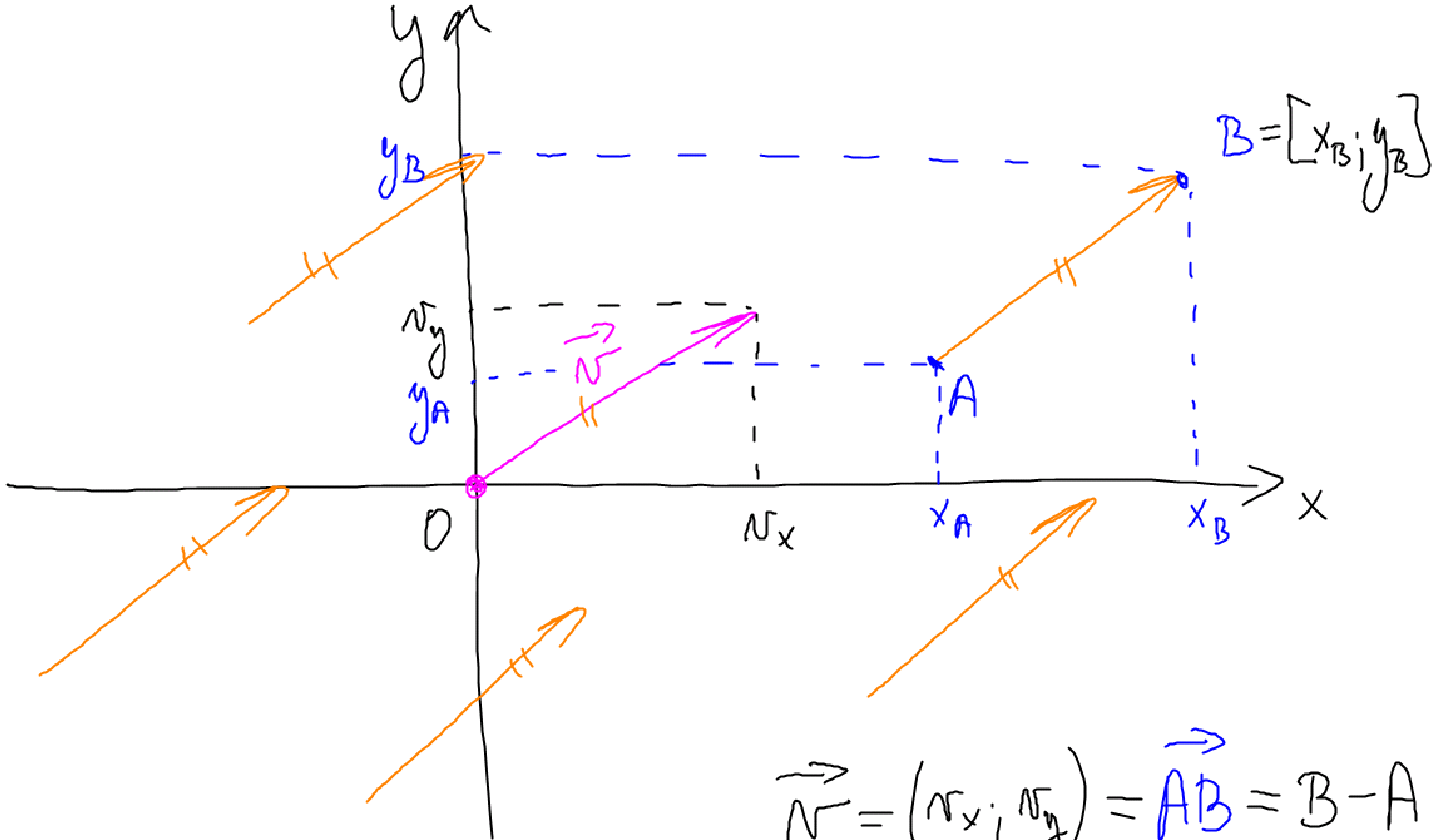
MATEMATIKA

Vektory

- „úsečka se šipkou"; orientovaná úsečka
- vektor – popsán pomocí $\boxed{\text{souřadnic}}$
  - zatím v rovině
  - vektor umístěn do počátku soustavy souřadnic – bod [0;0]



$$\vec{v} = (v_x; v_y) = \overrightarrow{AB} = B - A$$
$$= (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

JEDEN VEKTOR V 6 UMÍSTĚNÍCH

Rovina: Oxy

lze volit BÁZI – „skupina základních vektorů, pomocí nichž lze vyjádřit ostatní"

vlastnosti vektorů báze:

- lineárně nezávislé vektory
- vektory GENERUJÍ daný prostor (rovinu)
- počet těchto vektorů = dimenzi prostoru

Vysvětlení

- vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ... lineárně závislé $\Leftrightarrow$ jeden lze napsat jako lineární kombinaci ostatních

$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{o}$

$\wedge \; \boxed{\alpha_1 \neq 0} \vee \alpha_2 \neq 0 \vee \dots \vee \alpha_n \neq 0$

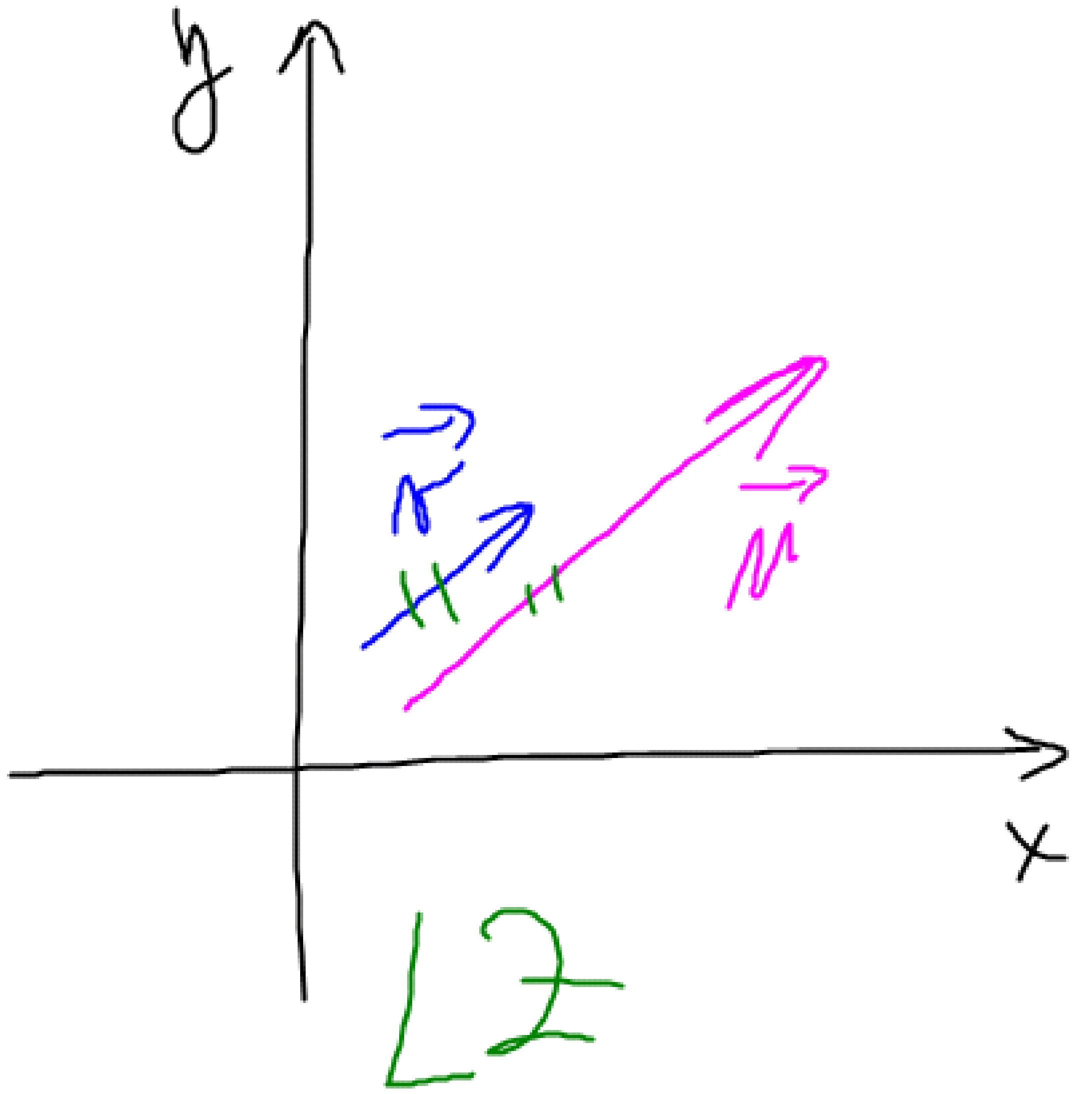
$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \underbrace{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{v}_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{v}_n}_{LK}$$

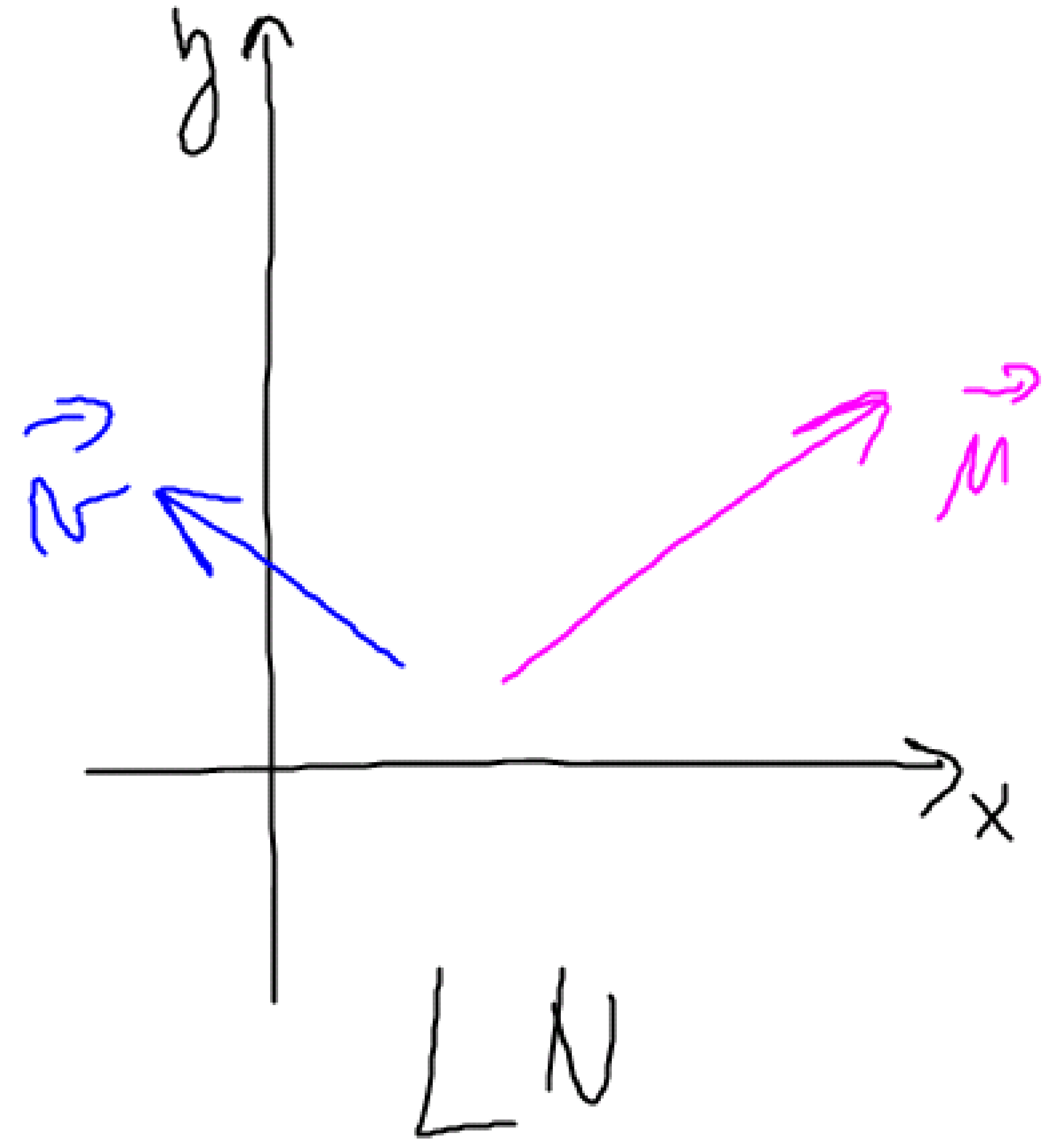
• vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ ... lineárně nezávislé $\Leftrightarrow$

