ZRYCHLENÍ KMITAVÉHO POHYBU

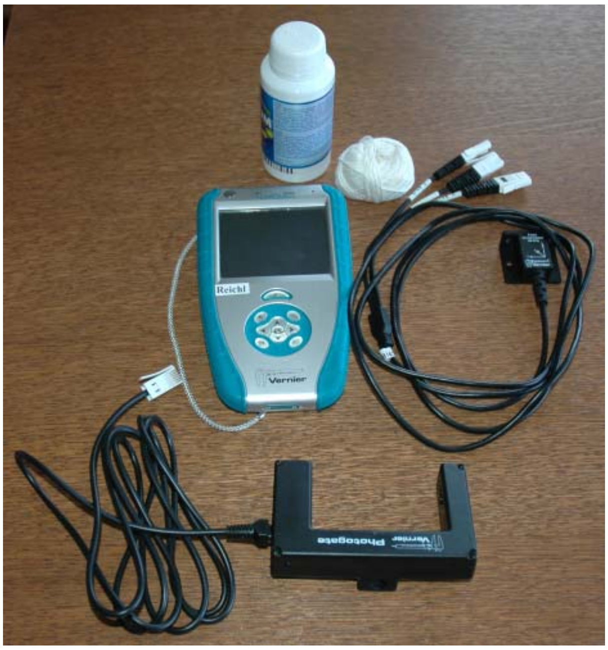
Pomůcky:

tříosé čidlo zrychlení 3D-BTA (základní měření lze realizovat i s jednoosým čidlem zrychlení), optická závora VPG-BTD, větší lékovka (nebo nádobka od vitamínů), provázek, izolepa, LabQuest, program LoggerPro

Postup:

Kmitavý pohyb je pohyb velmi důležitý, neboť pomocí něho lze modelovat a simulovat řadu dalších fyzikálních jevů. Proto je nezbytné, chceme-li pomocí kmitavého pohybu modelovat další fyzikální jevy, tento pohyb velmi dobře znát a chápat jeho zákonitosti.

K proměření velikosti okamžitého zrychlení kyvadla jsem využil nádobku od vitamínů, provázek, LabQuest, tříosé čidlo zrychlení a optickou závoru (viz obr. 1).



obr. 1

K nádobce od vitamínů jsem přivázal provázek tak, aby byl kolem jejího hrdla uvázán symetricky a nádobka visela v rovnovážné poloze ve svislé poloze (viz obr. 2). Toho jsem docílil tak, že jsem nejdříve uvázal provázek kolem hrdla nádobky a teprve k tomuto úchytu přivázal delší provázek tvořící závěs kyvadla. Výhoda takového připevnění spočívá ve snadném posunování dlouhých závěsů po provázku uvázaném kolem hrdla nádobky a ve vyvažování zavěšené nádobky do svislé polohy. Do nádobky jsem pak nalil vodu, aby se zvýšila její hmotnost. Takto vyrobené kyvadlo jsem při dalších úvahách považoval za matematické kyvadlo, což je možná na první pohled velké zanedbání, ale pro dále provedené měření a jeho vyhodnocení byly úvahy o matematickém kyvadle dostatečné.

Před vlastním měřením jsem k nádobce připevnil čidlo zrychlení systému Vernier (viz obr. 3). Připevnění čidla nebylo snadné, neboť čidlo má rovné plochy, zatímco hlavní část nádobky je válcového tvaru. Za použití izolepy se ale podařilo čidlo zrychlení připevnit a usadit do takové polohy, že jedna jeho osa mířila v rovnovážné poloze kyvadla svisle dolů.

Takto připravené kyvadlo jsem v domácích podmínkách zavěsil na hliníkové schůdky (viz obr. 4) a upravil závěs nádobky. Bylo nutné docílit toho, aby připravené kyvadlo s upevněným čidlem zrychlení viselo v rovnovážné poloze svisle, kmitalo v jedné svislé rovině a přívodní vodič čidla zrychlení neovlivňoval významně pohyb celého kyvadla. Toto nastavení jsem prováděl pomocí šikovně vyřešeného závěsu nádobky.

