly *F* automobilu.

c) Určete průměrný výkon automobilu P_P během rozjíždění.

d) Určete okamžitý výkon automobilu P_1 v čase t_1.

e) Sestrojte graf závislosti okamžitého výkonu automobilu na čase. Co udává obsah plochy pod grafem této závislosti na intervalu od 0 do t_1.

3.2 FO - 40 - I - D

Tramvaj o hmotnosti $m = 20000$ kg má na vodorovných kolejích v nulovém čase nulovou počáteční dráhu a nulovou velikost počáteční rychlosti. Motor tramvaje působí tahovou silou, jejíž velikost v závislosti na čase je zobrazena v grafu na obr. 8.

a) Vypočítejte obsah plochy pod grafem závislosti velikosti síly na čase a určete jeho fyzikální význam.

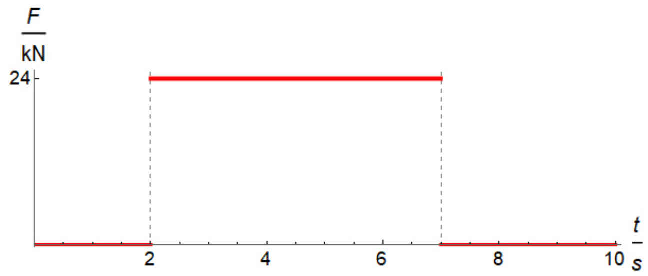
b) Sestrojte graf závislosti okamžité rychlosti tramvaje na čase.

c) Sestrojte graf závislosti uražené dráhy na čase.

d) Sestrojte graf závislosti okamžitého výkonu motoru tramvaje na čase.

e) Sestrojte graf závislosti okamžité síly působící na tramvaj na dráze.

Odporové síly zanedbejte.



obr. 8

3.3 FO - 40 - I - D

Jeden úsek horské dráhy v zábavním parku má tvar vertikální kružnice o poloměru r (viz obr. 9). Vozík tento úsek projíždí setrvačností. Uvažujme ideální případ, kdy tření v ložiskách, valivý odpor kol a odpor vzduchu lze zanedbat.

a) Jak velkou minimální rychlostí se musí vozík pohybovat v bodě C, aby pasažér nevypadl, i když nebude připoután k sedadlu?

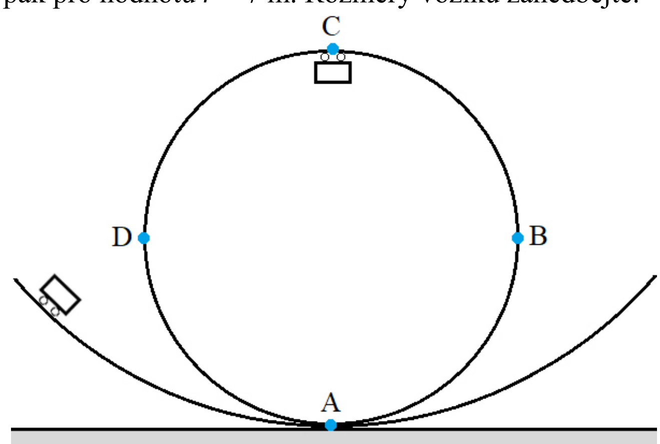
b) Jak velkou rychlost musí mít vozík v bodě A, aby byla splněna podmínka a)?

c) Ve kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s největším dostředivým zrychlením? Určete velikost a směr tohoto zrychlení.

d) Ve kterém bodě kružnicové trajektorie se vozík pohybuje s největším tečným zrychlením? Určete velikost a směr tohoto zrychlení.

e) Určete velikost a směr celkového zrychlení v bodech B a D.

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnotu $r = 7$ m. Rozměry vozíku zanedbejte.



obr. 9

3.4 FO - 30 - II - D

V knize A. C. Clarka *Setkání s Rámou* je popsaná kosmická loď cizí civilizace, kterou tvoří dutý válec s vnitřním průměrem *d*. V prostoru stanice je rotací válce kolem jeho osy vytvořená „umělá gravitace“. Na vnitřní stěně válce tak působí „tíhové zrychlení“ velikosti *a*.

a) Určete periodu *T* rotace kosmické lodi.

Na vnitřní stěně válce se ve směru kolmém na osu pohybuje elektrické vozidlo o celkové hmotnosti *m* rychlostí o velikosti *v*.

b) Určete „tíhu“ G_1 vozidla, které se pohybuje ve směru rotace stanice.

c) Určete „tíhu“ G_2 vozidla, které se pohybuje proti směru rotace stanice.

d) Určete výkon P_1 elektrického motoru vozidla v případě b).

e) Určete výkon P_2 elektrického motoru vozidla v případě c).

f) Jakou největší rychlostí v_{max} se může vozidlo pohybovat v případě podle bodu c)?

Proti pohybu vozidla působí celková odporová síla velikosti $F = f \cdot G + k \cdot v^2$, kde *f* je konstanta závislá na pneumatikách a vozovce, konstanta *k* závisí na tvaru vozidla a vlastnostech prostředí.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $d = 16\ \mathrm{km}$, $a = 6{,}0\ \mathrm{m.s^{-2}}$, $m = 300\ \mathrm{kg}$, $v = 60\ \mathrm{km.h^{-1}}$, $f = 0{,}02$, $k = 2{,}0\ \mathrm{N.m^{-2}.s^2}$.

3.5 FO - 30 - II - D

Na obr. 10 je nakreslené kyvadlo tvořené ocelovou koulí o hmotnosti m_1 a závěsem délky *d*. Kyvadlo bylo uvolněné z vychýlené polohy, v níž závěs svíral se svislým směrem úhel α_0, přičemž koule ve své nejnižší poloze narazila do vozíčku s hmotností m_2, který byl v klidu.

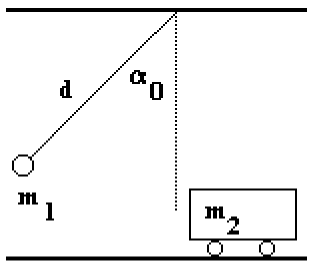
a) Určete rychlost $\overrightarrow{v_{01}}$, kterou koule narazila do vozíčku.

b) Určete rychlost $\overrightarrow{v_2}$ vozíku po srážce.

c) Určete rychlost $\overrightarrow{v_1}$ ocelové koule po srážce.

d) Určete úhel α_1, o který se vychýlí lanko kyvadla po srážce.

Úlohu řešte nejdříve obecně, potom pro hodnoty: $d = 2{,}0\ \mathrm{m}$, $m_1 = 1{,}0\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 8{,}0\ \mathrm{kg}$, $\alpha_0 = 60°$ a $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Závěs považujte za dokonale ohebný, působení odporové a třecí síly neuvažujeme. Srážku považujte za okamžitou a dokonale pružnou.



obr. 10

3.6 FO - 39 - I - D

Tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 se pohybují rychlostmi o velikostech v_1 a v_2 a srazí se tak, že se dále pohybují společně. Určete velikost rychlosti *v* jejich společné rychlosti po srážce a poměrnou část *k* původní kinetické energie těles, která se přeměnila na vnitřní energii. Rozlište případy:

a) Tělesa se pohybují po téže přímce ve stejném směru.

b) Tělesa se pohybují po též přímce proti sobě.

c) Tělesa se pohybují v navzájem kolmých směrech.

Předpokládejte, že během srážky nedojde k rotaci těles. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 0{,}1\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 0{,}4\ \mathrm{kg}$, $v_1 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3.7 FO - 40 - I - C

Nákladní automobil o hmotnosti m_1 a osobní automobil o hmotnosti m_2 jedou po přímé silnici proti sobě rychlostmi $\vec{v_1}$ a $\vec{v_2}$, kde $\vec{v_1} = -\vec{v_2}$.

a) Dojde ke srážce, při níž zůstanou obě tělesa spojena. Určete rychlost soustavy $\vec{u}$ po srážce vzhledem k vozovce. Určete změnu rychlosti nákladního automobilu $\vec{u} - \vec{v_1}$ a osobního automobilu $\vec{u} - \vec{v_2}$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy při srážce. Srážku modelujte nepružným středovým rázem.

b) Dojde ke srážce, při níž nezůstanou vozidla spojena, ale pohybují se rychlostmi $\vec{u_1}$ a $\vec{u_2}$ vzhledem k vozovce. Byla zjištěna velikost rychlosti $\vec{u_1}$. Určete směr a velikost rychlosti $\vec{u_2}$ a vypočtěte úbytek celkové kinetické energie soustavy. Děj modelujte přímým dokonale pružným středovým rázem.

c) Porovnejte úbytky kinetické energie v případech a) a b) a výsledek diskutujte.

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $v_1 = v_2 = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $m_1 = 15\ \mathrm{t}$, $m_2 = 1{,}5\ \mathrm{t}$ a $u_1 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

3.8 FO - 30 - I - D

Dva pružné míčky, nacházející se v malé vzdálenosti nad sebou, byly současně spuštěné z poměrně velké výšky *h* na pružnou vodorovnou podložku. Dolní míček má hmotnost m_1, horní m_2. Počáteční vzdálenost míčků je vzhledem k výšce *h* velmi malá.

a) Popište pohyb obou míčků po jejich spuštění z výšky *h*.

b) Určete, v jakém poměru $k = \dfrac{m_1}{m_2}$ jsou hmotnosti míčků, jestliže po dopadu vyskočil horní míček do výšky h_2 a dolní míček do výšky h_1.

c) Při jakém poměru $k_1 = \dfrac{m_1}{m_2}$ hmotností by oba míčky vyskočily do stejné výšky?

d) Při jakém poměru $k_2 = \dfrac{m_1}{m_2}$ hmotností míčků by vyletěl horní míček nejvýše?

e) Určete největší výšku h_m, do níž může vyskočit horní míček.

Předpokládejte, že míčky i podložka jsou dokonale pružné. Odpor vzduchu zanedbáváme. Trvání každé srážky považujeme za nekonečně krátké. Při výpočtu považujeme míčky za hmotné body.