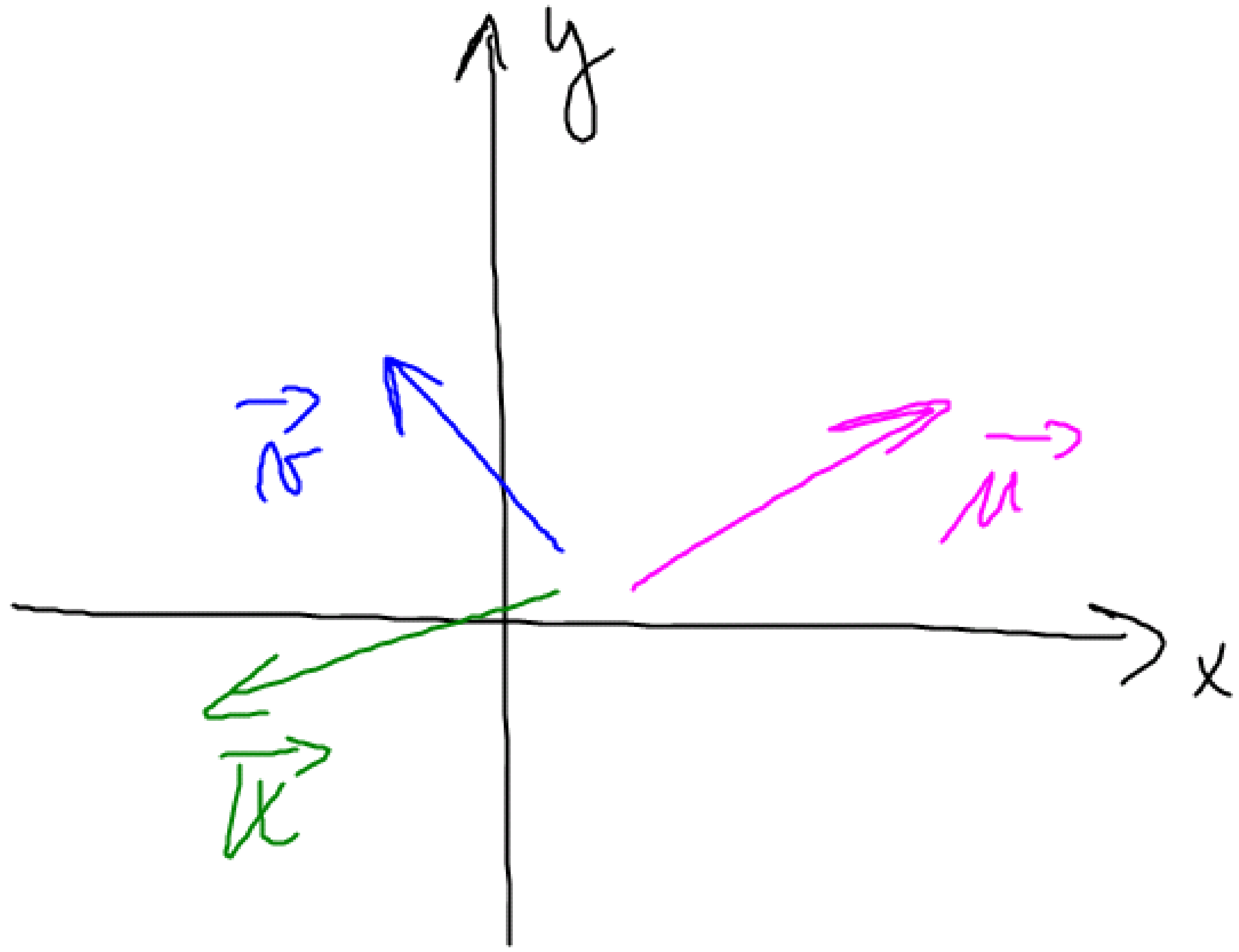
$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{o}$$

$$\wedge\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

v rovině







LZ, protože

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

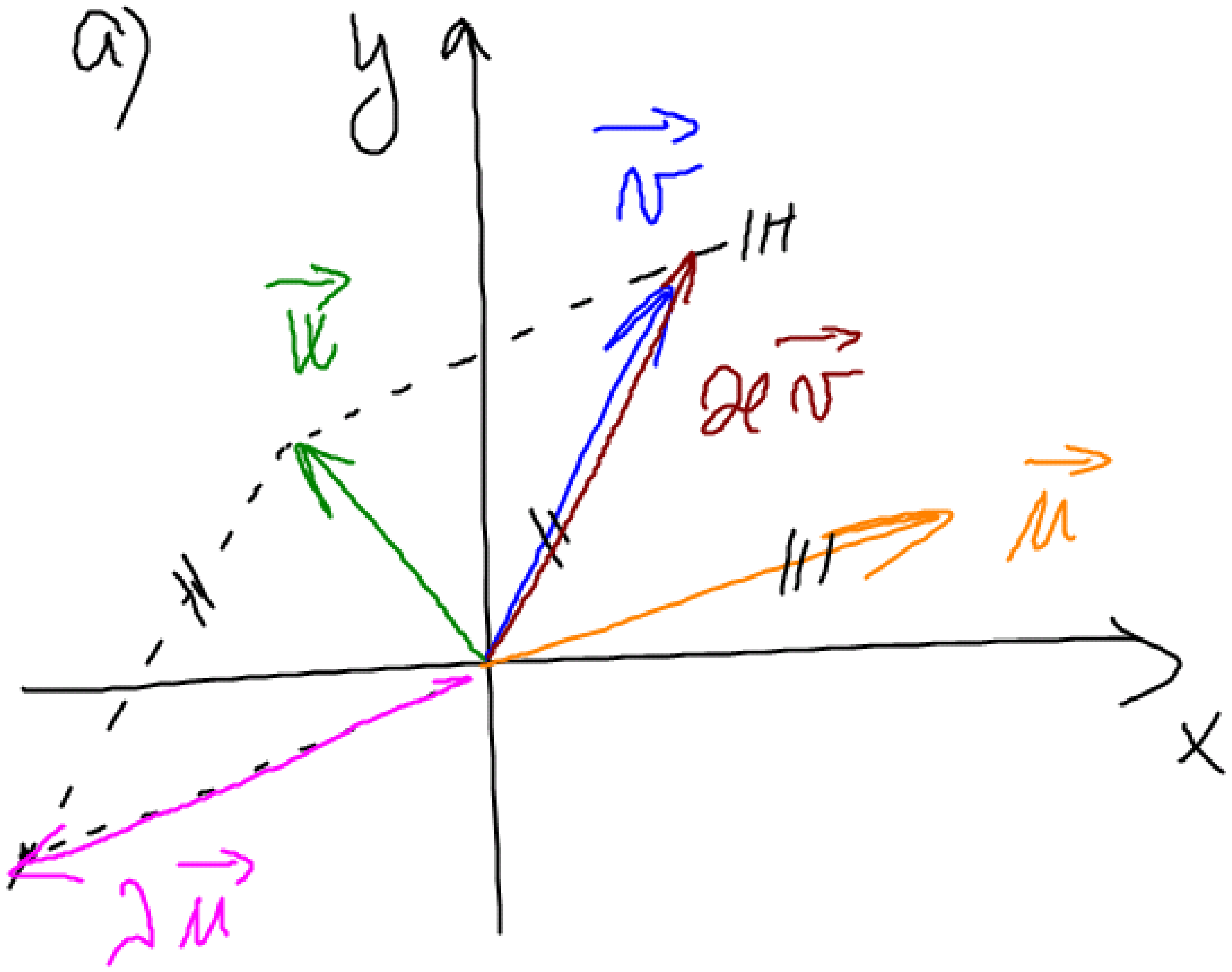
jeden je LK ostatních

$$\vec{u} = \vec{v} + (-1)\vec{w}$$

Různé typy bází ve 2D (dle výhodnosti počítání) – 2 vektory $\vec{u}, \vec{v}$

– LN –"–

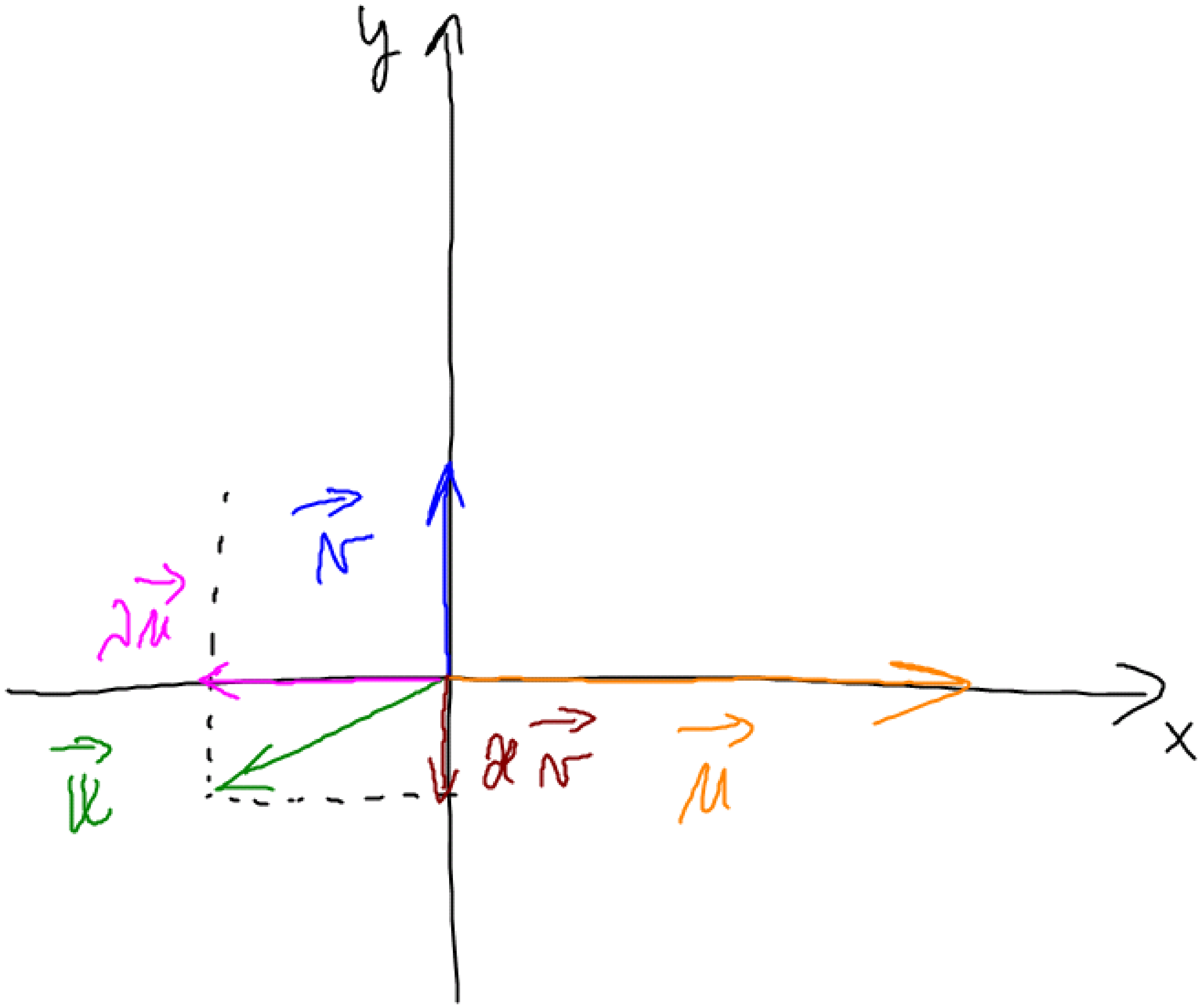
a)