Po nastavení kyvadla a jeho závěsu do optimální polohy byly osy čidla zrychlení nastaveny takto:

1. osa x čidla mířila svisle dolů (tj. ve směru tíhového zrychlení);
2. osa y čidla mířila kolmo ke směru pohybu kyvadla;
3. osa z čidla mířila ve směru (resp. proti směru) pohybu kyvadla.

Na podlahu pod hliníkové schůdky, na které jsem zavěsil vyrobené kyvadlo, jsem umístil optickou závoru tak, aby v ní mohlo kyvadlo volně kývat (viz obr. 5).

obr. 2

obr. 3

obr. 4

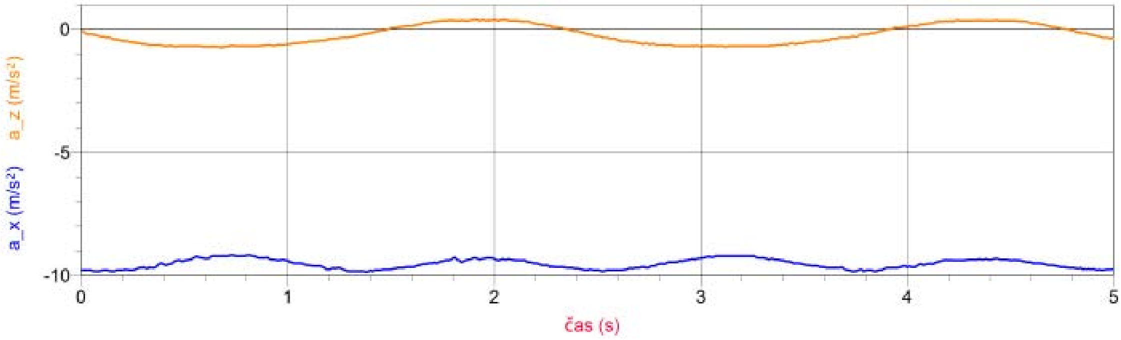
obr. 5

Čidlo zrychlení i optickou závoru jsem připojil k LabQuestu. V kartě *Režim* jsem nastavil *Režim optické závory* na *Kyvadlo* a na téže kartě po právě provedeném nastavení dále zvolil *Ukončit záznam dat po 5 událostech*. Více průchodů kyvadla rovnovážnou polohou jsem záměrně nechtěl volit, neboť s rostoucím počtem kyvů se pohyb kyvadla tlumil a vlivem ne zcela dokonalého vyvážení čidla zrychlení na kyvadle kyvadlo nekývalo symetricky.

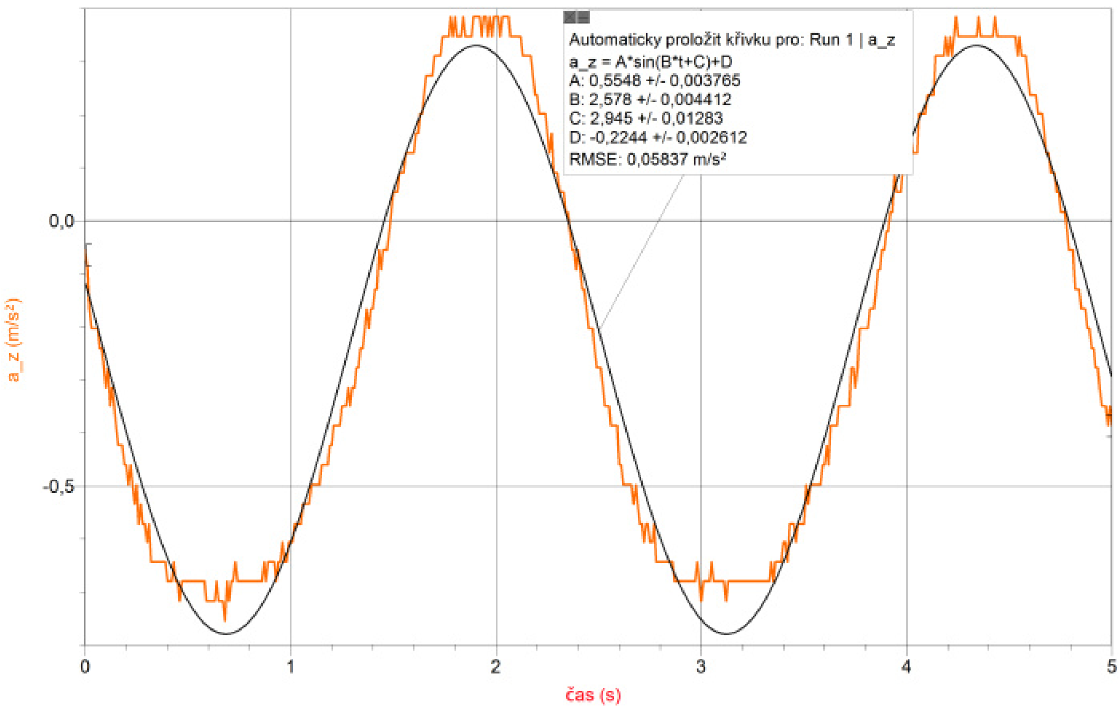
Poté jsem oparně rozkýval připravené kyvadlo tak, aby kývalo stále ve stejné svislé rovině a spustil měření. Po skončení měření jsem naměřená data importoval do programu LoggerPro a dále je zpracoval.