3.9 FO - 30 - II - D

Na velké zamrzlé kaluži se klouzáním bavili dva chlapci - Petr a Pavel. Najednou se oba srazili právě uprostřed kaluže a přitom se napevno spojili. Petr s hmotností m_1 se pohyboval před srážkou severním směrem rychlostí $\vec{v}_1$ a Pavel o hmotnosti m_2 se pohyboval východním směrem rychlostí $\vec{v}_2$.

a) Určete složku rychlosti $\vec{v}_\mathrm{s}$ spojených chlapců v severním směru.

b) Určete složku rychlosti $\vec{v}_\mathrm{v}$ spojených chlapců ve východním směru.

c) Určete velikost výsledné rychlosti *v* spojených chlapců.

d) Určete směr výsledné rychlosti spojených chlapců, tj. určete azimut φ tohoto směru (odklon daného směru od směru severního).

e) Určete kinetické energie E_1 a E_2 chlapců před srážkou a jejich kinetickou energii po srážce.

f) Objasněte změnu kinetické celkové kinetické energie při srážce.

Úlohu řešte nejprve obecně a potom pro hodnoty: $m_1 = 30\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 40\ \mathrm{kg}$, $v_1 = 6{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $v_2 = 5{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Předpokládejte, že při srážce nedošlo k rotačním pohybům. Tření a odpor vzduchu jsou zanedbatelně malé.

3.10 FO - 40 - I - C

Olověná kulička visí na tenkém vlákně.

a) Určete úhel α, o který je nutné napjaté vlákno s kuličkou vychýlit, aby při kývání celkové zrychlení kuličky v krajních polohách mělo stejnou velikost jako celkové zrychlení při průchodu rovnovážnou polohou.
b) Určete úhel β, o který je nutné vlákno s kuličkou vychýlit, aby síla napínající vlákno při průchodu rovnovážnou polohou měla dvojnásobnou velikost síly napínající vlákno v krajních polohách.

3.11 FO - 40 - I - B

Cyklista, jehož hmotnost i s kolem je 95 kg, sjíždí bez šlapání po dlouhém svahu s klesáním 3,5 m na 100 m dráhy. Za bezvětří dosáhne rychlosti o velikosti $v_1 = 39\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Jak velkou rychlost v_2 by dosáhl, kdyby ve směru jízdy foukal vítr rychlostí o velikosti $v_v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$?

b) Jak velké rychlosti v_3 by dosáhl, kdyby stejně silný vítr foukal proti směru jízdy?

c) S jakým výkonem by musel cyklista šlapat za bezvětří, aby při sjíždění po témž svahu dosáhl rychlosti o velikosti $v_4 = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$?

d) Jak velké rychlosti v_5 dosáhne, bude-li za bezvětří se stejným výkonem šlapat do téhož svahu, po kterém sjížděl v úlohách a) až c)?
Úlohy a) až c) řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty. V úloze d) stačí numerické řešení některou z přibližných matematických metod. Valivý odpor kol považujte za zanedbatelný ve srovnání s odporem vzduchu.

3.12 FO - 57 - I - A

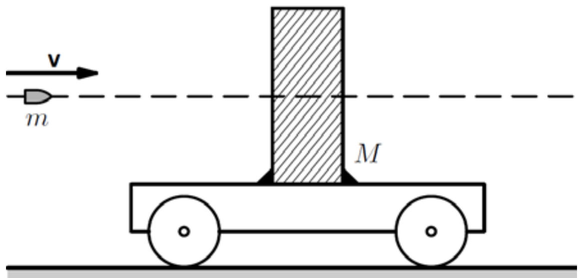
Do středu svislé dřevěné čtvercové desky upevněné na vozíku, který stojí na vodorovné podložce, dopadne vodorovně letící střela o hmotnosti *m* (viz obr. 11). Aby střela prorazila desku, musí být velikost její rychlosti alespoň v_0. Hmotnost vozíku s deskou je *M*.

a) Určete přírůstek ΔU vnitřní energie střely a desky při proražení desky.

b) Jaká bude velikost *u* rychlosti, kterou se začne pohybovat vozík s deskou, bude-li velikost rychlosti střely $v \geq v_0$?

c) Jakou největší rychlostí u_{max} se muže vozík s deskou po průstřelu pohybovat?

Odporová síla dřeva nezávisí na rychlosti střely. Valivý odpor mezi vozíkem a podložkou je zanedbatelný. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $m = 20$ g, $M = 500$ g, $v_0 = 150\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $v = 250\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



obr. 11

3.13 FO - 30 - I - D

Na vodorovném kruhovém stole obíhá hranolek s hmotností *m*, uchycený na konci nitě procházející otvorem ve středu stolu. Hranolek obíhá rychlostí o velikosti v_0 po kružnici o poloměru R_0.

a) Určete velikost síly F_0, kterou působíme na nit.

b) Určete velikost momentu hybnosti b_0 hranolku.

c) Určete kinetickou energii E_0 hranolku.

Nit rukou zatáhneme svisle dolů. Poloměr kružnicové trajektorie se zmenší o *s*, kde $s < R_0$. Po této změně určete:

d) velikost rychlosti *v* hranolku,

e) velikost síly *F*, kterou je napínána nit,

f) kinetickou energie *E* hranolku,

g) práci *W*, kterou jsme vykonali při zatáhnutí nitě,

h) střední hodnotu síly F_p, kterou jsme působili na nit během změny poloměru trajektorie hranolku.

Tření při pohybu hranolku i nitě zanedbejte. Hranolek považujte za hmotný bod. Hmotnost nitě je malá, nit je neroztažitelná.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $R_0 = 1\ \mathrm{m}$, $m = 0{,}1\ \mathrm{kg}$, $s = 20\ \mathrm{cm}$ a $v_0 = 5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4. Gravitační pole

4.1 FO - 39 - I - D

Z balkonu ve výšce $h_0 = 12\ \mathrm{m}$ nad okolním terénem vyhodil chlapec svisle vzhůru plný míček rychlostí o velikosti $v_0 = 16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Do jaké výšky nad okolní terén míček vystoupil?

b) Jak velkou rychlostí dopadne míček na zem?

c) Kdyby chlapec hodil míček rychlostí o téže velikosti vodorovným směrem, dopadl by míček ve vodorovné vzdálenosti *d* od balkonu. Určete tuto vzdálenost a velikost rychlosti dopadu na zem. Porovnejte velikosti rychlostí dopadu vypočtené v bodě b) a c) a výsledek porovnání vysvětlete.

d) Určete velikost rychlosti dopadu na zem v případě, že chlapec hodí míček rychlostí o téže velikosti svisle dolů.

e) Pro případy a) a b) nakreslete graf závislosti velikosti okamžité rychlosti na čase.

Odpor vzduchu při řešení zanedbejte.

4.2 FO - 40 - I - D

Honza hodil kámen vodorovným směrem z balkonu ve třetím patře budovy ve výšce $h_0 = 10\ \mathrm{m}$ nad vodorovným terénem. Velikost počáteční rychlosti kamene byla $v_0 = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Jak velkou rychlostí v_0' musí hodit kámen Jirka z téhož místa, aby kámen dopadl:

a1) do dvakrát větší vzdálenosti od domu;

a2) za dvakrát delší dobu;

a3) dvojnásobně velkou rychlostí?

b) Z jaké výšky *h* by Jirka musel hodit kámen vodorovným směrem rychlostí o velikosti v_0, aby kámen dopadl:

b1) do dvakrát větší vzdálenosti od domu;

b2) za dvakrát delší dobu;

b3) dvojnásobně velkou rychlostí?

Odpor vzduchu zanedbejte.

4.3 FO - 40 - I - A

Z určitého místa budeme házet kamenem. Počáteční rychlost kamene bude mít pokaždé stejnou velikost v_0, elevační úhel α budeme měnit. Všechny hody budou probíhat v téže svislé rovině. Je-li kámen dostatečně velký, lze zanedbat odpor vzduchu a předpokládat, že trajektorie kamene je parabola.

a) Určete množinu vrcholů všech těchto parabol.

b) Určete hranici oblasti, kterou můžeme kamenem zasáhnout.

c) Výsledky úloh a) a b) znázorněte graficky ve vhodném měřítku spolu s několika trajektoriemi pro různé elevační úhly. Volte $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

4.4 FO - 31 - C

Druhý měsíc Jupitera Europa obíhá kolem Jupiteru po kružnici o poloměru r_1 se siderickou oběžnou dobou T_1. Třetí Jupiterův měsíc Ganymed má siderickou oběžnou dobu T_2. Střední poloměr Jupiteru je *R*. Za předpokladu, že hmotnosti i střední poloměry obou měsíců jsou vzhledem k hmotnosti a střednímu poloměru Jupiteru zanedbatelné, vypočítejte:

a) velikost rychlosti, kterou obíhá Europa kolem Jupiteru;

b) hmotnost Jupiteru;

c) poloměr kružnice, po které se pohybuje Ganymed kolem Jupiteru;

d) zorný úhel, pod kterým vidí Jupiter pozorovatel z povrchu Europy;

e) nejkratší dobu, za kterou se opakuje taková poloha Jupiteru, Europy a Ganymedu, ve které je Europa právě mezi Jupiterem a Ganymedem a středy všech tří těles leží na téže přímce.

Úlohu řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $r_1 = 6,71 \cdot 10^5$ km, $T_1 = 3,55$ d, $T_2 = 7,16$ d a $R = 7,14 \cdot 10^4$ km.

4.5 FO - 31 - II - C

Meteorologická družice se pohybuje po kružnici kolem Země a má siderickou oběžnou dobu *T*. Zemi považujte za homogenní kouli o poloměru R_Z a hmotnosti M_Z. Perioda rotace Země kolem vlastní osy je T_Z. Družice se pohybuje v rovině rovníku.

a) Určete výšku *h* nad povrchem Země, v níž se družice pohybuje.

b) Určete velikost rychlosti *v*, kterou se družice pohybuje po kružnici kolem Země.

c) Určete dobu *t*, po kterou lze družici pozorovat z téhož místa na rovníku při jednom jejím oběhu kolem Země.

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $T = 100$ min, $T_Z = 23$ h 56 min, $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg a $R_Z = 6378$ km.

4.6 FO - 43 - I - C

Planetka (2060) Chiron byla objevena 16. října 1977. V roce 1989 byla pozorována její kometární aktivita, a tak je od té doby řazena mezi planetky i mezi komety (s označením 95P/Chiron). Planetka má oběžnou dobu kolem Slunce 50,78 roku. Dne 19. února 1996 prošla periheliem ve vzdálenosti 8,51 AU od Slunce. Předpokládejte, že se během dalšího pohybu parametry její trajektorie nezmění.

a) Určete délky velké a malé poloosy trajektorie Chironu a jeho vzdálenost od Slunce v aféliu.

b) Jak velkou rychlost má Chiron v perihelu a jak velkou v aféliu?

c) Určete obsah plochy omezené trajektorií Chironu a jeho plošnou rychlost.

d) Ve kterém měsíci a roce projde Chiron znovu periheliem?