$\vec{x}$ – lze ho napsat jako LK vektorů báze?

$$\vec{x} = \lambda\vec{u} + \varkappa\vec{v}$$

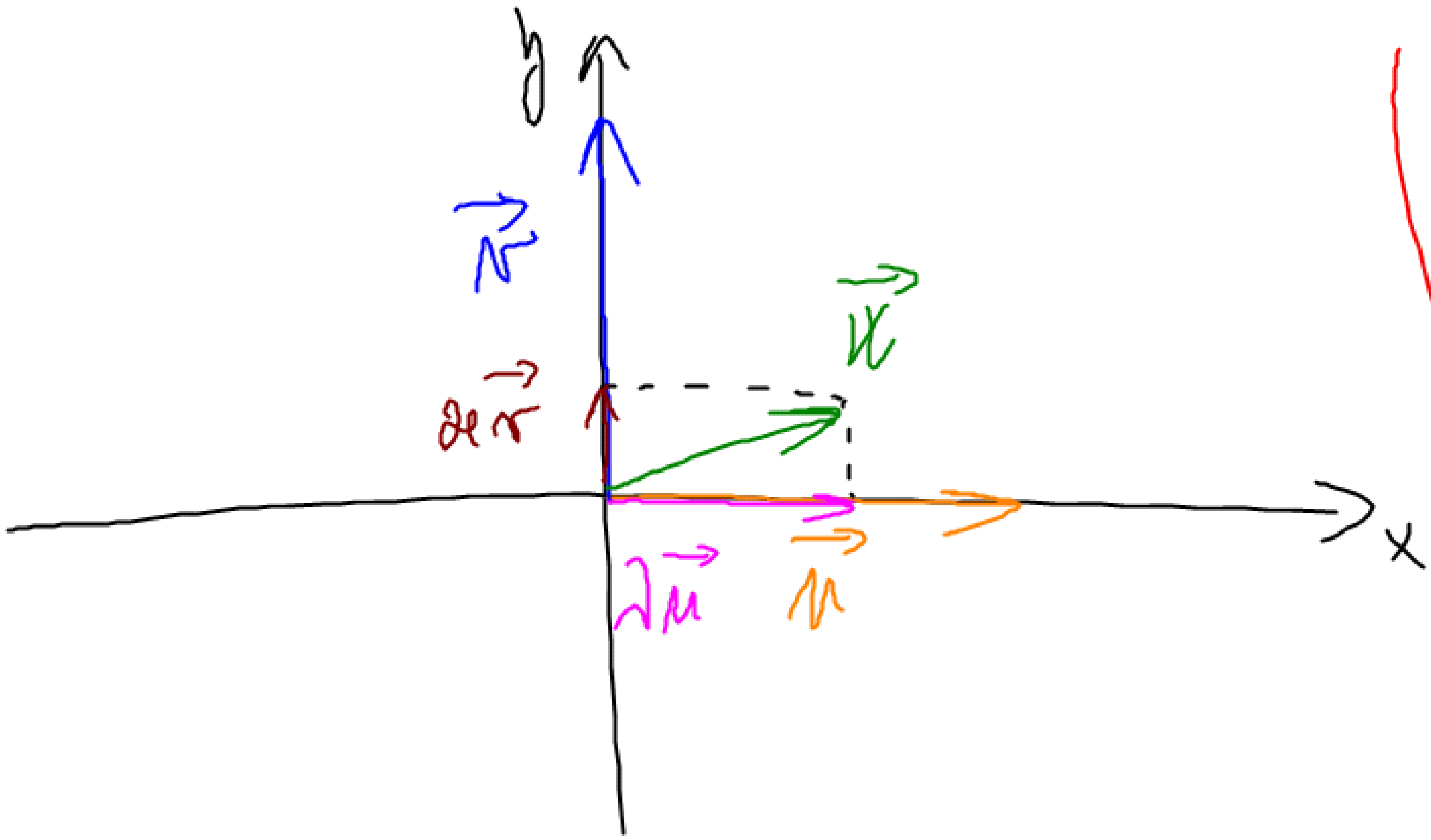
b) ORTOGONĀLI BĀZE: $\vec{u} \perp \vec{v}$



$$\vec{x} = \lambda\vec{u} + \varkappa\vec{v}$$

c) ORTONORMÁLNÍ BÁZE

$$\vec{u} \perp \vec{v} \wedge |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1;$$



$$\vec{x} = \lambda\vec{u} + \varkappa\vec{v}$$

$$\vec{x} = (\lambda; \varkappa)$$

běžné značení: $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ resp. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ resp. $\vec{i}, \vec{j}$

GENERÁTORY prostoru

vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ generují prostor $\mathbb{R}^n$ jestliže $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

Generující skupina vektorů

$\vec{u} = (1; -1; 2)$

$\vec{v} = (0; 1; -1)$

$\vec{w} = (2; -1; 3)$ prostor R^3 ?

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ... generují $\Leftrightarrow \forall \vec{q} = (x; y; z) \in R^3$

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \vec{q} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$

$$x = 1\alpha + 0\beta + 2\gamma$$
$$y = -1\alpha + 1\beta - \gamma$$
$$z = 2\alpha - \beta + 3\gamma$$

$$x = 1\alpha + 2\gamma$$
$$y + z = \alpha + 2\gamma \quad / \cdot (-1)$$

$$x - y - z = 0$$

platí POUZE PRO OMEZENÉ SOUŘADNICE

$\vec{q} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ NEGENERUJÍ

Generují vektory

$\vec{v}_1 = (1;1;1;1)$

$\vec{v}_2 = (2;1;3;2)$

$\vec{v}_3 = (-2;3;-1;0)$

$\vec{v}_4 = (-1;0;1;1)$ prostor $\mathbb{R}^4$?

generují $\iff \forall \vec{q} = (u;x;y;z) \in \mathbb{R}^4 \ \exists \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

$$\vec{q} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 + \delta \vec{v}_4$$

$$u = \alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta \longrightarrow \delta =$$
$$x = \alpha + \beta + 3\gamma$$
$$y = \alpha + 3\beta - \gamma + \delta$$
$$z = \alpha + 2\beta + \delta$$

$$x = \alpha + \beta + 3\gamma \quad / \cdot (-2) \longrightarrow \alpha =$$
$$u + y = 2\alpha + 5\beta - 3\gamma$$
$$u + z = 2\alpha + 4\beta - 2\gamma$$

$$-2x + u + y = 3\beta - 9\gamma \quad / \cdot (-2)$$
$$-2x + u + z = 2\beta - 8\gamma \quad / \cdot 3 \longrightarrow \beta = \frac{-2x + u + z}{2} + 4 \cdot \frac{2x - u + 2y - 3z}{6}$$

$$-2x + u - 2y + 3z = -6\gamma$$
$$\gamma = \frac{2x - u + 2y - 3z}{6}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – ve tvaru zlomku:

- čitatel – výraz obsahující x, y, z, u
- jmenovatel – číslo

$\Rightarrow \forall\, x, y, z, u \in \mathbb{R} \;\; \exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta :$

$\vec{q}$ je LK $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$

$\Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ <u>GENERUJÍ</u> $\mathbb{R}^4$

A navíc: $\vec{o} = (0;0;0;0)$ ... jako speciální volba $\vec{q}$

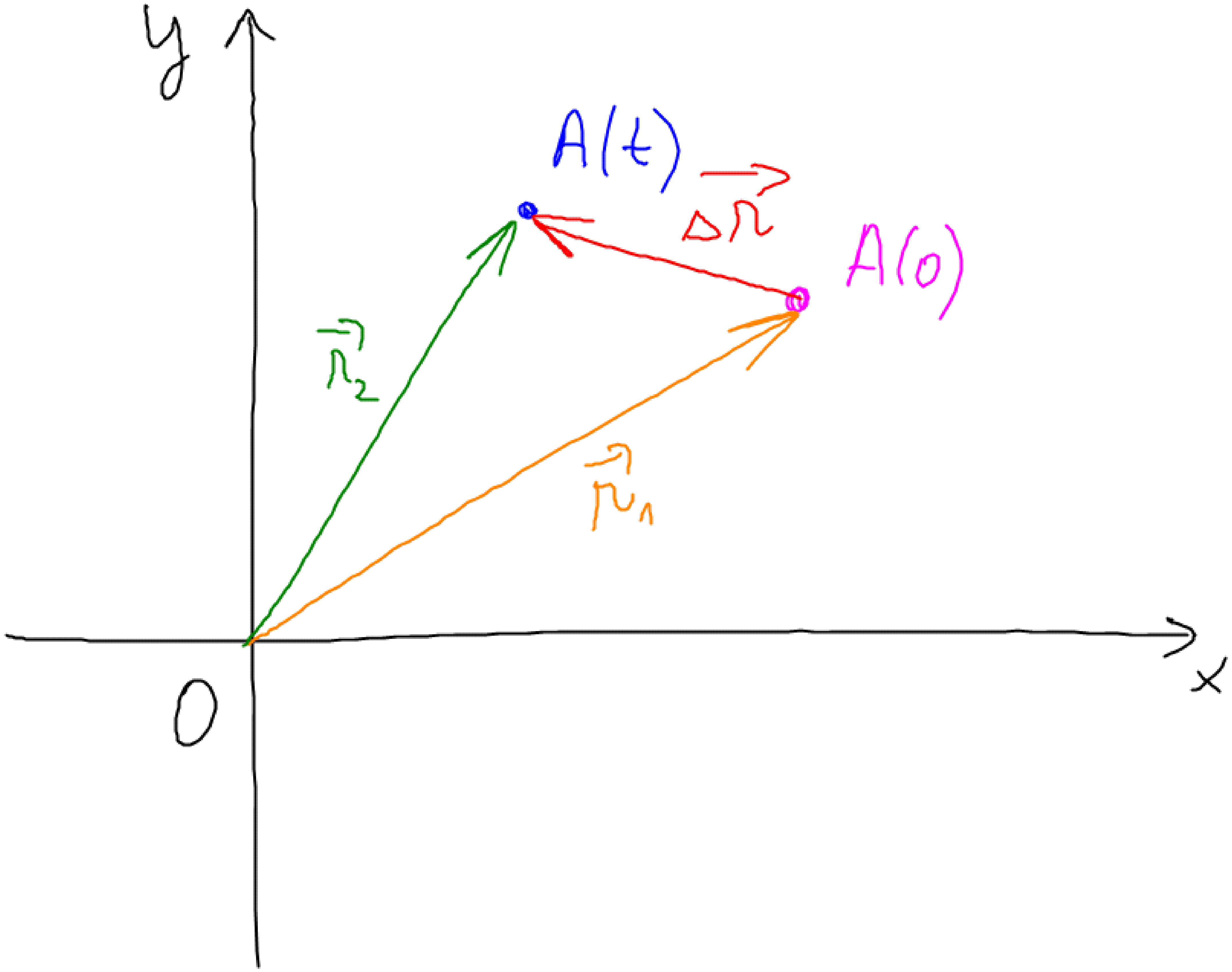
$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ ... $\underline{\underline{\text{LN}}}$