Na obr. 6 jsou zobrazeny časové průběhy zrychlení ve směru osy x a ve směru osy z. V rovnovážné poloze kyvadla, které je v klidu, je zrychlení ve směru osy x totožné s tíhovým zrychlením a zrychlení ve směru osy z je vlastně tečné zrychlení kyvadla, které se pohybuje po části kružnice. Na první pohled je zřejmé, že oba grafy zobrazené na obr. 6 mají odlišnou periodu. Při bližším zkoumání těchto grafů zjistíme, že perioda časové závislosti x-ové složky zrychlení je poloviční ve srovnání s periodou časové závislosti z-ové složky zrychlení.

Příčina tohoto jevu je zřejmá: perioda časové závislosti x-ové složky zrychlení při pohybu kyvadla z jeho rovnovážné polohy směrem k amplitudě a zpět do rovnovážné polohy je dána právě časem, který uplyne mezi dvěma po sobě jdoucími průchody rovnovážnou polohou. Při pohybu kyvadla do druhé maximální polohy se bude graf opakovat - x-ová složka zrychlení je nezávislá na směru pohybu kyvadla z rovnovážné polohy.



obr. 6



obr. 7

Perioda časové závislosti z-ové složky zrychlení pohybujícího se kyvadla je ale závislá na směru pohybu kyvadla z rovnovážné polohy (kyvadlo stále ale kýve ve stejné svislé rovině). Proto je perioda časové závislosti z-ové složky zrychlení dvojnásobná vzhledem k periodě časové závislosti x-ové složky zrychlení. A perioda z-ové složky zrychlení je totožná s periodou pohybu kyvadla.

Detailní pohled na časovou závislost z-ové složky zrychlení kyvadla je zobrazen na obr. 7, na kterém je též zobrazena statistika vytvořená v programu LoggerPro.

Rovnice pro okamžitou velikost z-ové složky zrychlení je popsána vztahem

$$a_z = a_{zmax} \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

kde a_{zmax} je amplituda z-ové složky zrychlení, φ_0 je počáteční fáze daného kmitavého pohybu a

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

je úhlová frekvence daného kmitavého pohybu.

Srovnáním statistiky zobrazené na obr. 7 se vztahem (1) získáme $\omega = 2{,}578\ \mathrm{s}^{-1}$. Periodu T získáme ze vztahu (2) ve tvaru

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3}$$

Dosazením do vztahu (3) dostaneme periodu kmitání $T = 2{,}44\ \mathrm{s}$.