4.7 FO - 37 - Slovenská republika

Raketa se pohybuje jako umělá družice po trajektorii tvaru kružnice kolem Země ve výšce *h* = 760 km nad jejím povrchem. O jaký rozdíl velikosti rychlostí je třeba raketu urychlit ve směru tečny k její trajektorii, aby přešla na eliptickou trajektorii, jejíž nejvzdálenější bod od středu Země dosahuje k orbitální trajektorii Měsíce? Za jakou dobu od urychlení se raketa dostane do maximální vzdálenosti od Země?

Vliv ostatních těles neuvažujte. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R_Z = 6,38 \cdot 10^6$ m a $r_M = 3,85 \cdot 10^8$ m.

4.8 FO - 60 - Slovenská republika

Při prvním přistání lidské posádky na Měsíci dne 20. července 1969 „zaparkovala“ kosmická loď Apollo 11 ve výšce $h_R = 110$ km nad povrchem Měsíce. Lunární modul po oddělení od kosmické lodi přešel na sestupnou trajektorii, která se přiblížila na vzdálenosti $h_A = 20$ km pod úhlem $\alpha = 30°$ vzhledem k tečně k povrchu Měsíce (bod A). Tehdy se zažehli brzdící motory.

a) Určete velikost orbitální rychlosti v_R kosmické lodi a dobu jejího oběhu na oběžné trajektorii.

b) Určete velikost rychlosti v_0 lunárního modulu ve směru tečny k oběžné trajektorii lodi, na kterou je nutné zpomalit lunární modul, aby v gravitačním poli Měsíce sestoupil do bodu A. Určete velikost rychlosti v_A lunárního modulu v okamžiku dosažení bodu A.

c) Určete velikost rychlosti v_{01} podle úlohy b), aby modul dosáhl bodu A pod úhlem $\alpha = 0°$. Určete čas t_A sestupu lunárního modulu z oběžné trajektorie do bodu A v tomto případě.

Úlohu řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $M_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg a $R_M = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

4.9 FO - 40 - Slovenská republika

Na oběžné trajektorii ve tvaru kružnice ve výšce *h* = 50 km nad povrchem Měsíce se pohybuje orbitální stanice. Z povrchu Měsíce odstartuje lunární modul ve směru tečny k povrchu tak, aby se při letu s vypnutými motory setkal s orbitální stanicí.

a) Jak velkou rychlostí v_0 se pohybuje orbitální stanice?

b) Jak velkou minimální velikost rychlosti v_1 musíme udělit lunárnímu modulu na povrchu Měsíce, aby pohybem s vypnutými motory dosáhl výšky *h*?

c) Za jakou dobu Δt po průchodu orbitální stanice nad místem startu musí modul odstartovat, aby se se stanicí setkal?

Úlohu řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $M_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg a $R_M = 1{,}74 \cdot 10^6$ m.

4.10 FO - 40 - I - C

Těleso o hmotnosti *m* uvolníme ve výšce *h* nad povrchem Země. Země má poloměr *R* a hmotnost *M*. Zvolíme-li hladinu nulové potenciální energie na zemském povrchu, je potenciální energie soustavy Země - těleso ve vzdálenosti *h* nad povrchem Země dána vztahem

$$E_p = \kappa m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

a) Určete velikost rychlosti dopadu tělesa na zemský povrch.

b) Určete velikost zrychlení a_1 tělesa na začátku jeho pohybu a velikost zrychlení a_2 na konci pohybu.

c) Se stálým zrychlením o velikosti a_1 by těleso z výšky *h* spadlo za dobu t_1, se stálým zrychlením o velikosti a_2 za dobu t_2. Odhadněte skutečnou dobu pádu.

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m a $h = 2 \cdot 10^6$ m. Gravitační konstanta je $\kappa = 6{,}66 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$. Odpor vzduchu a rotaci Země zanedbejte.

5. Mechanika tuhého tělesa

5.1 FO - 40 - I - C

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α je položen kvádr o hmotnosti *M*. Těleso o hmotnosti *m* je spojeno s kvádrem vláknem vedeným přes pevnou kladku (viz obr. 12). Součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou je *f*, součinitel statického tření je f_0. Budeme vyšetřovat tyto případy:

a) udělíme počáteční rychlost o velikosti v_0 tělesu o hmotnosti *m* ve směru svislém dolů;

b) udělíme počáteční rychlost o velikosti v_0 kvádru ve směru dolů rovnoběžně s nakloněnou rovinou;

c) ponecháme soustavu v klidu.

Pro všechny případy vypočtěte velikost zrychlení soustavy a velikost tahové síly vlákna a diskutujte, jak se bude soustava pohybovat.

5.2 FO - 57 - I - D

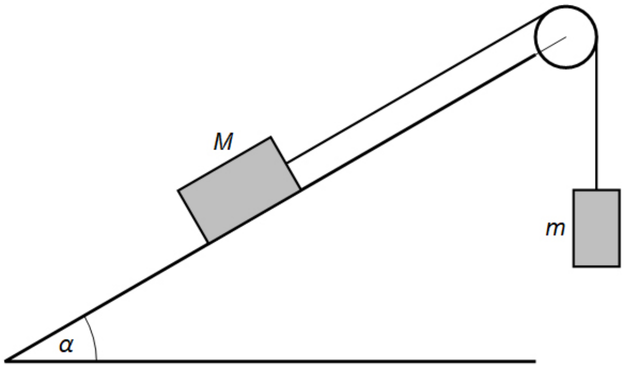
Na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 35°$ se nachází pět za sebou spojených vozíků, každý o hmotnosti m_1. Soustavu vozíku přivážeme k závěsu vedenému pres pevnou kladku, na druhý konec závěsu přivážeme závaží.

a) Určete, při jaké hmotnosti m_2 závaží zůstane soustava v klidu.

b) Zavěšené závaží má hmotnost $2m_1$. Určete směr pohybu soustavy, velikost zrychlení *a* soustavy a velikost síly *F*, kterou je napínán závěs.

c) Určete minimální počet *N* vozíků v situaci b), které musíme překlopit, aby soustava zůstala v klidu. Součinitel smykového tření mezi překlopeným vozíkem a nakloněnou rovinou je *f* = 0,3.

Tření v kladce, hmotnost kladky i závěsu a valivý odpor zanedbejte. Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.



obr. 12

5.3 FO - 57 - I - C

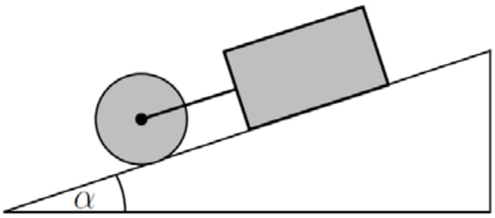
Plný homogenní válec o hmotnosti m_1 a kvádr o hmotnosti m_2 jsou vzájemně spojeny táhlem a pohybují se na nakloněné rovině (viz obr. 13). Táhlo je u obou podstav válce spojeno s osou válce, kolem níž se muže válec volně otáčet. Rovina táhla je rovnoběžná s nakloněnou rovinou. Součinitel smykového tření mezi kvádrem a povrchem nakloněné roviny je *f*.

a) Určete úhel sklonu α_1, při němž se soustava může pohybovat rovnoměrně.

b) Určete úhel sklonu α_2, při němž táhlo nebude napínáno ani stlačováno.

c) Určete obecně funkční závislost souřadnice zrychlení a_x soustavy na úhlu α sklonu nakloněné roviny. Osu *x* orientujeme ve směru nakloněné roviny šikmo dolů. Jak se bude soustava pohybovat na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 12\,°$?

Válec na nakloněné rovině neprokluzuje. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 0{,}3\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 0{,}8\ \mathrm{kg}$ a *f* = 0,4.



obr. 13

5.4 FO - 43 - I - A

Na nakloněné rovině se sklonem α je umístěna spojená soustava válce a kvádru. Válec má hmotnost m_1, poloměr *r* a moment setrvačnosti vůči ose rotace $J = \frac{1}{2}m_1r^2$. Osa válce je pomocí dvou tenkých tyčí spojena s kvádrem o hmotnosti m_2 (viz obr. 13). Tyče jsou rovnoběžné s nakloněnou rovinou, osa válce je v nich volně otáčivá. Součinitel smykového tření mezi povrchy kvádru či válce a nakloněnou rovinou je *f*. Obě tělesa jsou ze stejného materiálu.

a) Stanovte horní mez f_{max} součinitele smykového tření, při kterém dojde po uvolnění soustavy k jejímu pohybu po nakloněné rovině.

b) Vypočítejte velikost zrychlení soustavy a velikost síly přenášené tyčemi za předpokladu, že soustava sjíždí po nakloněné rovině a válec se pohybuje bez prokluzování.

c) Určete dolní mez f_{min} součinitele smykového tření, při kterém nedochází k prokluzování válce.

Úlohy řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $\alpha = 25°$, $m_1 = 2,3\ \text{kg}$ a $m_2 = 5\ \text{kg}$. V úloze b) navíc počítejte s hodnotou $f = 0,27$.

