Jaroslav Reichl, © 2009

KMITÁNÍ PRUŽINY

Pomůcky:

LabQuest, sonda siloměr, těleso kmitající na pružině

Postup:

Těleso zavěsíme na pružinu a tu zavěsíme na pevně upevněný siloměr (viz obr. 1). Sondu připojíme k LabQuestu a nastavíme frekvenci měření na 50 Hz a rozkmitáme těleso zavěšené na pružině. Aby bylo měření přesnější, je vhodné udělit oscilátoru větší počáteční výchylku, případně měření v průběhu kmitání tělesa na pružině zopakovat vícekrát. Tím alespoň částečně eliminujeme případné nepravidelnosti v kmitání, které mohly vzniknout při počátečním vychylování tělesa zavěšeného na pružině. Pro dosažení kvalitních výsledků je nutné, aby těleso kmitalo pouze ve vertikálním směru.

obr. 1

Graf závislosti velikosti okamžité síly působící na pružinu na čase je zobrazen na obr. 2. Těleso kmitalo na pružině ve vzduchu, přesto je možné na základě grafu na obr. 2 zanedbat vliv odporových sil. Velikost maximální síly je totiž v grafu na obr. 2 v průběhu uvažovaného měření téměř konstantní. Proto můžeme kmitání považovat za netlumené.

S využitím grafu zobrazeného na obr. 2 řešte následující úlohy:

1. Určete hmotnost tělesa, které na pružině kmitalo.

2. Určete maximální hodnotu síly, která na kmitající těleso působila.

3. Určete amplitudu velikosti proměnné síly působící na kmitající těleso.

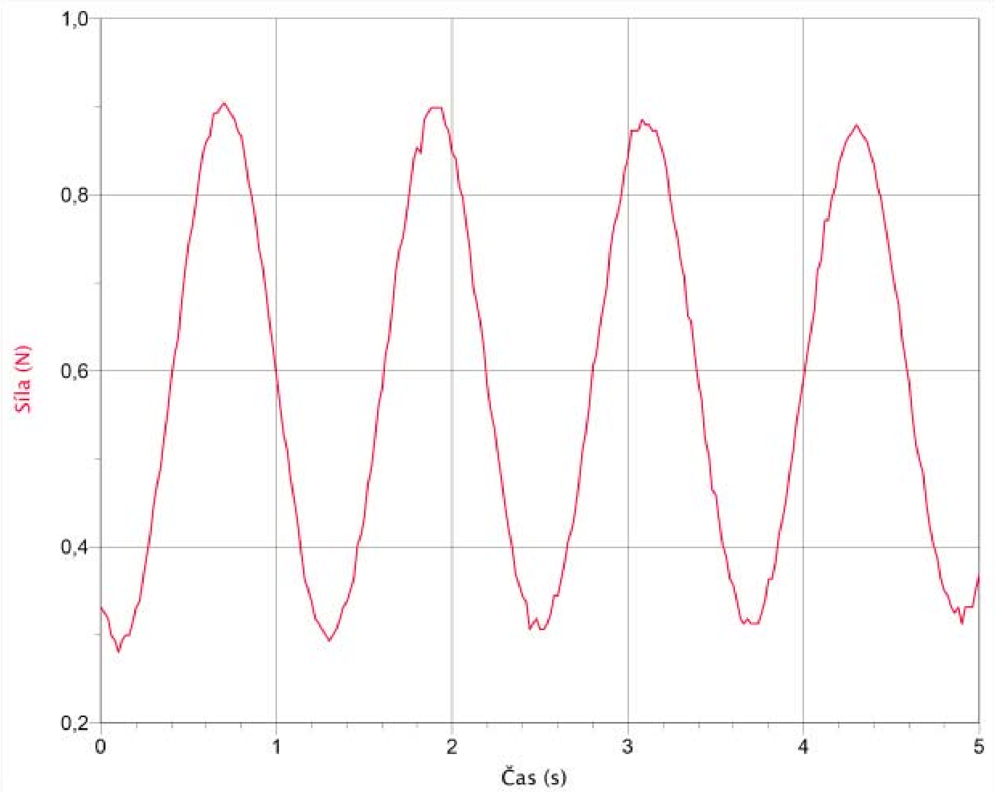
4. Určete periodu kmitání tělesa zavěšeného na pružině.