Právě vypočtenou periodu je možné porovnat s periodou záznamu z optické závory, který je zobrazen na obr. 8. Počáteční nesymetrie grafu odpovídá počáteční fázi kmitání (tj. doba do prvního zakrytí čidla optické závory kyvadlem je dána počáteční výchylkou, z níž bylo kyvadlo spuštěno). Perioda kmitání odečtená z grafu zobrazeného na obr. 8 vychází (dle programu LoggerPro) $T_{optzav} = 2{,}42\ \mathrm{s}$. Je důležité si uvědomit, že pohybující se kyvadlo zakrývá čidla optické závory během jedné periody kmitání dvakrát - proto je nutné odečíst časový interval ne mezi dvěma po sobě jdoucími stavy 1, ale časový interval, který uplyne mezi dosažením prvního stavu 1 a třetího stavu 1! Takto odečtená perioda T_{optzav} je v dobré shodě s periodou T vypočtenou na základě grafu závislosti z-tové složky zrychlení na čase.

obr. 8

Z grafu na obr. 8 lze také odečíst dobu, po kterou bylo čidlo optické závory zakryto. To je doba, která uplynula mezi dosažením stavu 1 a dosažením bezprostředně následujícího stavu 0. V programu LoggerPro lze tuto dobu určit na $\Delta t = 0{,}07\ \mathrm{s}$. Ze znalosti průměru d nádobky použité k výrobě kyvadla lze vypočítat maximální velikost rychlosti, kterou kyvadlo prochází rovnovážnou polohou. Pro tuto velikost rychlosti v platí vztah

$$v = \frac{d}{\Delta t}. \tag{4}$$

Vzhledem k tomu, že průměr nádobky je 5,1 cm, dostáváme pro velikost rychlosti, kterou prochází kyvadlo rovnovážnou polohou, na základě vztahu (4) $v = 0{,}73\ \mathrm{m.s}^{-1}$.

Na první pohled může překvapit relativně velká velikost rychlosti pohybu kyvadla v rovnovážné poloze. Jednoduchou úvahou, která vyplývá ze zákona zachování mechanické energie, lze ukázat, že vypočtená velikost rychlosti je v pořádku. Vychýlíme-li kyvadlo na začátku experimentu do výšky h nad jeho rovnovážnou polohu, má v této poloze kyvadlo (vzhledem ke své rovnovážné poloze) jistou potenciální energii E_{p} definovanou vztahem

$$E_{\mathrm{p}} = mgh\,, \tag{5}$$

kde m je hmotnost kyvadla. Nebudeme-li uvažovat ztráty způsobené odporovou silou vzduchu, přemění se potenciální energie na kinetickou energii E_{k}, která je maximální v rovnovážné poloze kyvadla. Pro kinetickou energii platí vztah

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{6}$$

Přeměna potenciální energie kyvadla na jeho kinetickou energii je popsána zákonem zachování energie, který v tomto případě můžeme psát ve tvaru

$$E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}}\,. \tag{7}$$

Dosazením vztahů (5) a (6) do vztahu (7) lze získat vyjádření výšky h, do níž bylo kyvadlo na počátku experimentu vychýleno, ve tvaru

$$h = \frac{v^2}{2g}\,. \tag{8}$$

Dosazením velikosti rychlosti vypočtené na základě vztahu (4) do vztahu (8) získáme $h = 2{,}7$ cm. Tato hodnota je reálná, a proto je reálná i velikost rychlosti kyvadla v rovnovážné poloze. Ve skutečnosti byla výška h vychýlení kyvadla větší, neboť část mechanické energie kyvadla se spotřebovala na překonání odporových sil vzduchu.

Již bylo řečeno, že vyrobené kyvadlo lze poměrně dobře považovat za matematické kyvadlo. Proto lze na základě vztahu pro periodu T_{k} jeho kmitání určit délku l jeho závěsu. Perioda T_{k} matematického kyvadla je dána vztahem (který je odvozen např. v [2])

$$T_{\mathrm{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{9}$$

kde g je velikost místního tíhového zrychlení. Ze vztahu (9) lze vyjádřit délku l závěsu kyvadla ve tvaru

$$l = \frac{T_{\mathrm{k}}^2}{4\pi^2}g\,. \tag{10}$$

Po dosazení hodnot $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ a $T_{\mathrm{k}} = T = 2{,}44\ \mathrm{s}$ do vztahu (10) dostaneme $l = 1{,}48$ m. Tato délka přitom odpovídá délce závěsu určené na základě měření skutečného závěsu kyvadla.

Zdroje

[1] http://www.vernier.com
[2] Matematické kyvadlo v Multimediální encyklopedii fyziky
[3] zdrojová data se záznamem měření se senzorem akcelerometr a optická závora