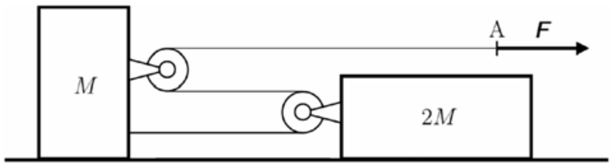
5.5 FO - 59 - II - C

Dva hranoly o hmotnostech M a $2M$ jsou položeny na hladké vodorovné podložce a navzájem propojeny pomocí dvou malých kladek zanedbatelné hmotnosti lehkou pevnou neroztažitelnou nití, na jejímž konci působí síla $\vec{F}$ (viz obr. 14). Určete:

a) velikosti sil $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$, které působí na každé těleso;

b) velikost a směr zrychlení $\vec{a_1}$ a $\vec{a_2}$ každého tělesa;

c) velikost zrychlení $\vec{a}$ bodu A na konci lana, ve kterém působí síla $\vec{F}$.



obr. 14

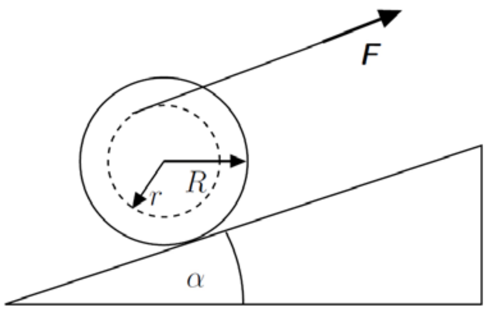
5.6 FO - 57 - II - C

Dělník táhne cívku s kabelem rovnoměrným pohybem do mírného svahu s úhlem sklonu $\alpha = 10°$ tak, že se kabel současně odvíjí (viz obr. 15). Hmotnost cívky je $m = 150$ kg, její vnější poloměr je $R = 70$ cm a vnitřní poloměr $r = 40$ cm považujeme za stálý. Jedno otočení celé cívky trvá dobu $t = 5$ s. Určete:

a) velikost rychlosti dělníka v;

b) velikost potřebné síly F;

c) jeho okamžitý užitečný výkon P.



obr. 15

5.7 FO - 39 - I - B

Automobil, jehož pneumatiky mají při styku s vozovkou součinitel smykového tření $f = 0,55$ má projet klopenou zatáčkou o poloměru $r = 25$ m a sklonu vozovky $\alpha = 7°$. Kola automobilu mají rozchod $d = 1,5$ m. Náklad je rozložen rovnoměrně a těžiště automobilu se nachází v rovině souměrnosti karoserie.

a) Jak velkou maximální rychlostí se může automobil pohybovat, aby nedošlo ke smyku?

b) V jaké největší vzdálenosti h od vozovky může být těžiště automobilu, aby dříve než ke smyku nedošlo k převrácení?

5.8 FO - 57 - I - B

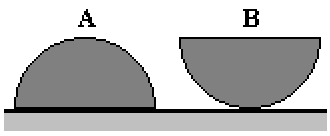
Dva automobily s motory o stejném maximálním výkonu $P = 110$ kW mají stejný rozvor náprav $d = 2,5$ m a těžiště ve výšce $h = 0,6$ m nad vozovkou ve stejné vzdálenosti od obou náprav. Hmotnost obou automobilu je $m = 1300$ kg. První automobil má náhon na přední nápravu, druhý automobil má náhon na zadní nápravu. Automobily se rozjíždějí z klidu tak, aby vzdálenost $s = 20$ m urazily v co nejkratší době. Součinitel smykového tření mezi koly a vozovkou je $f = 0,8$.

Valivý odpor kol a odpor vzduchu zanedbejte.
a) Určete velikosti maximálních dosažitelných zrychlení a_1 a a_2 obou automobilů.
b) Který automobil bude u značky 20 m dříve a jaké budou časy obou automobilů?
c) Stačí uvedený maximální výkon automobilů na dosažení těchto casu?

5.9 FO - 30 - II - D

Homogenní polokoule s poloměrem *R* a hustotou ρ může spočívat na vodorovné rovině ve dvou polohách *A* a *B*, znázorněných na obr. 16.
a) Jsou obě dvě polohy polokoule stabilní? Své tvrzení odůvodněte.
b) Určete práci W_1 potřebnou na překlopení polokoule z polohy *A* do polohy *B*.
c) Určete práci W_2 potřebnou na překlopení polokoule z polohy *B* do polohy *A*.
d) Která z poloh *A* a *B* se vyznačuje větší stabilitou? Svoje tvrzení odůvodněte.
Úlohu řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $R = 30{,}0\ \text{cm}$, $\rho = 500\ \text{kg.m}^{-3}$.

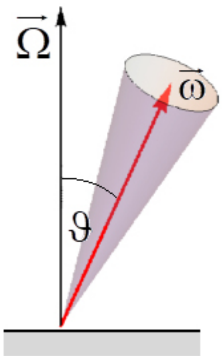
<u>*Poznámka:*</u> Těžiště homogenní polokoule se nachází ve vzdálenosti $x_0 = \frac{3}{8}R$ od její rovinné plochy.



obr. 16

5.10 FO - 57 - I - C

Prázdný ocelový sud tvaru válce a bez víka má hmotnost *m* = 30 kg. Průměr sudu je *D* = 0,6 m a výška *H* = 0,85 m. Tloušťku stěny a dna zanedbejte.
a) Určete výšku *h* těžiště nade dnem sudu.
b) Sud leží na svém plášti. Určete práci W_1 nutnou k postavení sudu do polohy s dnem dole a práci W_2 nutnou k postavení sudu do polohy s dnem nahoře.
c) Rozhodněte, do které z těchto dvou konečných poloh musíme vyvinout největší nutnou sílu. Určete polohu působiště, velikost a směr této síly.
Řešte nejprve obecně, pak pro zadané číselné hodnoty.



obr. 17

5.11 FO - 40 - I - A

Je dán homogenní rotační kužel o hmotnosti *m* o poloměru podstavy *r* a výšce *h*.
a) Vypočtěte vzdálenost těžiště kužele od jeho vrcholu. Příslušný vzorec odvoďte.
b) Vypočtěte moment setrvačnosti kužele vzhledem k jeho ose souměrnosti. Příslušný vzorec odvoďte.
c) Kužel postavíme na špičku tak, že jeho osa souměrnosti bude odkloněna od svislice o úhel ϑ a udělíme mu rotaci úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem osy souměrnosti (viz obr. 17). Vypočtěte úhlovou rychlost $\vec{\Omega}$ precese užitím přibližné teorie (tj. zanedbáním příspěvku precesního pohybu k momentu hybnosti).

Řešte obecně, pak pro hodnoty: m = 3 kg, r = 0,1 m, h = 0,2 m a $\omega = 300\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

6. Mechanika kapalin a plynů

6.1 FO - 39 - I - D

Do akvária tvaru kvádru o rozměrech dne a = 50 cm a b = 30 cm a výšce c = 40 cm nalijeme vodu o objemu V = 48 l.

a) Určete hydrostatický tlak u dna akvária a velikost hydrostatické síly působící na dno akvária.

b) Určete hydrostatický tlak u každé ze stěn akvária a velikosti hydrostatických sil působících na jednotlivé stěny akvária.

c) Na hladinu vody položíme model lodi o hmotnosti m = 0,9 kg tak, že plove na hladině. Jaký maximální objem V_1 vody lze do akvária nalít, aby voda nepřetékala přes jeho okraje?

Úlohu řešte nejdříve obecně, pak se zadanými číselnými hodnotami.

6.2 FO - 30 - I - D

Před koncem druhé světové války svrhli nacisté na dno Černého jezera na Šumavě několik vodotěsných kovových beden. V bednách byly ukryty tajné dokumenty. V roce 1964 byly bedny nalezeny a vyloveny z vody. Každá z beden měla tvar kvádru, jehož výška byla h, obsah podstavy S a hmotnost bedny m. Určete práci W, kterou vykonali potápěči při vyzvednutí jedné bedny. Bedna byla zvedána pomalým rovnoměrným pohybem z výchozí polohy, v níž byla horní podstava bedny v hloubce h_1 pod hladinou vody. Po vyzdvižení do koncové polohy byla dolní podstava ve výšce h_2 nad hladinou.

Úlohu řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $S = 0{,}25\ \mathrm{m}^2$, $h = 40\ \mathrm{cm}$, $h_1 = 3{,}6\ \mathrm{m}$, $h_2 = 0{,}80\ \mathrm{m}$, $m = 150\ \mathrm{kg}$, $\rho = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Odpor vody a vzduchu při pohybu a vztlakovou aerostatickou sílu zanedbejte.

6.3 FO - 57 - I - C

Do široké nádoby nalijeme rtuť o hustotě $\rho_2 = 13600\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ do výšky $h_2 = 5\ \mathrm{cm}$ a na ni nalijeme vodu o hustotě $\rho_1 = 1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}$ do výšky $h_1 = 10\ \mathrm{cm}$ nad hladinu rtuti. Na hladinu vody položíme kotouč o výšce h = 2 cm, průměru $d > h$ a hustotě ρ. Určete, v jaké hloubce H pod hladinou vody se bude nacházet spodní podstava kotouče, je-li:

a) $\rho = 600\ \mathrm{kg.m^{-3}}$;

b) $\rho = 7800\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

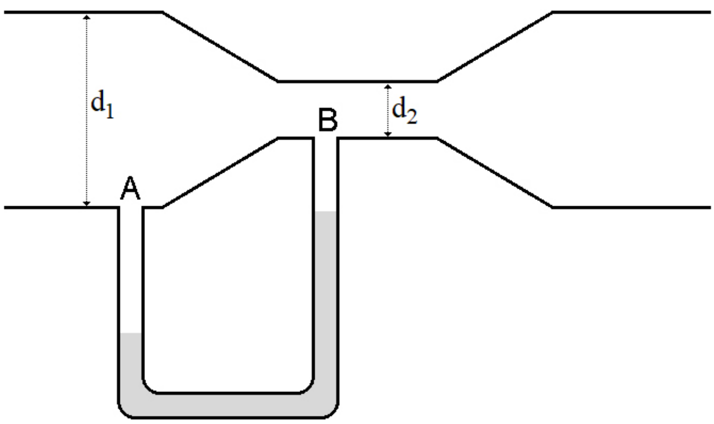
c) Nakreslete graf závislosti H na hustotě $\rho \in (0; 15000)\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Zvýšení hladiny vody v nádobě při potápění kotouče zanedbejte.

6.4 FO - 31 - II - C

K měření objemu nebo hmotnosti plynu, který projde daným průřezem potrubí za určitou dobu t, lze použít Venturiho trubici, která se do měřeného potrubí zapojí. Princip této trubice je zobrazen na obr. 18. Rozdíl statických tlaků plynu v místech A a B trubice měříme citlivým manometrem. Určete hmotnost plynu s hustotou ρ, který protekl při ustáleném proudění potrubím za dobu t. Venturiho trubice připojená k potrubí měla průměry d_1 a d_2 a manometr vykazoval tlakový rozdíl Δp. Změny hustoty plynu při proudění trubicí neuvažujte.