Polohový vektor

$\vec{r}$; popisuje polohu hmotného bodu

- ve 2D nebo ve 3D
- ve zvolené soustavě souřadnic
  (~ vztažná soustava)

„ukazovátko ukazující na daný HB"



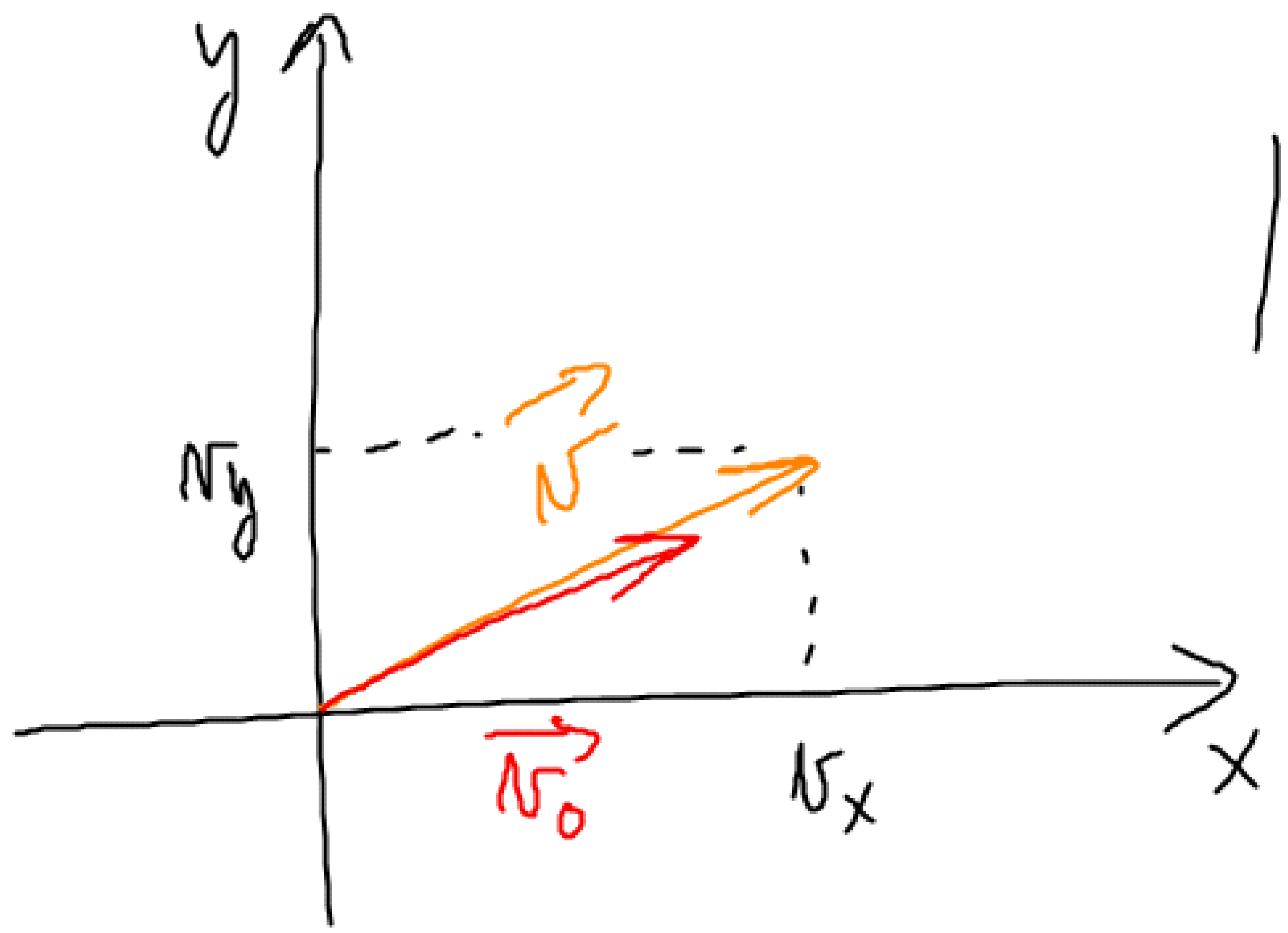
$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . . . změna polohy HB $\underline{A}$ v čase

$\vec{v} = \dfrac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$ . . . okamžitá rychlost

Jednotkový vektor

vektor, jehož velikost (délka) je rovna 1

délka vektoru



matematika

fyzika

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$$

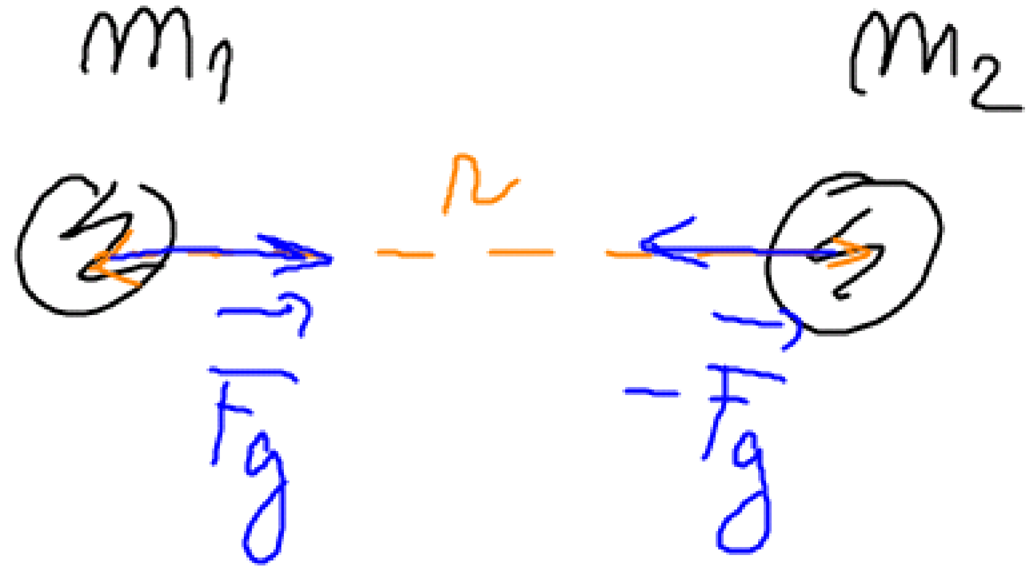
$\vec{v}_0$ – jednotkový vektor

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Př.

Newtonův gr. zákon

SŠ: $F_g = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$



VŠ: $\vec{F}_g = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \overbrace{\frac{\vec{r}}{r}}^{= \vec{r}_0}$

sbírka D. Mandíková KDF MFF UK

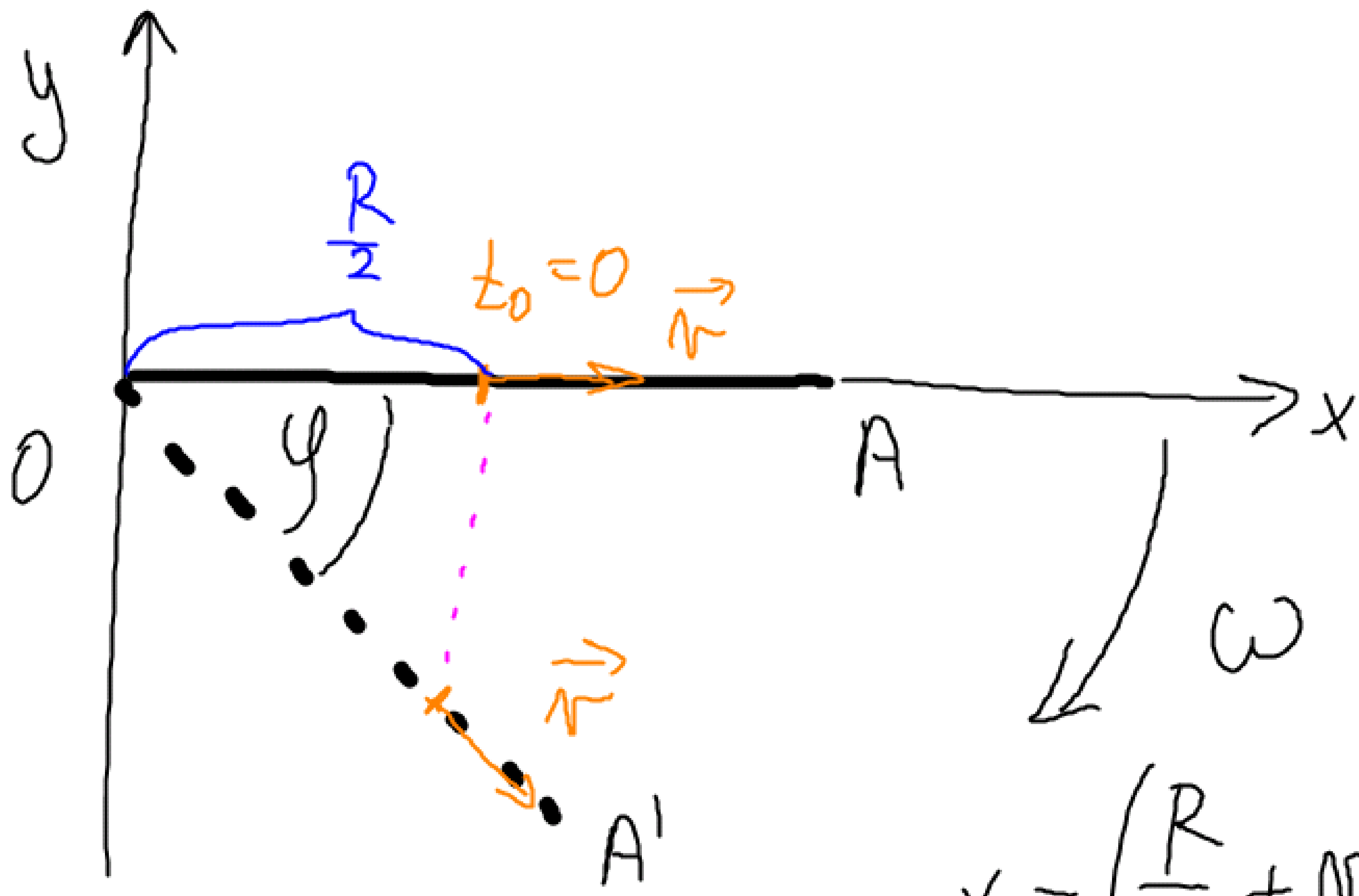
1.01

OA, R

otáčí kolem O

od O k A leze mravenec ... v

$\vec{r}_M = ?$



$$\varphi = \omega t$$

$$x = \left(\frac{R}{2} + vt\right)\cos\omega t$$

$$y = -\left(\frac{R}{2} + vt\right)\sin\omega t$$

$$\vec{r}_M = \left(\frac{R}{2}+vt\right)\cos\omega t\ \overset{\vec{i}}{\vec{e}_x} - \left(\frac{R}{2}+vt\right)\sin\omega t\ \overset{\vec{j}}{\vec{e}_y}$$