5. Napište rovnici pro okamžitou velikost síly působící na těleso v závislosti na čase.

6. Vypočítejte maximální zrychlení, s jakým se těleso pohybovalo.

7. Vypočítejte na základě dosud zjištěných údajů tuhost použité pružiny.

8. Určete tuhost použité pružiny jiným způsobem a výsledky porovnejte.



obr. 2

Řešení:

Zadané úlohy lze vyřešit na základě grafu zobrazeného na obr. 2 nebo s využitím programu Logger Lite, v němž otevřeme zdrojový soubor dat.

1. S využitím statistiky programu Logger Lite (*Analyze - Statistics* resp. *Analýza - Statistika*), která je zobrazená na obr. 3, lze odečíst průměrnou hodnotu okamžité síly: 0,58 N. Tato hodnota síly odpovídá síle, která na kmitající těleso působí tehdy, když se těleso nachází v rovnovážné poloze.

Statistika pro: Remote Data | Síla
min: 0,2803 v 0,1000 max: 0,9047 v 0,7000
průměr: 0,5809 medián: 0,5670

obr. 3

Sonda systému měří velikost síly, kterou působí pružina se zavěšeným tělesem na měřící systém sondy. Vzhledem k tomu, že hmotnost pružiny je zanedbatelná vzhledem ke hmotnosti tělesa, můžeme tvrdit, že sonda měří velikost síly, kterou působí těleso na pružinu (a touto silou tedy působí i soustava těleso + pružina na měřící systém sondy). A podle třetího Newtonova zákona (zákon akce a reakce) je tato síla stejně velká jako síla, kterou působí pružina na těleso.

Síla, kterou tedy sonda měří, je výslednice tíhové síly, kterou na těleso zavěšené na pružině působí Země, a síly pružnosti, kterou na toto těleso působí pružina. Je-li těleso v rovnovážné poloze, je síla pružnosti nulová a sonda tedy měří přímo tíhovou sílu tělesa. Proto síla určená s vyžitím statistiky (viz obr. 3) je velikost tíhové síly $\overrightarrow{F_{\mathrm{G}}}$ tělesa zavěšeného na pružině. Vzhledem k tomu, že pro velikost tíhové síly platí vztah $F_{\mathrm{G}} = mg$, kde m je hmotnost tělesa a g je velikost tíhového zrychlení, můžeme pro hmotnost psát $m = \frac{F_{\mathrm{G}}}{g}$. Po dosazení máme $m = \frac{0,58}{9,81}\,\mathrm{kg} = 0,059\,\mathrm{kg}$.

Hmotnost tělesa tedy je 59 gramů.

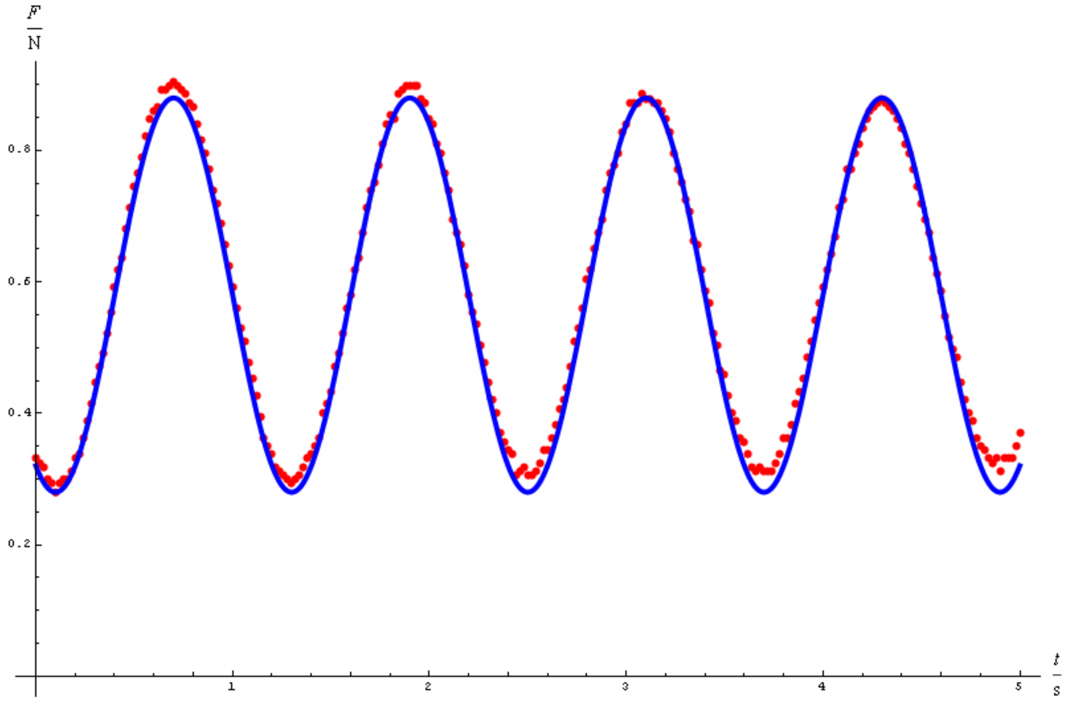
2. Na kmitající těleso působila maximální síla o velikosti 0,90 N (viz statistika zobrazená na obr. 3).