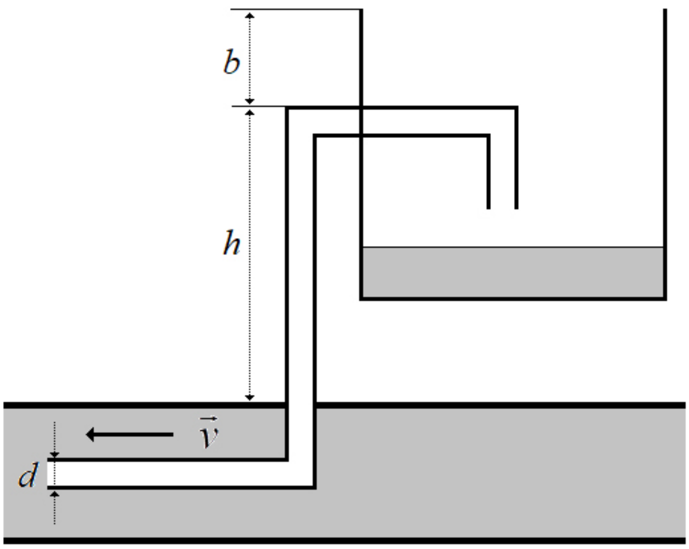
Úlohu řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $d_1 = 5\ \mathrm{cm}$, $d_2 = 4\ \mathrm{cm}$, $\rho = 1{,}4\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, t = 1 h a $\Delta p = 1{,}2\ \mathrm{Pa}$.



obr. 18

6.5 FO - 31 - I - C

Dříve parní lokomotivy někdy doplňovaly vodu do nádrže bez zastavení, během jízdy. Mezi kolejnicemi byl pro tyto účely postaven dlouhý kanál naplněný klidnou vodou. Do něj se za jízdy spustila z lokomotivy trubice, kterou voda za jízdy natekla do nádrže. Schéma zařízení je zobrazeno na obr. 19.



obr. 19

a) Vysvětlete princip činnosti zobrazeného zařízení.

b) Určete velikost rychlosti lokomotivy, při které se na dráze *s* načerpá do nádrže lokomotivy voda o objemu *V*, pohybuje-li se lokomotiva rovnoměrným přímočarým pohybem. Vodu považujte za ideální kapalinu.

c) Okraj nádrže je ve výšce *b* nad horní částí potrubí. Za jaké podmínky může voda přetéct přes okraj nádrže?

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty $s = 1\ \text{km}$, $V = 3\ \text{m}^3$, $d = 0{,}1\ \text{m}$, $h = 3{,}5\ \text{m}$, $b = 0{,}5\ \text{m}$, $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

6.6 FO - 40 - I - C

Čerpadlo čerpá vodu z řeky potrubím stálého průřezu o plošném obsahu *S* do koryta zavlažovací soustavy (viz obr. 20). Objemový průtok má stálou hodnotu Q_V. Sací otvor 1 potrubí je v hloubce h_0 pod hladinou řeky. Vstupní otvor 2 a výstupní otvor 3 čerpadla jsou ve stejné výšce h_1 nad hladinou řeky. Výtokový otvor 4 potrubí je ve výšce h_2 nad hladinou řeky. Okolní vzduch má atmosférický tlak p_a.

a) Určete velikost rychlosti *v* proudící vody v potrubí.

b) Jaký tlak má voda, která se chová jako ideální kapalina,:

v sacím otvoru;

ve vstupním otvoru čerpadla;

ve výstupním otvoru čerpadla;

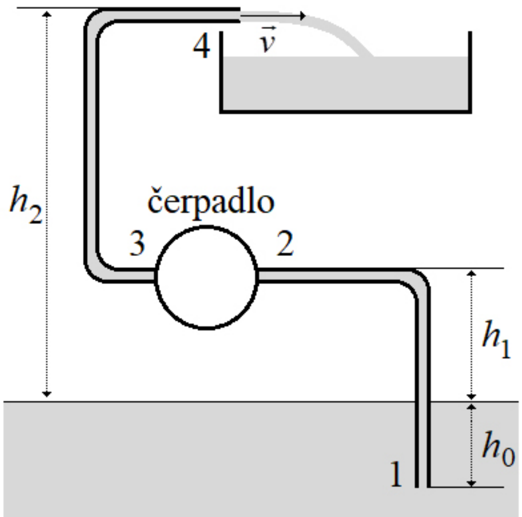
ve výtokovém otvoru potrubí?

c) S jakým výkonem by v takovém případě čerpadlo pracovalo?

d) Určete výkon P' a účinnost η čerpací jednotky, jestliže ve skutečnosti musí být mezi vstupním a výstupním otvorem čerpadla udržován tlakový rozdíl p_r (větší, než jaký vychází z výpočtu pro ideální kapalinu).

e) Do jaké největší výšky $h_{1\max}$ bychom mohli při daných hodnotách Q_V a S čerpadlo umístit, kdyby se voda chovala jako ideální kapalina?

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $Q_V = 3{,}6\ \mathrm{l \cdot s^{-1}}$, $S = 5\ \mathrm{cm^2}$, $h_0 = 0{,}6\ \mathrm{m}$, $h_1 = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $h_2 = 6{,}2\ \mathrm{m}$, $p_a = 1 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$ a $p_r = 120\ \mathrm{kPa}$.



obr. 20

7. <u>Elektrostatické pole</u>

7.1 FO - 31 - I - C

Dvě velmi malé vodivé kuličky, každá o hmotnosti $5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg}$, jsou zavěšeny na stejně dlouhých nevodivých vláknech délky $10\ \mathrm{cm}$ a zanedbatelné hmotnosti. Obě z vláken jsou upevněna ve společném bodě. Nabijeme-li každou z kuliček stejným nábojem *Q*, odchýlí se každé z vláken o úhel $\varphi = 30°$ od svislého směru. Kuličky považujte za hmotné body.

a) Určete náboje *Q*.

b) Pro uvedené hodnoty hmotnosti kuliček a délek vláken sestrojte graf závislosti náboje *Q* na úhlu φ z intervalu $\langle 10°; 80° \rangle$.

7.2 FO - 31 - II - C

V jednom bodě jsou zavěšeny tři stejně dlouhé závěsy délky *d*, na jejichž koncích jsou připevněné vodivé kuličky. Kuličky jsou stejně velké, mají stejnou hmotnost *m* a navzájem se dotýkají. Na jednu kuličku přivedeme kladný elektrický náboj *Q*. Po vzájemném odpuzení zaujmou kuličky takovou rovnovážnou polohu, že úhel mezi každými dvěma závěsy je β.

a) Určete vzdálenost mezi dvěma kuličkami v popsané rovnovážné poloze.

b) Určete velikost výsledné elektrostatické síly působící na každou z kuliček.

c) Určete hodnotu náboje *Q*.

Úlohu řešte obecně, pak pro hodnoty: $\beta = 40°$, $d = 1$ m a $m = 5$ g.

7.3 FO - 57 - II - B

a) Mezi dvěma vodorovnými deskami kondenzátoru, vzdálenými od sebe o $d = 0{,}5$ cm, se ve vzduchu vznáší kapička oleje s poloměrem $r = 1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm}$. Napětí na deskách kondenzátoru je $U = 610$ V, hustota oleje je $\rho = 950\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jaký je náboj kapičky a kolikrát je vetší než náboj elementární?

b) Mezi dvěma vodorovnými deskami stejného, ale nenabitého kondenzátoru, padá kapička oleje o hmotnosti $m = 4{,}9\cdot 10^{-12}$ g stálou rychlostí o velikosti v_1. Velikost odporové síly působící proti pohybu kapičky $F = 6\pi\eta r v$ je přímo úměrná velikosti rychlosti pádu kapičky. Vložíme-li nyní na desky kondenzátoru napětí $U_1 = 300$ V, bude se kapička pohybovat rychlostí o velikosti $v_2 = 0{,}4 v_1$. Jaký je náboj kapičky a kolikrát je vetší než náboj elementární?

7.4 FO - 40 - I - B

Kondenzátor o kapacitě C_A nabijeme na napětí U, pak jej odpojíme od zdroje a připojíme ke spřaženému přepínači, ke kterému je připojen kondenzátor o kapacitě C_B (viz obr. 21).

a) Určete napětí na kondenzátorech po připojení kondenzátoru o kapacitě C_A k přepínači.

b) Jak velký náboj Q prošel vodiči po připojení kondenzátoru k přepínači?

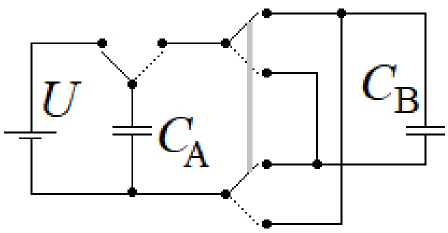
c) Jak velká energie se přitom přeměnila na vnitřní energii vodičů?

d) Určete napětí U_1 na kondenzátorech po jednom přepnutí přepínače.

e) Na jakou hodnotu klesne napětí na kondenzátorech po n přepnutích?

f) Po kolika přepnutích klesne napětí na kondenzátorech pod hodnotu U_k?

Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty: $C_A = 200$ nF, $C_B = 300$ nF, $U = 30$ V a $U_k = 0{,}1$ V.



obr. 21

8. <u>*Obvody stejnosměrného proudu*</u>

8.1 FO - 54 - I - B

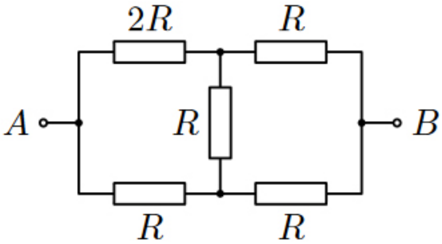
Na obr. 22 je znázorněno zapojení pěti rezistorů o odporech R, resp. $2R$. Po určité době provozu dojde k přepálení jednoho z těchto rezistorů, což způsobí změnu celkového odporu mezi body A a B.

a) Určete odpor mezi body A a B pro všechny možné situace, které mohou nastat.

b) Na základě řešení části a) stanovte, který z rezistorů je poškozen, jestliže je celkový odpor obvodu 1. co nejmenší, 2. co největší.

c) Určete, jaký byl odpor R_{AB} obvodu, než došlo k poškození rezistoru.

d) O kolik procent se může celkový odpor obvodu přepálením jednoho rezistoru změnit 1. nejméně, 2. nejvíce?



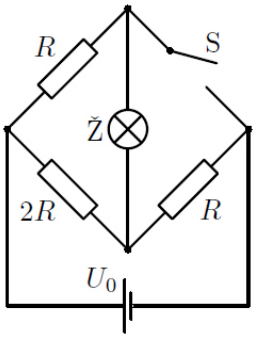
obr. 22

8.2 FO - 51 - I - B

Na obr. 23 je schéma elektrického obvodu. Napětí zdroje je $U_0 = 108\ \mathrm{V}$, jeho vnitřní odpor je zanedbatelný a $R = 180\ \Omega$. Po sepnutí spínače se proud procházející žárovkou nezměnil.

a) Určete hodnotu tohoto proudu a napětí na žárovce.

b) Porovnejte proud odebíraný ze zdroje před a po sepnutí spínače.