$$= \left(\left(\frac{R}{2}+vt\right)\cos\omega t\,;\ -\left(\frac{R}{2}+vt\right)\sin\omega t \right) =$$

$$= \left(\frac{R}{2}+vt\right)\left(\cos\omega t\,;\ -\sin\omega t\right)$$

$$t \in \left\langle 0;\ \frac{R}{2v} \right\rangle$$

čas, kdy mravenec dojde do $\underline{A}$

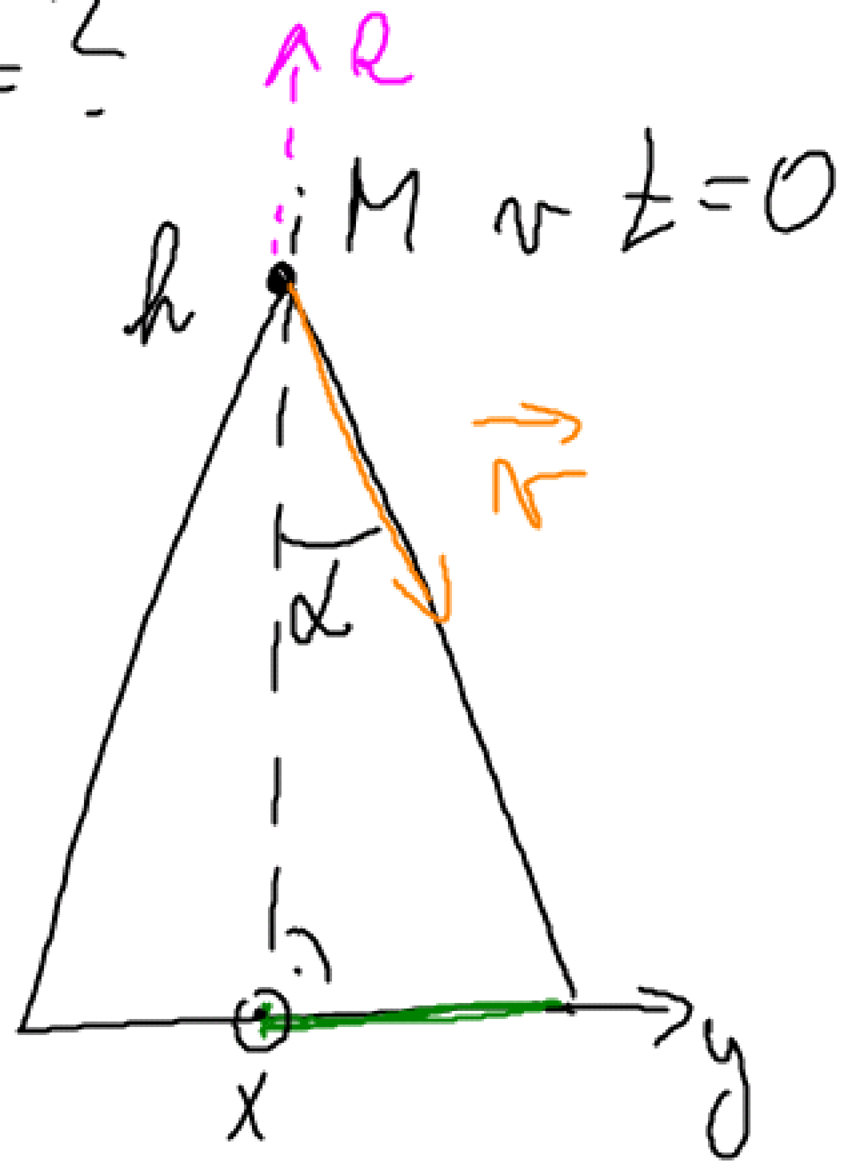
1.03

kužel: h, α

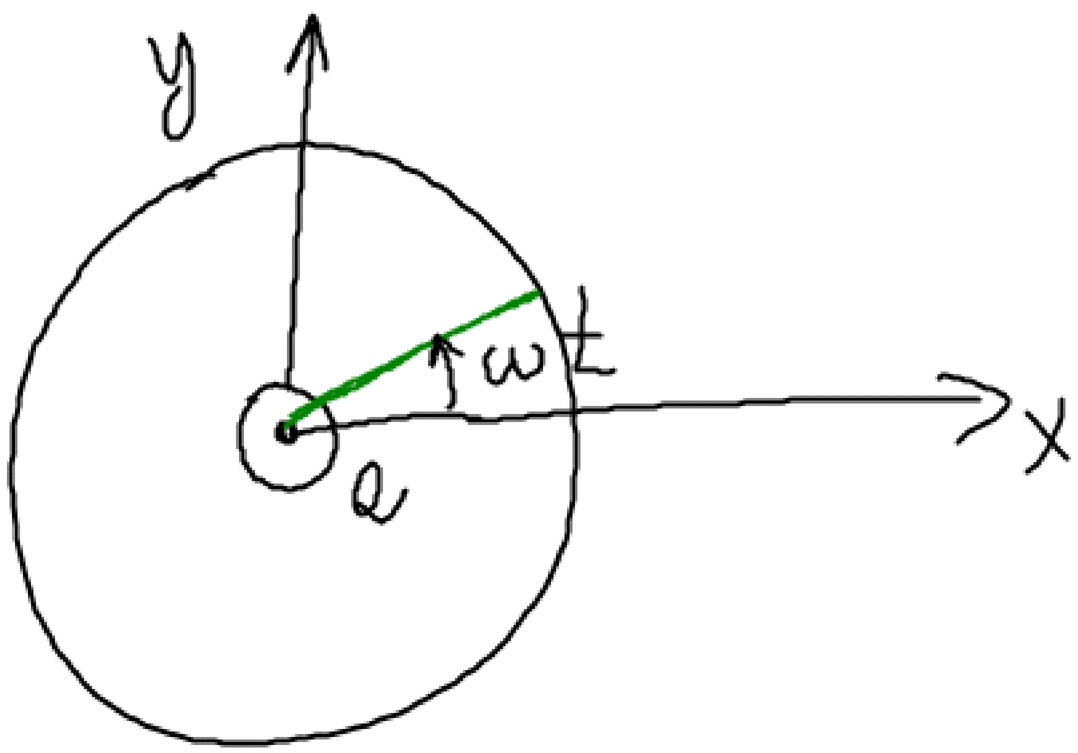
otáčí se kolem osy v kladném smyslu ... ω

M je stálou $\vec{v}$ z vrcholu po povrchu

$\vec{v}_M = ?$



$$z = h - v t \cos\alpha$$



$$s_{xy} = v t \sin\alpha$$

$$x = v t \sin\alpha \cos\omega t$$

$$y = v t \sin\alpha \sin\omega t$$

$$\vec{r}_M = \left(vt \sin\alpha \cos\omega t;\ vt \sin\alpha \sin\omega t;\ h - vt\cos\alpha \right)$$

$$t \in \left\langle 0; \frac{h}{v\cos\alpha} \right\rangle$$

Součiny s vektory

1) násobek vektoru skalárem

dáno: $\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

cíl: $\lambda \vec{u}$ $\rightsquigarrow$ VEKTOR

$\vec{u} = (u_x; u_y)$

$\lambda \vec{u} = (\lambda u_x; \lambda u_y)$

$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$

$\lambda \vec{u} (\lambda u_x; \lambda u_y; \lambda u_z)$

$\lambda \vec{u} \parallel \vec{u}$

je $|\lambda|$krát delší

2) skalární součin

dáno: $\vec{u}, \vec{v}$

cíl: $\vec{u} \cdot \vec{v} \rightsquigarrow$ SKALÁR

$$\vec{u} = (u_x; u_y)$$
$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$\vec{u} = (u_x; u_y; u_z)$$
$$\vec{v} = (v_x; v_y; v_z)$$

$$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}$$

$$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y}$$

$$\underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\varphi}$$

φ – úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$; $\varphi \in \langle 0°; 180° \rangle$

poznámky:

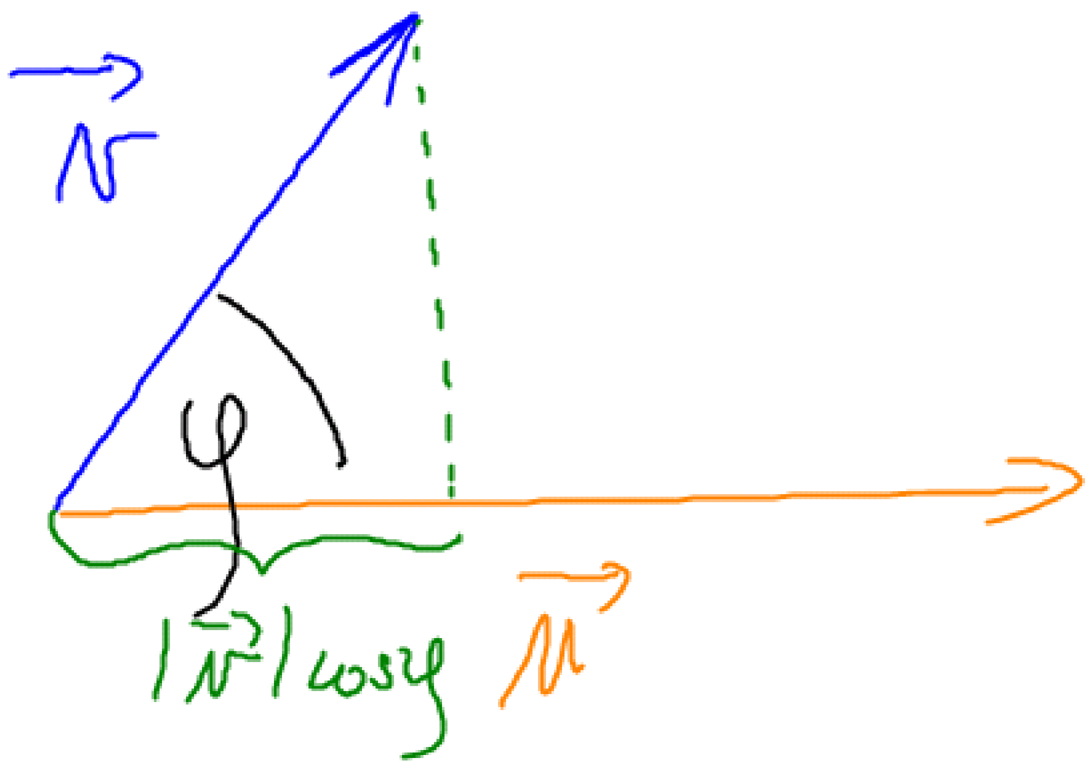
- výpočet úhlu 2 NENULOVÝCH vektorů

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90^\circ$$

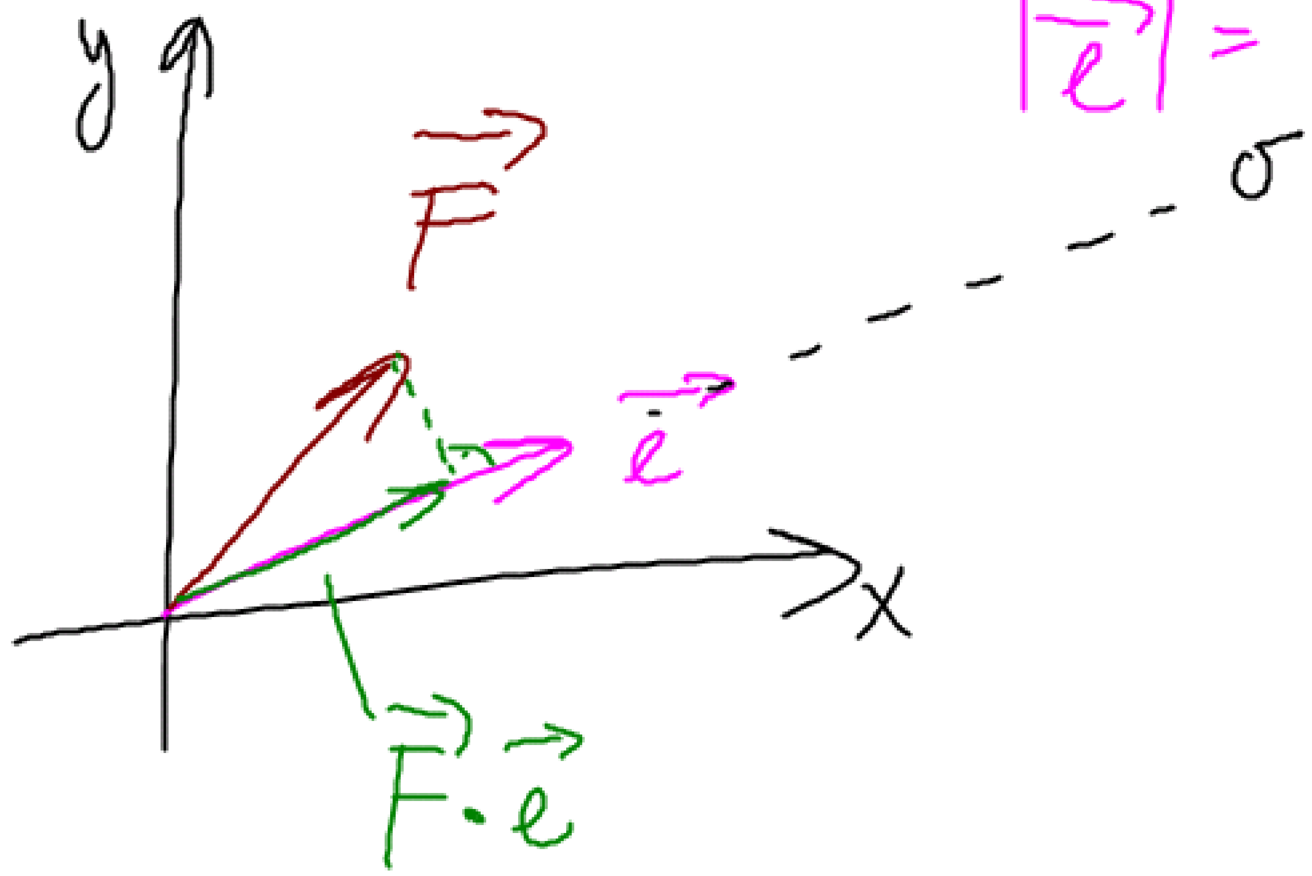
- průmět vektoru do směru 2. vektoru



výhoda, pokud $\vec{u} = \vec{e}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \underbrace{|\vec{v}|\cos\varphi}$$

$|\vec{e}| = 1$;



3, vektorový součin

dáno: $\vec{u}, \vec{v}$

cíl: $\vec{u} \times \vec{v} \rightsquigarrow$ VEKTOR

JEN VE 3D !!!

značím: $\vec{x} = \vec{u} \times \vec{v}$; $\vec{x} \perp \vec{u} \wedge \vec{x} \perp \vec{v}$

$$\vec{x} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\vec{x} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\vec{u} = (u_x ; u_y ; u_z)$$
$$\vec{v} = (v_x ; v_y ; v_z)$$
$$\vec{w} = (w_x ; w_y ; w_z) \quad = ?$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \iff u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0 \quad / \cdot v_x$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0 \quad / \cdot (-u_x)$$
$$(3) \quad \oplus$$

2 rce, ale 3 neznámé $\Rightarrow$ 1 parametr $(\sim |\vec{w}|)$

$$\Rightarrow (v_x u_y - u_x v_y) w_y + (u_z v_x - u_x v_z) w_z = 0$$

lze volit: $w_z = u_x v_y - u_y v_x$ (1)

$w_y = u_z v_x - u_x v_z$ (2)

$$3x + 4y = 0$$

např.: $y = -3$ $\quad y = 1$

$x = 4$ $\quad x = -\frac{4y}{3} = -\frac{4}{3}$

→ 1 volný parametr

(1) a (2) do (3):

$$u_x w_x + \cancel{u_y u_z v_y} - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - \cancel{u_z u_y v_x} = 0$$

$$u_x w_x = u_x (u_y v_z - u_z v_y) \quad ; \; u_x \neq 0$$

$$w_x = u_y v_z - u_z v_y$$

$$\vec{u} = (u_x ; u_y ; u_z)$$
$$\vec{v} = (v_x ; v_y ; v_z)$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\underline{u_y v_z - u_z v_y} ; \underbrace{u_z v_x - u_x v_z}_{-(u_x v_z - u_z v_x)} ; \underline{u_x v_y - u_y v_x} \right)$$

složky vektoru $\underline{\vec{w}}$ lze určit „finton" vlastnosti:

- NENÍ KOMUTATIVNÍ

$$\vec{u} \times \vec{v} = - \vec{v} \times \vec{u}$$

- $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$; $\vec{u} \perp \vec{w} \wedge \vec{v} \perp \vec{w}$

- směr $\underline{w}$ – pravidlo pravé ruky

„v pořadí, v jakém násobím, vektory přimáčkávám k sobě PRAVOU RUKU; odtažený palec ~ směr $\underline{w}$"

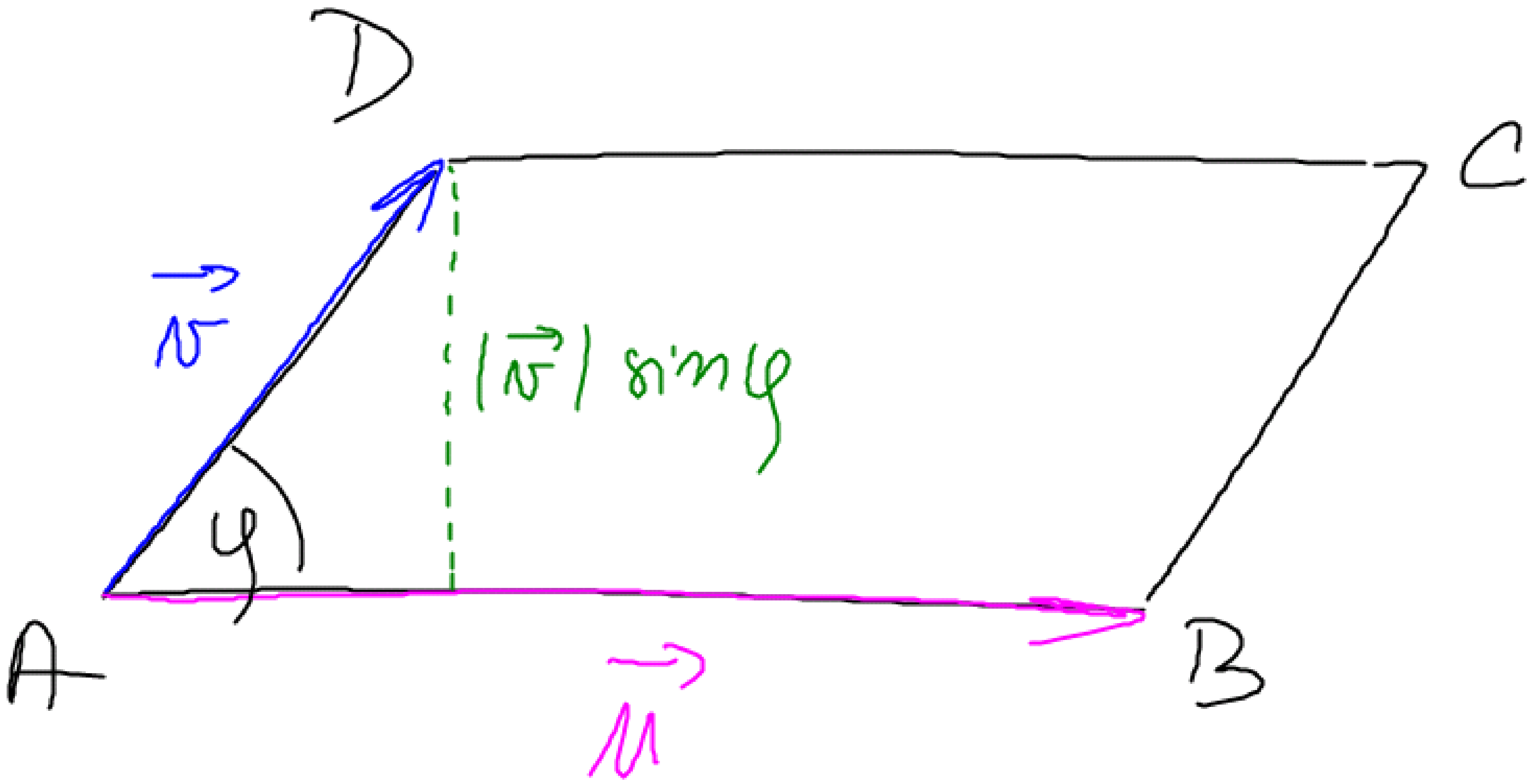
- $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin \varphi$

  φ - úhel vektorů $\vec{u}, \vec{v}$

- $\vec{u} \times \lambda \vec{u} = \vec{o}$

použití:

- $\vec{F}$ - viz dále
- $\vec{M}$ - normálový vektor roviny určený ze směrových vektorů
  - obsah rovnoběžníka