3. Amplituda proměnné síly, která na těleso působila, má velikost zhruba 0,30 N. Je to rozdíl mezi maximální velikostí síly a průměrnou velikostí síly resp. mezi průměrnou velikostí síly a její minimální velikostí (viz statistika zobrazená na obr. 3). Fyzikálně se jedná o největší velikost síly pružnosti.

4. Perioda kmitání tělesa zavěšeného na pružině je podle grafu zobrazeného na obr. 2 $T = 1,2\,\mathrm{s}$.

5. Abychom mohli napsat rovnici popisující závislost velikosti okamžité síly na čase, musíme znát i počáteční fázi φ_0 kmitání. Tu určíme z podmínky platné pro rovnovážnou polohu ve tvaru $\omega t_0 + \varphi_0 = 0$, kde $t_0 = 0,4\,\mathrm{s}$ je čas, v němž na těleso poprvé působí nulová síla pružnosti. Pro počáteční fázi φ_0 tedy dostáváme $\varphi_0 = -\omega t_0 = -\frac{2\pi}{T}t_0$ a po dosazení máme $\varphi_0 = -\frac{2\pi}{1,2}0,4 = -0,67\pi$. Rovnice popisující závislost velikosti okamžité síly působící na těleso na čase má tedy tvar $F = 0,30\sin\left(1,67\pi t - 0,67\pi\right) + 0,58$.

Právě napsaná rovnice je v dobré shodě s experimentálními daty - na obr. 4 jsou zobrazena jak data získaná během experimentu, tak teoreticky odvozená závislost. Shoda obou grafů je velmi dobrá.



obr. 4

6. Velikost maximálního zrychlení *a*, s jakým se těleso pohybovalo, určíme pomocí druhého Newtonova zákona, jehož matematické vyjádření lze psát ve tvaru $a = \frac{F_{\max}}{m}$, kde $F_{\max}$ je největší velikost síly pružnosti působící na kmitající těleso. Můžeme tedy dosadit $a = \frac{0,300}{0,059}\ \mathrm{m.s^{-2}} = 5,08\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Maximální velikost zrychlení má tedy velikost $5,08\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

7. Tuhost pružiny *k* souvisí s úhlovou frekvencí ω a s hmotností *m* tělesa vztahem $k = \omega^2 m$. Po dosazení tedy postupně dostáváme $k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 m = \left(\frac{2.3,14}{1,2}\right)^2 .0,059\ \mathrm{N.m^{-1}} = 1,62\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

Tuhost použité pružiny je $1,62\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

8. Druhý způsob, jak určit tuhost pružiny vyplývá přímo z definice tuhosti pružiny. Stačí změřit délku nezatížené pružiny (viz obr. 5) a poté délku zatížené pružiny (viz obr. 6), která je ovšem klidu. Na základě těchto měření dostáváme $l_1 = 6\ \mathrm{cm}$ a $l_2 = 40\ \mathrm{cm}$. V rovnovážné poloze tělesa je tíhová síla $\overrightarrow{F_G}$ v rovnováze se silou pružnosti $\overrightarrow{F_p}$. Proto pro velikosti těchto sil platí $F_G = F_p$. Po dosazení dostáváme $mg = k_2.\Delta l$, kde Δl je prodloužení pružiny definované vztahem $\Delta l = l_2 - l_1$. Pro tuhost pružiny k_2 tak dostáváme $k_2 = \frac{mg}{\Delta l} = \frac{mg}{l_2 - l_1}$. Po dosazení tedy máme $k_2 = \frac{0,059.9,81}{0,40 - 0,06}\ \mathrm{N.m^{-1}} = 1,70\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

Tuhost pružiny určená druhou metodou je $1,70\ \mathrm{N.m^{-1}}$, což je s první metodou velmi dobrá shoda.

obr. 5

obr. 6

Odkazy:

Notebook programového systému Mathematica, v němž je možné zobrazit nalezený teoretický průběh velikosti síly spolu s experimentálními daty.

Kmitání způsobené silou pružnosti - teoretický základ problematiky (Multimediální encyklopedie fyziky)