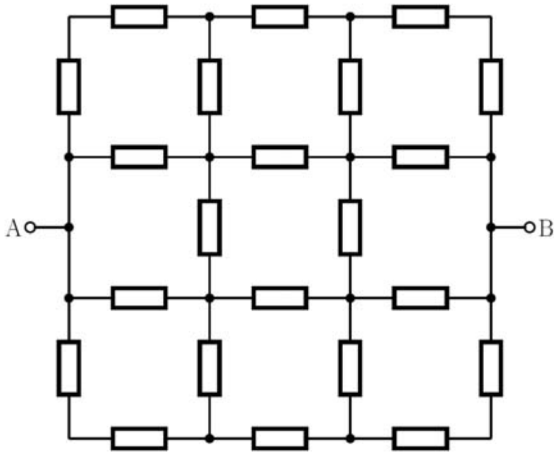
obr. 23

8.3 FO - 57 - II - B

22 stejných rezistorů, každý s odporem *R*, je zapojeno podle obr. 24. Určete:

a) celkový odpor mezi body A a B;

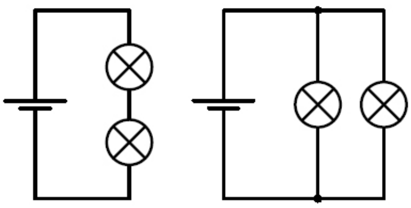
b) proudy v jednotlivých rezistorech, připojíme-li k bodům A a B ideální zdroj s elektromotorickým napětím U_e.



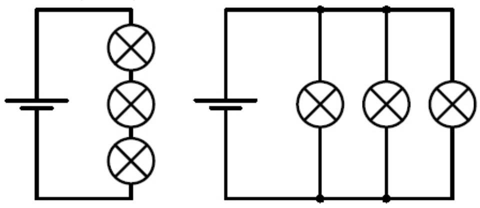
obr. 24

8.4 FO - 52 - I - A

Dvě stejné žárovky byly připojeny ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e jednak sériově, jednak paralelně (viz obr. 25). Kupodivu v obou případech svítily stejně.



obr. 25



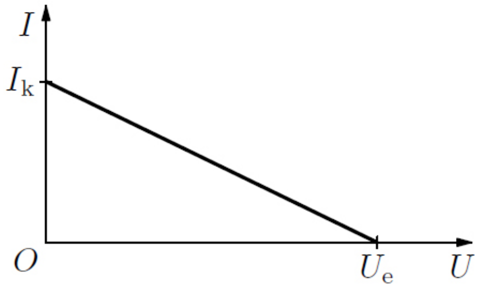
obr. 26

a) Porovnejte odpor *R* svítících žárovek s vnitřním odporem R_i zdroje.

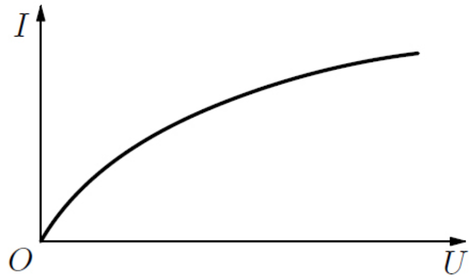
b) Porovnejte účinnost obvodu v obou případech.

c) K témuž zdroji připojíme tři stejné žárovky jako v předcházejícím pokusu jednak sériově, jednak paralelně (viz obr. 26). Ve kterém zapojeni budou svítit víc?

Úlohu c) řešte graficky. Předpokládáme, že zatěžovací charakteristika zdroje je lineární (viz obr. 27) a voltampérová charakteristika žárovky má průběh podle obr. 28.



obr. 27



obr. 28

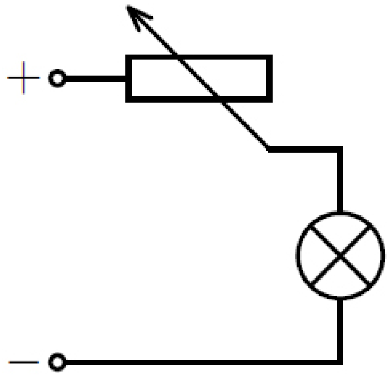
8.5 FO - 50 - I - B

Žárovka se jmenovitým příkonem P_1 a jmenovitým napětím U_1 má být napájena stejnosměrným zdrojem o elektromotorickém napětí U_e $(U_e > U_1)$ a se zanedbatelným vnitřním odporem. K regulaci napětí použijeme reostat o celkovém odporu R_0.

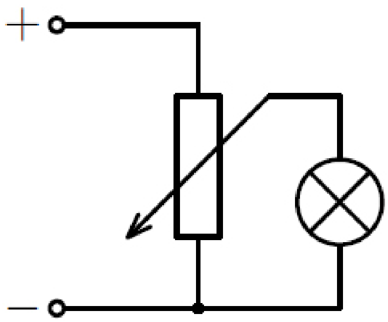
a) Reostat připojíme k žárovce sériově (viz obr. 29). Určete odpor *R* části reostatu, kterou prochází proud, a účinnost elektrického obvodu.

b) Reostat připojíme jako potenciometr (viz obr. 30). Určete odpor *R* té části reostatu, z níž snímáme napětí pro žárovku, a účinnost elektrického obvodu.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $P_1 = 12\ \mathrm{W}$, $U_1 = 6\ \mathrm{V}$, $U_e = 18\ \mathrm{V}$ a $R_0 = 20\ \Omega$.



obr. 29



obr. 30

9. Mechanické kmitání

9.1 FO - 39 - I - B

Kaskadér o hmotnosti $m = 80$ kg padá z výšky $H = 50$ m přivázán ke konci pružného lana, jehož druhý konec je upevněn ve stejné výšce. Délka *l* nezatíženého lana a jeho tuhost *k* jsou takové, že při volném pádu je velikost rychlosti kaskadéra na povrchu země nulová. Po utlumení kmitů zůstane kaskadér viset ve výšce $h = 10$ m nad zemí.

a) Určete délku *l* nezatíženého lana a jeho tuhost *k*.

b) Určete maximální velikost rychlosti kaskadéra během jeho pádu.

c) Určete maximální přetížení, které na kaskadéra během pádu působí.

Lano považujte za dokonale pružné, odpor vzduchu zanedbejte. Pohyb kaskadéra popište jako pohyb hmotného bodu.

9.2 FO - 39 - I - B

Vzduchový kondenzátor je tvořen dvěma rovnoběžnými vodorovnými deskami o plošném obsahu *S*. Dolní deska je upevněna v držáku, horní je zavěšena na soustavě pružin s celkovou tuhostí *k*, která umožňuje svislý pohyb desky tak, že obě desky zůstávají stále rovnoběžné. K deskám připojíme zdroj, jehož napětí budeme velmi pomalu zvětšovat. Při nulovém napětí zdroje je vzdálenost desek d, při zvětšování napětí se budou desky přibližovat.

a) Odvoďte vztah mezi napětím zdroje U a posunutím x horní desky z počáteční polohy, při kterém bude v rovnováze přitažlivá síla desek a síla pružin. Nakreslete graf této závislosti.

b) Vysvětlete, proč při zadaných podmínkách nemůžou desky setrvávat v libovolné rovnovážné vzdálenosti.

c) Jaké hodnoty musí dosáhnout napětí zdroje, aby se desky spojily?

Úlohu řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $k = 1\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, $S = 100\ \mathrm{cm^2}$ a $d = 2$ mm.

10. Obvody střídavého proudu

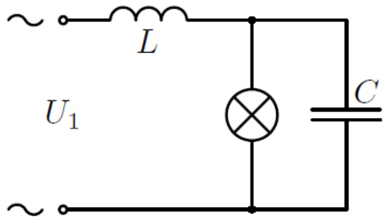
10.1 FO - 53 - I - A

Žárovku se jmenovitými hodnotami napětí $U = 24$ V a proudu $I = 0{,}3$ A potřebujeme napájet ze zdroje střídavého proudu o efektivní hodnotě svorkového napětí $U_1 = 12\ \mathrm{V}$ a frekvenci 50 Hz. Použijeme k tomu obvod zapojený podle obr. 31. Kondenzátor připojený paralelně k žárovce má dostatečně velkou kapacitu $C = 100\ \mu\mathrm{F}$.

a) Jakou indukčnost L musí mít cívka, aby napětí na žárovce mělo jmenovitou hodnotu?

b) Jaké bude fázové posunutí napětí na žárovce oproti svorkovému napětí zdroje?

Kondenzátor a cívku považujte za ideální, vnitřní odpor zdroje je zanedbatelný.



obr. 31

10.2 FO - 57 - I - B

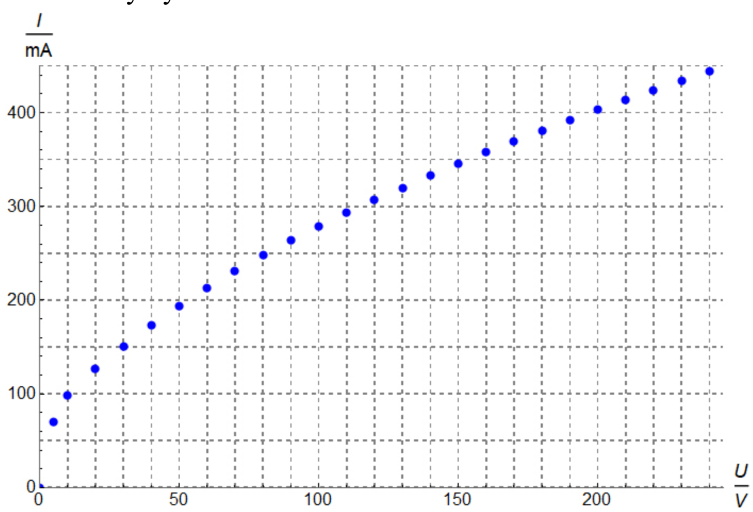
Na obr. 32 je nakreslena voltampérová charakteristika žárovky o jmenovitém výkonu $P_j = 100\ \mathrm{W}$ určená pro síťové napětí o frekvenci 50 Hz a efektivní hodnotě $U_0 = 230\ \mathrm{V}$ sestrojená podle tabulky změřených hodnot (viz tab. 1). Žárovku připojíme k elektrické síti sériově s kondenzátorem s kapacitou $C = 8\ \mu\mathrm{F}$.

a) Jaký elektrický proud bude obvodem procházet a jaké elektrické napětí bude na žárovce?

b) Jaký bude výkon žárovky a jaký bude celkový výkon obvodu?