$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{u}|\,\underbrace{|\vec{v}| \sin\varphi}_{\text{výška na stranu } AB}$$

alternativní vyjádření

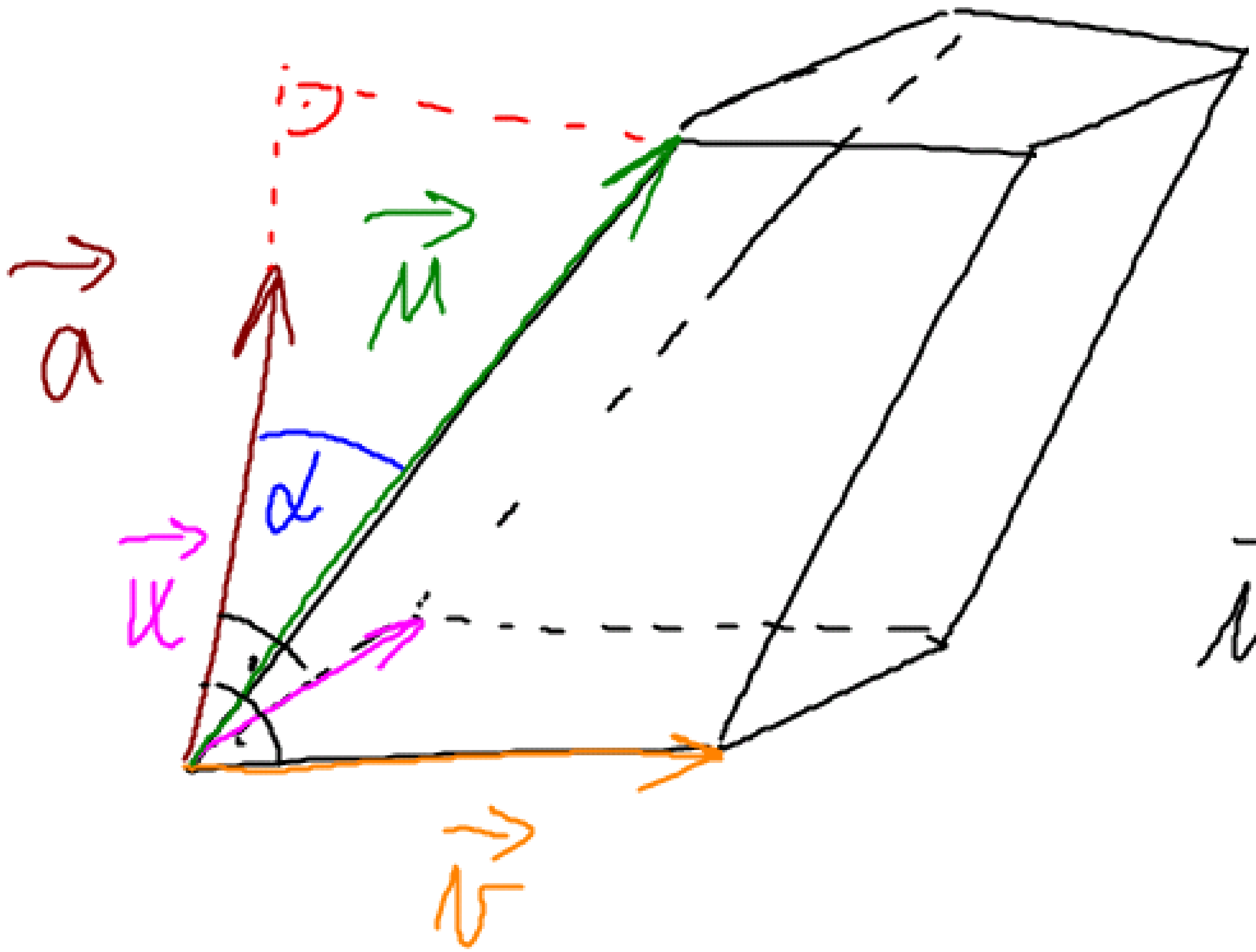
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$; , jednotkové ve směru os $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$

4, Smíšený součin

$$\vec{u} \cdot \underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\vec{a}} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

geometrický význam: objem rovnoběžnostěnu

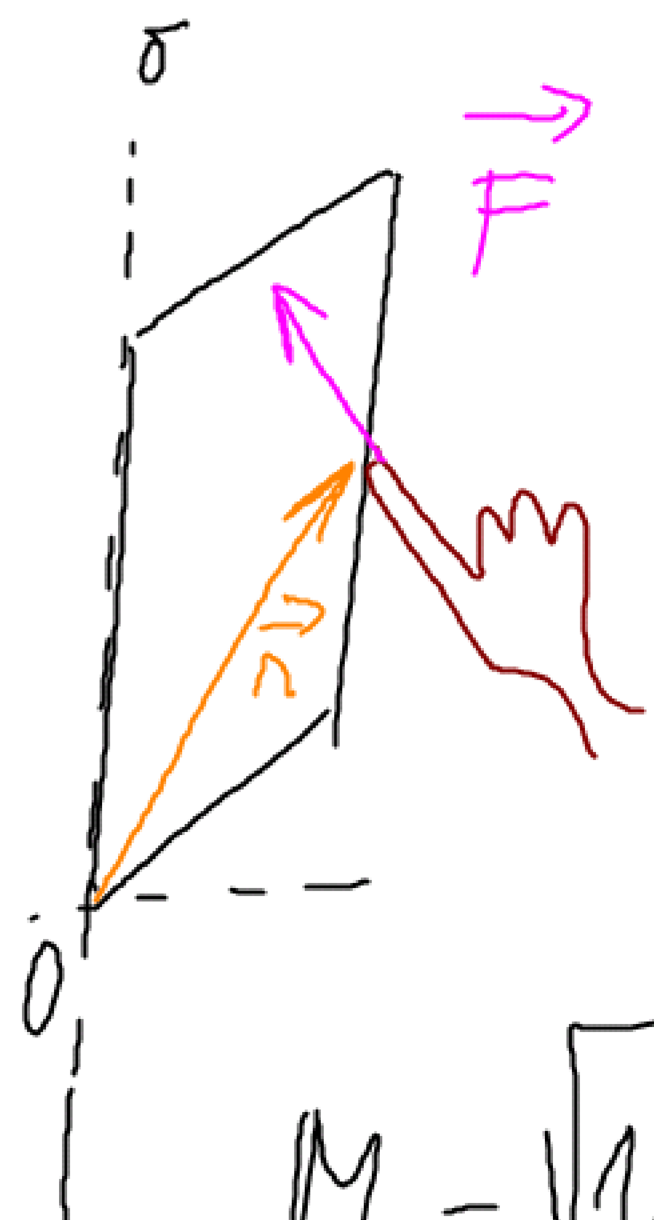


$$|\vec{v} \times \vec{w}| = S_{podstavy}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = \underbrace{|\vec{u}|\,|\vec{a}|\cos\alpha}_{výška}$$

Fyzikální úloha

Ruka člověka působí na zavírající se okno v místě $\vec{r} = (1;\ 0{,}5;\ 1{,}5)$ m silou $\vec{F} = (-2;\ -1;\ 0)$ N. Určete vektor momentu síly a jeho velikost.



$\vec{r} = (1;\ 0{,}5;\ 1{,}5)$ m
$\vec{F} = (-2;\ -1;\ 0)$ N

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = (1{,}5;\ -3;\ 0)\ \text{N.m}$$

$$M = \sqrt{1{,}5^2 + (-3)^2 + 0^2}\ \text{N.m} \doteq 3{,}4\ \text{N.m}$$

Míček o hmotnosti 20g má v okamžiku, kdy se nachází v místě $\vec{r} = (5; 2; 1)\,m$, rychlost $\vec{v} = (1; 1; -2)\,m \cdot s^{-1}$

Určete v tomto okamžiku moment hybnosti míčku.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\,\vec{r} \times \vec{v} =$$

$\vec{r} = (5; 2; 1)\,m$

$\vec{v} = (1; 1; -2)\,m \cdot s^{-1}$

$$= 0{,}02\,(-5; 11; 3)\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

$$L = 0{,}02\sqrt{(-5)^2 + 11^2 + 3^2}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

$$\doteq 0{,}25\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$$

Elektron vletí rychlostí $\vec{v} = (1; -1; 2) \cdot 10^6 \, m \cdot s^{-1}$ do homogenního mg. pole popsaného mg. indukcí $\vec{B} = (-3; 2; 1) \, mT$. Jaký je vektor mg. síly a jaká je jeho velikost?

Jaký úhel svírá vektor rychlosti se směrem $\vec{B}$?

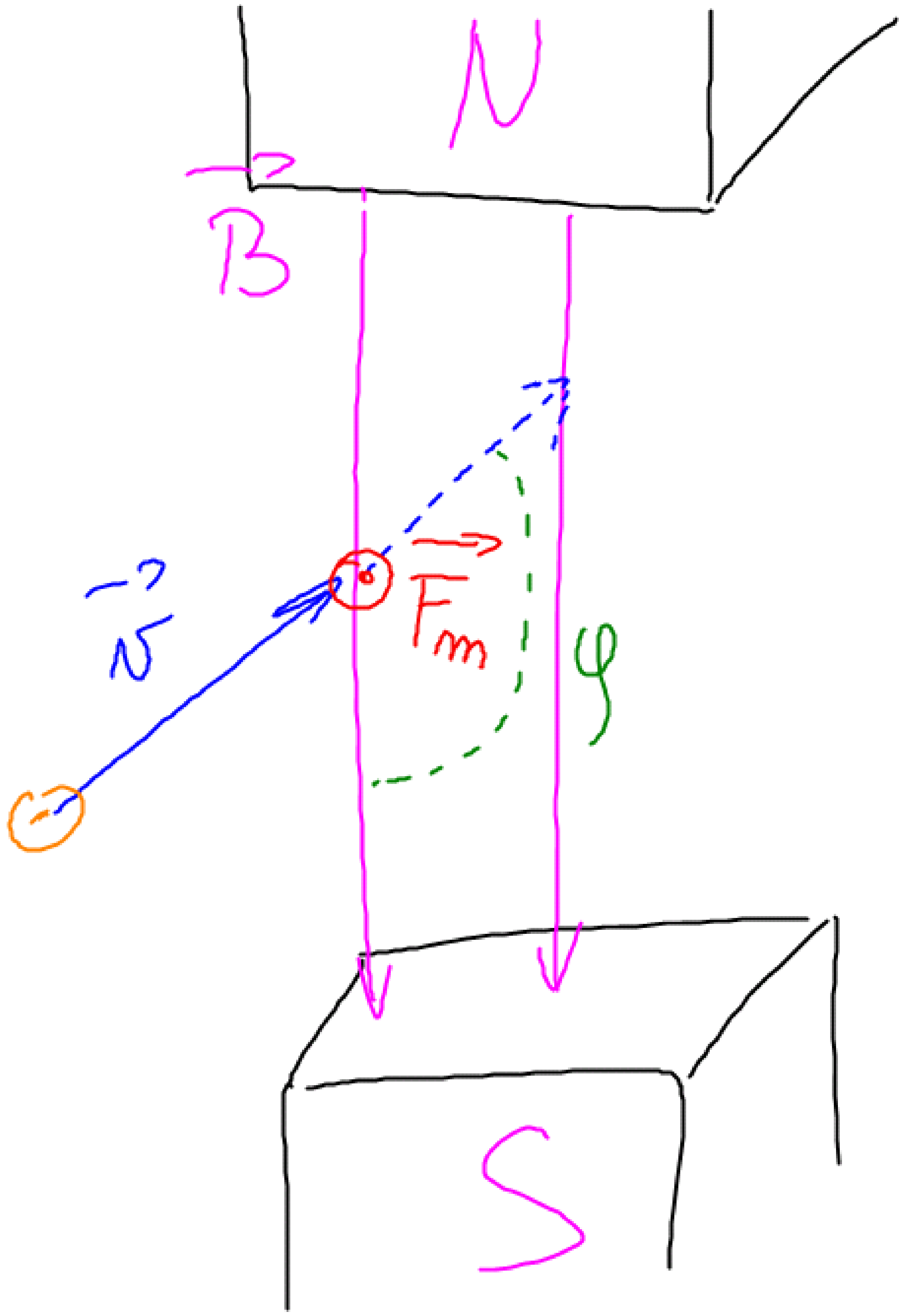
$$\vec{F_m} = Q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

OBECNĚ

pro $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$|\vec{F_m}| = Q|\vec{v}|\,|\vec{B}|\,\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}$$

$$F_m = BQv$$



$$\vec{v} = (1; -1; 2) \cdot 10^{6}\ m \cdot s^{-1}$$
$$\vec{B} = (-3; 2; 1)\ mT$$

$$\underline{\underline{\vec{F_m}}} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} (-5; -7; -1) \cdot 10^{3}\ N$$
$$= \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-16} (5; 7; 1)\ N}}$$

$$|\vec{F_m}| = 1{,}6 \cdot 10^{-16} \sqrt{5^2 + 7^2 + 1^2}\ N = \underline{\underline{13{,}9 \cdot 10^{-16}\ N}}$$