$\frac{U}{\mathrm{V}}$	$\frac{I}{\mathrm{mA}}$	$\frac{U}{\mathrm{V}}$	$\frac{I}{\mathrm{mA}}$
0	0	120	307
5	70	130	320
10	98	140	333
20	127	150	346
30	151	160	358
40	173	170	370
50	194	180	381
60	213	190	392
70	231	200	403
80	248	210	414
90	264	220	424
100	279	230	434
110	293	240	444

tab. 1



obr. 32

11. Optika

11.1 FO - 40 - I - A

a) Trubice o vnějším průměru *D* a vnitřním průměru *d* vyrobená ze skla o indexu lomu *n* je naplněna obarvenou tekutinou. Určete zdánlivé zvětšení vnitřního průměru trubice v důsledku lomu světla.

b) Ze stejného skla je vyrobena tyč kruhového průřezu o průměru *D*, na kterou po jedné straně narýsujeme tenkou podélnou čáru. Určete zdánlivé zvětšení čáry při pohledu z protější strany.

Úlohu řešte obecně, pak pro $n = 1{,}52$. Vnější průměry trubice a tyče jsou malé ve srovnání s konvenční zrakovou vzdáleností.

11.2 FO - 39 - I - A

Dvě tenké čočky vzdálené od sebe 2,5 cm tvoří centrovanou optickou soustavu. Předmět vysoký 2 cm umístěný ve vzdálenosti 5 cm před první čočkou je celou soustavou zobrazen ve vzdálenosti 20 cm za druhou čočkou, kde vzniká převrácený skutečný obraz vysoký 12 cm. Určete ohniskové vzdálenosti obou čoček.

a) Řešte graficky a řešení popište.

b) Úlohu řešte početně.

11.3 FO - 57 - I - A

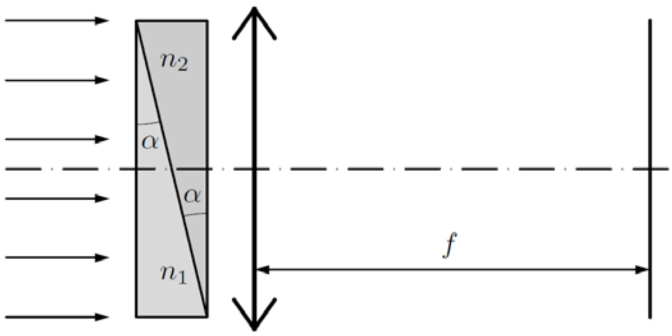
Dva tenké skleněné hranoly s lámavým úhlem $\alpha = 5°$ s indexy lomu $n_1 = 1{,}5$ a $n_2 = 1{,}7$ položené na sebe tvoří destičku, kterou umístíme před tenkou spojnou čočkou s ohniskovou vzdáleností $f = 100$ cm kolmo k její optické ose. V ohniskové rovině čočky je stínítko. Destička je osvětlená svazkem paprsků rovnoběžným s optickou osou čočky (viz obr. 33).

a) V jaké vzdálenosti *y* od optické osy čočky bude světelná stopa na stínítku?

b) V jaké vzdálenosti y_1 od optické osy čočky bude světelná stopa na stínítku, odstraníme-li druhý hranol?

c) V jaké vzdálenosti y_2 od optické osy čočky bude světelná stopa na stínítku, ponecháme-li druhý a odstraníme-li první hranol?

V úloze pracujeme s malými úhly. Zjistěte, jak se změní výsledky, jestliže místo přesného výpočtu použijeme v zákoně lomu aproximaci $\sin x \doteq x$.



obr. 33

12. Teplo, práce, vnitřní energie

12.1 FO - 57 - I - B

Na hladinu vody o hustotě ρ_0 ve válcové nádobě s poloměrem *R* je z výšky *H* puštěn dřevěný kotouč tvaru nízkého válce s poloměrem podstavy *r*, o výšce *h* a o hustotě ρ_0. Určete:

a) hloubku h_1, do které bude kotouč ponořen po ustálení hladiny;

b) zvýšení h_2 hladiny vody ve válci po jejím ustálení;

c) změnu vnitřní energie celé soustavy při tomto ději.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $\rho_0 = 1000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\rho = 740\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, R = 12 cm, H = 30 cm, r = 8 cm a h = 4 cm.

12.2 FO - 39 - I - A

Měděné vinutí o hmotnosti m dokonale tepelně izolované od okolí mělo při teplotě t_1 odpor R_1. Měrná tepelná kapacita mědi je c. Po připojení ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e a zanedbatelném vnitřním odporu se teplota t vinutí měnila v závislosti na době τ, po kterou procházel vinutím elektrický proud. Určete tuto závislost a sestrojte její graf v intervalu $\langle 0; \tau_1 \rangle$. Předpokládáme, že v daném intervalu lze závislost odporu na teplotě vyjádřit vztahem $R = R_0 (1 + \alpha \cdot t)$, kde R_0 je odpor při teplotě $0\ °\mathrm{C}$ a α je teplotní součinitel odporu.

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: m = 4,5 g, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $R_1 = 12{,}8\ \Omega$, $c = 893\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\tau_1 = 600\ \mathrm{s}$, $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$ a $U_e = 5\ \mathrm{V}$.

13. Struktura a vlastnosti plynů

13.1 FO - 40 - I - C

Vzduch v atmosféře se při proudění vzhůru adiabaticky rozpíná a ochlazuje, při proudění dolů se adiabaticky stlačuje a otepluje. V důsledku těchto dějů i v uklidněné atmosféře zakryté mraky teplota vzduchu klesá s rostoucí výškou a vztah mezi atmosférickým tlakem a teplotou je stejný jako při adiabatickém ději.

Za těchto podmínek vypustíme balon stálého objemu V naplněný vodíkem. Tlak vodíku v balonu se během stoupání vyrovnává pojistným ventilem s tlakem okolní atmosféry. Na zemi byl naměřen atmosférický tlak p_1 a teplota t_1. Ve výšce, do které chceme s balonem vystoupat, je atmosférický tlak p_2.

a) Jaká je v této výšce teplota vzduchu?

b) Kolik vodíku unikne během výstupu pojistným ventilem do atmosféry?

c) Jak se změní nosnost balonu?

Řešte obecně, pak pro hodnoty: $p_1 = 1 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $p_2 = 0{,}83 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$ a $V = 500\ \mathrm{m^3}$.

Vzduchu považujte za plyn s dvouatomovými molekulami, jehož molární hmotnost je $M_m = 29\ \mathrm{g \cdot mol^{-1}}$. Poissonova konstanta vzduchu i vodíku má hodnotu $\kappa = 1{,}4$.

13.2 FO - 57 - I - B

S ideálním plynem s dvouatomovými molekulami byl proveden kruhový děj 1-2-3-4-1 (viz obr. 34). Během jednoho cyklu přijal plyn od ohřívače teplo Q. Jaké teplo Q_1 přijme plyn od ohřívače při jednom cyklu 2-3-4-A-B-C-2, víme-li, že pro teploty platí $T_3 = 4T_1$ a bod 2, bod 4 a bod B leží na stejné izotermě? Přímka spojující body 1, B a bod 3 prochází počátkem pV diagramu. Určete teploty $T_2 = T_4 = T_B$ a teploty T_C a T_A. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $T_1 = 300\ \mathrm{K}$ a Q = 25 kJ. Vnitřní energie plynu s dvouatomovými molekulami je $U = \frac{5}{2} nRT$.

13.3 FO - 40 - I - B

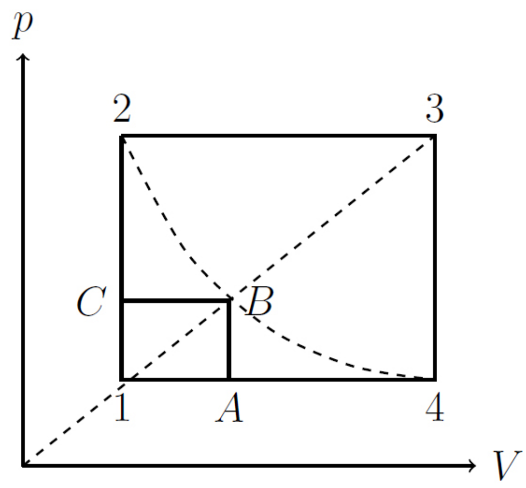
Dusík o hmotnosti m má počáteční tlak p_1 a teplotu t_1. Stlačíme jej na objem V_2 A) izotermicky, B) adiabaticky.

a) Určete pro každý děj tlak a teplotu dusíku po stlačení.

b) Zakreslete ve vhodném měřítku průběh obou dějů do téhož pV diagramu; každý děj přitom určete alespoň osmi body.

c) Vypočtěte pro oba děje práci spotřebovanou během stlačení dusíku.

Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: m = 5 g, $p_1 = 0{,}1\ \mathrm{MPa}$, $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, $V_2 = 1\ \mathrm{l}$, $\kappa = 1{,}4$, $A_r(\mathrm{N}) = 14$ a $R_m = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.



obr. 34

13.4 FO - 57 - I - C

Dva tepelné stroje pracují v cyklech ABCDA a A'B'C'D'A' podle obr. 35. Oba stroje pracují s ideálním plynem o stejném látkovém množství *n* s jednoatomovými molekulami. Při přechodech ze stavu C' do D' a ze stavu A' do B' je konstantní teplota.

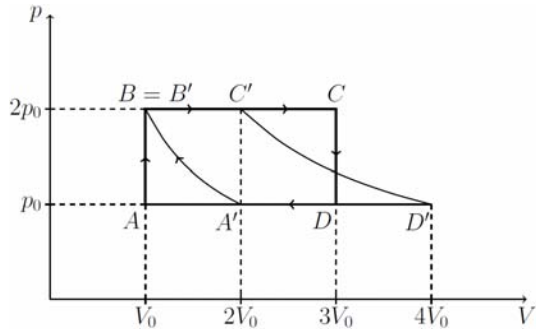
a) Určete teploty, se kterými stroje pracují v jednotlivých stavech A, B, C, D, A', B', C' a D'.

b) Určete práci vykonanou při jednom cyklu prvním a druhým tepelným strojem.

c) Určete přijaté teplo během jednoho cyklu prvním a druhým tepelným strojem.

d) Porovnejte účinnosti prvního a druhého tepelného stroje.

Řešte úlohu obecně a následně pro hodnoty: $n = 1$ mol, $V_0 = 10\,\mathrm{l}$, $p_0 = 1\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $C_V = \frac{3}{2}R_m$ a $C_p = \frac{5}{2}R_m$



obr. 35

14. Struktura a vlastnosti pevných látek

14.1 FO - 40 - I - B

a) Ocelová struna piana naladěná na základní tón a^1 o frekvenci 440 Hz má délku 40 cm. Určete normálové napětí struny, je-li velikost fázové rychlosti příčného vlnění na struně určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}},$$

kde σ je normálové napětí struny a $\rho = 7900\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota materiálu, z něhož je struna vyrobena.

b) Struny piana jsou napnuty na masivním litinovém rámu. Přeneseme-li piano ze studeného prostředí do vyhřáté místnosti, piano se rozladí, protože tenké struny se rychle zahřejí na teplotu místnosti, zatímco rám se bude ohřívat jen zvolna. Jak se změní frekvence tónu struny z úlohy a), zvýší-li se její teplota o 10 K a teplota rámu se nezmění? Teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli je $\alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$ a Youngův modul pružnosti v tahu je $E = 2{,}2\cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa}$.

14.2 FO - 31 - C

Kovové těleso o hmotnosti m_1 a teplotě t_1 bylo vloženo do tepelně izolované nádoby o objemu V_0. Potom byla nádoba pevně uzavřena. Vzduch měl před vložením tělesa do nádoby teplotu t_0 a tlak p_0. Kovové těleso má hustotu ρ, měrnou tepelnou kapacitu c a součinitel teplotní délkové roztažnosti α. Určete tlak plynu po dosažení tepelné rovnováhy v nádobě. Vzduch považujte za dvouatomový ideální plyn, změnu teploty nádoby zanedbejte. Řešte nejdříve obecně, pak pro hodnoty: $m_1 = 1\ \mathrm{kg}$, $p_0 = 1\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, $t_1 = 200\ \mathrm{°C}$, $t_0 = 0\ \mathrm{°C}$, $V_0 = 10\ \mathrm{dm}^3$, $c = 383\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, $\alpha = 17\cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ a $\rho = 8{,}93\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

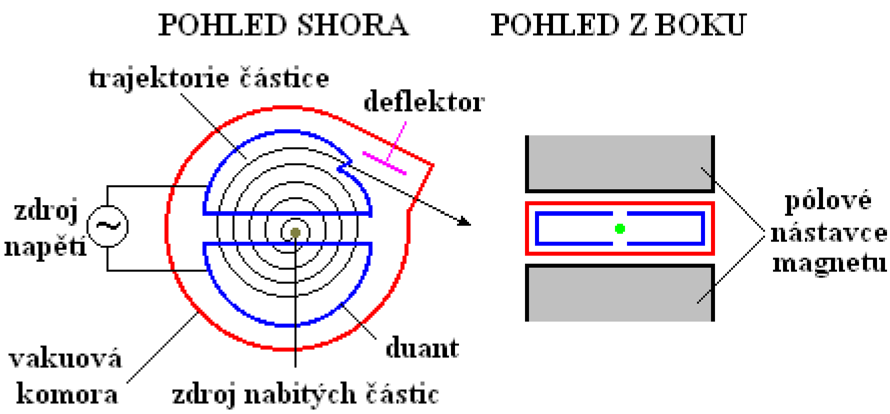
Pro zadané hodnoty ověřte, zda lez zanedbat při řešení úlohy i změny objemu kovového tělesa.

15. Speciální teorie relativity

15.1 FO - 40 - I - A

K urychlování nabitých částic byl v roce 1931 sestrojen první kruhový urychlovač - cyklotron. Jeho schéma je zobrazené na obr. 36. Mezi póly silného elektromagnetu, který vytváří homogenní magnetické pole s magnetickou indukcí $\vec{B}$, se ve vakuové komoře nacházejí dvě půlválcové urychlovací elektrody, tzv. duanty, připojené ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí o amplitudě U_m a frekvenci *f*. Částice vznikající úplnou ionizací molekul plynu (vodíku, deuteria, helia) přiváděného od zdroje iontů, který je umístěn uprostřed vakuové komory, mají klidovou hmotnost m_0 a náboj *Ze*. Uvnitř duantů se pohybují po trajektorii ve tvaru kružnice a při každém průchodu mezerou mezi duanty jsou urychleny elektrickým polem. Výsledný pohyb částic se děje po spirále až do průchodu výstupním otvorem v jednom z duantů, za kterým částice dopadají na vhodný terčík. Cyklotrony se využívají v částicové fyzice dodnes.

Uvažujme cyklotron, který slouží k urychlení deuteronů ($m_0 = 3{,}34\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, $Z = 1$) na kinetickou energii $E_k = 15\ \mathrm{MeV}$. Magnetická indukce v komoře má velikost $B = 1{,}4\ \mathrm{T}$. Vysokofrekvenční napětí duantů má amplitudu $U_m = 160\ \mathrm{kV}$.



obr. 36

a) Porovnejte klidovou a kinetickou energii deuteronů a ověřte, že v prvním přiblížení můžeme jich hmotnost považovat za konstantní. Za tohoto předpokladu řešte nerelativisticky úlohy b) až d).

b) Princip činnosti cyklotronu vychází z poznatku, že frekvence, se kterou částice stálé hmotnosti obíhá po kružnici kolmo k indukčním čarám v homogenním magnetickém poli, nezávisí na poloměru trajektorie. Určete hodnotu této frekvence pro uvažovaný cyklotron.

c) Urychlení částice proběhne optimálně, když při každém průchodu částice mezerou mezi duanty je na nich právě napětí U_m. Kolik oběhů v takovém případě částice vykoná, než vyletí výstupním otvorem?

d) Jak velkou rychlost získají deuterony a jaký bude poloměr poslední kružnicové trajektorie?

e) Relativistické zvětšení hmotnosti částice během urychlení omezuje použití cyklotronu do energií řádově desítek MeV. Určete relativisticky, s přihlédnutím ke změně hmotnosti částice, velikost rychlosti vyletujících deuteronů, poloměr poslední kružnice a odpovídající frekvenci obíhání. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými v bodech b) a d).

16. Fyzika mikrosvěta

16.1 FO - 57 - I - A

V lékařství se při hledání vad prokrvování srdce používá izotop ${}^{231}_{90}\mathrm{Th}$. Aplikuje se ve formě rozpustné soli a jeho aktivita se měří po dobu 50 hodin. Naměřené hodnoty jsou zaznamenány v tab. 2.

$\frac{t}{\mathrm{h}}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$\frac{A}{10^8\ \mathrm{Bq}}$	2,89	2,52	2,21	1,92	1,68	1,47	1,28	1,12	0,98	0,85	0,74

tab. 2

a) ${}^{231}_{90}\mathrm{Th}$ je β^- zářič. Napište rovnici rozpadu.

b) Sestrojte graf závislost aktivity na čase, určete poločas rozpadu T a rozpadovou konstantu λ.

c) Kolik atomů ${}^{231}_{90}\mathrm{Th}$ obsahoval původní vzorek a jaká byla hmotnost radioaktivního thoria v původním vzorku?

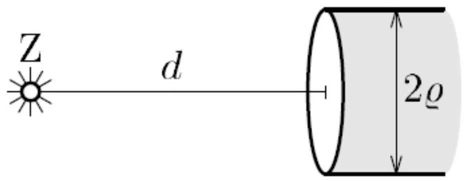
d) Jaká bude aktivita původního vzorku thoria po 30 dnech?

16.2 FO - 43 - I - A

Malý radioaktivní zářič obsahující radioaktivní nuklid ${}^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ je umístěn ve vzdálenosti $d = 5$ cm od kruhového vstupního okénka scintilačního detektoru na jeho ose souměrnosti (viz obr. 37). Okénko má poloměr $\rho = 15\ \mathrm{mm}$ a za dobu $\tau = 100\ \mathrm{s}$ zachytí $N_1 = 1450$ částic β vyslaných zářičem.

a) Jaká je celková aktivita zářiče?

b) Kolik atomů ${}^{90}_{38}\mathrm{Sr}$ zářič obsahuje a jaká je jejich celková hmotnost, jestliže relativní atomová hmotnost nuklidu je $A_r = 89{,}9$ a poločas rozpadu je $T = 28$ roků?



obr. 37

16.3 FO - 53 - I - A

Přírodní čistý uran tvoří směs izotopů ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ a ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, přičemž $p_1 = 0{,}72\ \%$ hmotnosti připadá na ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ a zbytek na ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$. Poločas rozpadu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ je $T_1 = 7{,}038 \cdot 10^8$ let, poločas rozpadu ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ je $T_2 = 4{,}468 \cdot 10^9$ let.

a) Jaká je aktivita vzorku přírodního uranu o hmotnosti $m = 1$ kg?

b) V gabunském Oklo došlo před asi 1,9 mld. let k zapálení přírodního reaktoru. Jaké bylo tehdy procentuální hmotnostní zastoupení ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ v přírodním čistém uranu?

Při rozštěpení jádra ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ pomalými neutrony může vzniknout např. jádro ${}^{143}_{56}\mathrm{Ba}$ s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Ba}} = 142{,}92062 \cdot m_{\mathrm{u}}$ a jádro ${}^{90}_{36}\mathrm{Kr}$ s klidovou hmotností $m_{\mathrm{Kr}} = 89{,}919524 \cdot m_{\mathrm{u}}$.

c) Napište rovnici reakce a vypočítejte energii reakce. Klidová hmotnost neutronu je $m_{\mathrm{n}} = 1{,}0086649 \cdot m_{\mathrm{u}}$, klidová hmotnost jádra ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ je $m_{\mathrm{U}} = 235{,}0439 \cdot m_{\mathrm{u}}$.

d) Štěpení uranu v přírodním reaktoru probíhalo asi 500000 let a vyhořelo přitom asi 5 tun uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Jaká energie se přitom uvolnila, předpokládáme-li že se při rozštěpení jednoho jádra uvolní průměrně energie $E_1 = 200\ \mathrm{MeV}$? Porovnejte tuto energii s průměrnou denní spotřebou jednoho člověka (veškerou energií spotřebovanou civilizací za jeden den v průmyslu, v dopravě, při vytápění atd. vydělenou počtem obyvatel planety), která se odhaduje na 0,36 GJ.

<u>Zdroje a inspirace úloh:</u>

[1] http://fyzikalniolympiada.cz/, [citováno 19. 1. 2020]

Sbírka neprošla jazykovou úpravou. Za případné chyby se omlouvám a prosím na jejich upozornění.