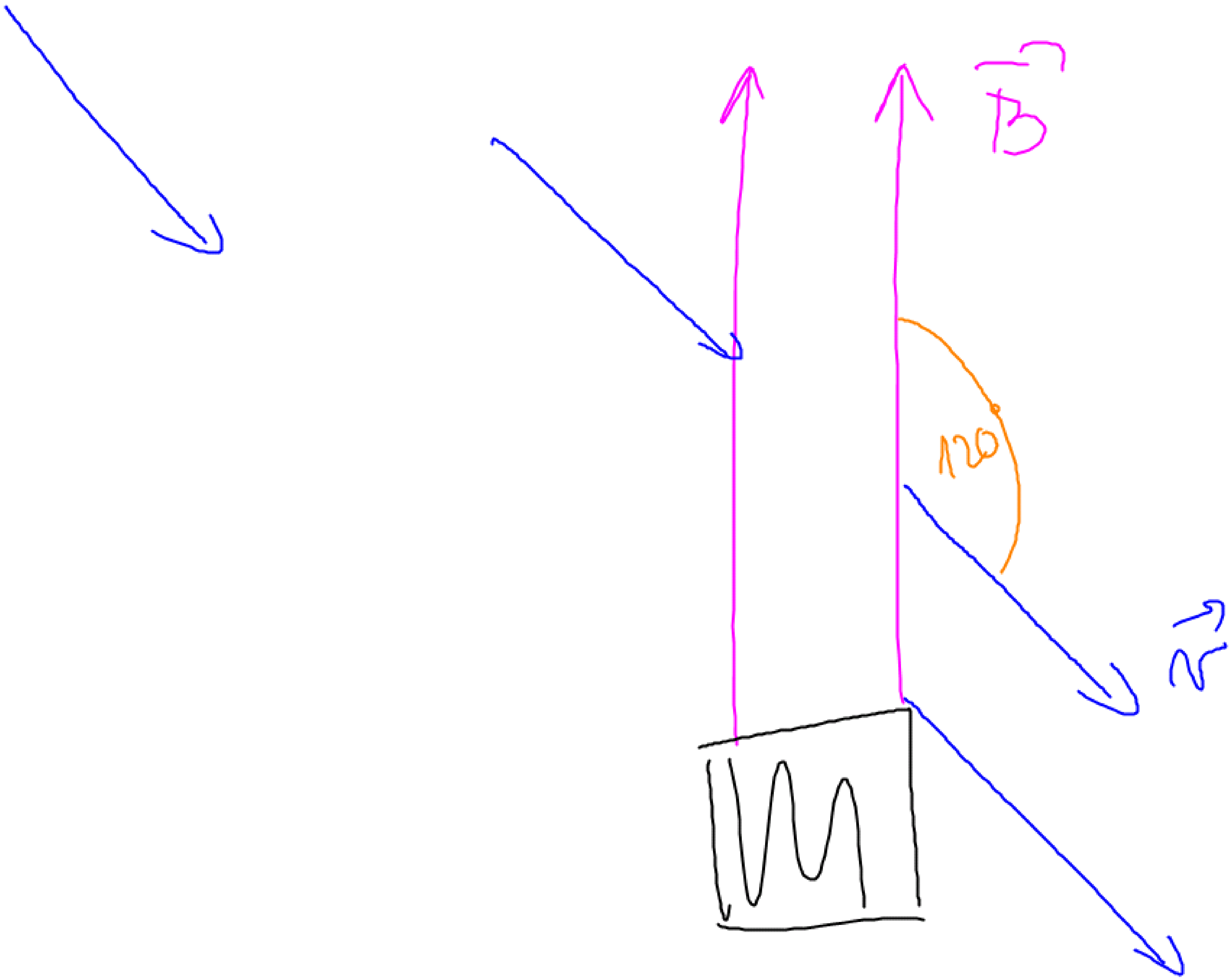
$$\cos\varphi = \frac{\vec{v} \circ \vec{B}}{|\vec{v}|\,|\vec{B}|} =$$

$$= \frac{(1;-1;2)(-3;2;1)}{\sqrt{1+1+4}\,\sqrt{9+4+1}} = \frac{-3-2+2}{\sqrt{6}\,\sqrt{14}} =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = 109^\circ}}$$

e^- letí pod úhlem $120°$ vzhledem k $\vec{B}$



Proton urychlovaný el. polem s intenzitou $\vec{E} = (3; 2; -1) \cdot 10^4\ V \cdot m^{-1}$ vletí rychlostí $\vec{v} = (1; 0; -3) \cdot 10^6\ m \cdot s^{-1}$ do homogenního mg. pole popsaného mg. indukcí $\vec{B} = (-10; 10; 20)\ mT$.
Určete vektor výsledné síly a vypočítejte její velikost.
Jaký úhel svírají vektor rychlosti a vektor el. intenzity?

$$\vec{F} = \vec{F_e} + \vec{F_m}$$

$$\vec{v} = (1;0;-3)\cdot 10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\vec{B} = (-10;10;20)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{F} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\left((3;2;-1)\cdot 10^{4} + (3;1;1)\cdot 10^{4}\right)\ \mathrm{N}$$

$$\underline{\underline{\vec{F} = 1{,}6\cdot 10^{-15}\,(6;3;0)\ \mathrm{N}}}$$

$$|\vec{F}| = 1{,}6\cdot 10^{-15}\sqrt{6^2+3^2+0^2}\ \mathrm{N} = 10{,}7\cdot 10^{-15}\ \mathrm{N} \doteq$$

$$\doteq \underline{\underline{10^{-14}\ \mathrm{N}}}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{|\vec{v}|\,|\vec{E}|} =$$

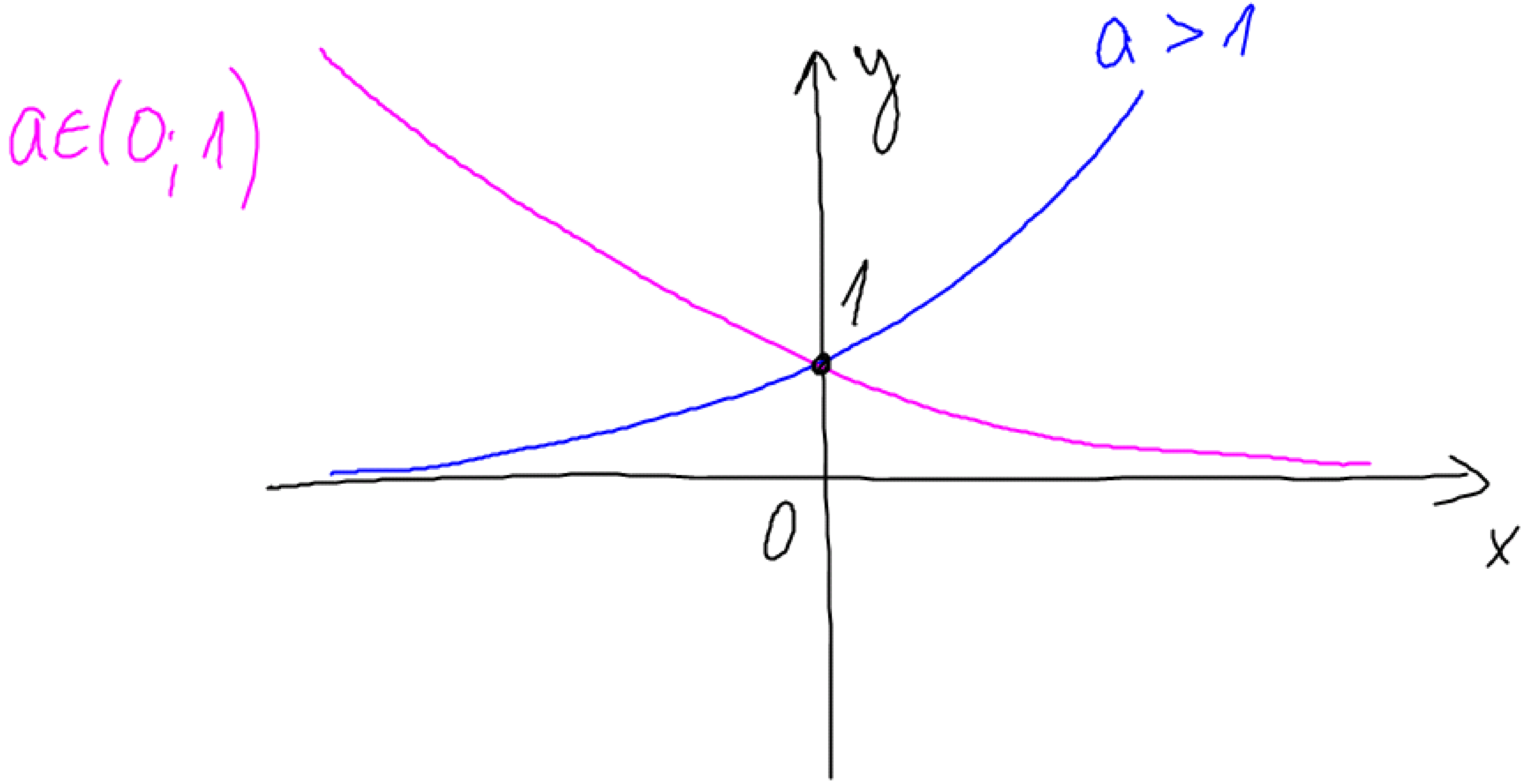
$$= \frac{(1;0;-3)\cdot(3;2;-1)}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = 59{,}5^\circ}}$$

Funkce

Exponenciální fce

$$f: y = a^x \quad ; \; a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$
$$x \in \mathbb{R}$$



pro aplikační předměty má význam:

- $a = 10$ – akustika
- $a = e$ – nabíjení kondenzátoru, chladnutí vody, pak),…
- $a = 2$ (resp. $a = \frac{1}{2}$) – digitální technika, radioaktivní rozpad

Výpočet e pomocí finanční matematiky

vklad: 1. 1. ... 1,- Kč $\qquad a_0 = 1$

úrok: $p = 100\,\%$

- úročení 1x ročně: $a_2 = a_0 + \dfrac{a_0 p}{100} = 1 + 1 = 2$

- úročení 2x ročně

30. 6.: $a_2 = a_0 + \dfrac{a_0 \frac{p}{2}}{100} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$

31. 12.: $a_3 = a_2 + \dfrac{a_2 \frac{p}{2}}{100} = a_2\left(1 + \dfrac{\frac{p}{2}}{100}\right) = a_0\left(1 + \dfrac{\frac{p}{2}}{100}\right)\left(1 + \dfrac{\frac{p}{2}}{100}\right) =$

$$= a_0\left(1 + \frac{\frac{p}{2}}{100}\right)^2 = 2{,}25$$

- úročení 4 x ročně:

$$a_k = a_0\left(1+\frac{\frac{p}{4}}{100}\right)^4 = 2{,}44$$

- úročení 365 x ročně:

$$a_k = a_0\left(1+\frac{\frac{p}{365}}{100}\right)^{365} = 2{,}71$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$n=1:\ (1+1)^2 = 4$$

$$n=2:\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3{,}375$$

$$\vdots$$

vyjádření obecné mocniny pomocí mocniny čísla $\underline{e}$:

$$a^b = e^k$$

$$\ln a^b = \ln e^k$$

$$b \ln a = k \underbrace{\ln e}_{1}$$

$$\boxed{a^b = e^{b \ln a}}$$

Logaritmická fce, logaritmus

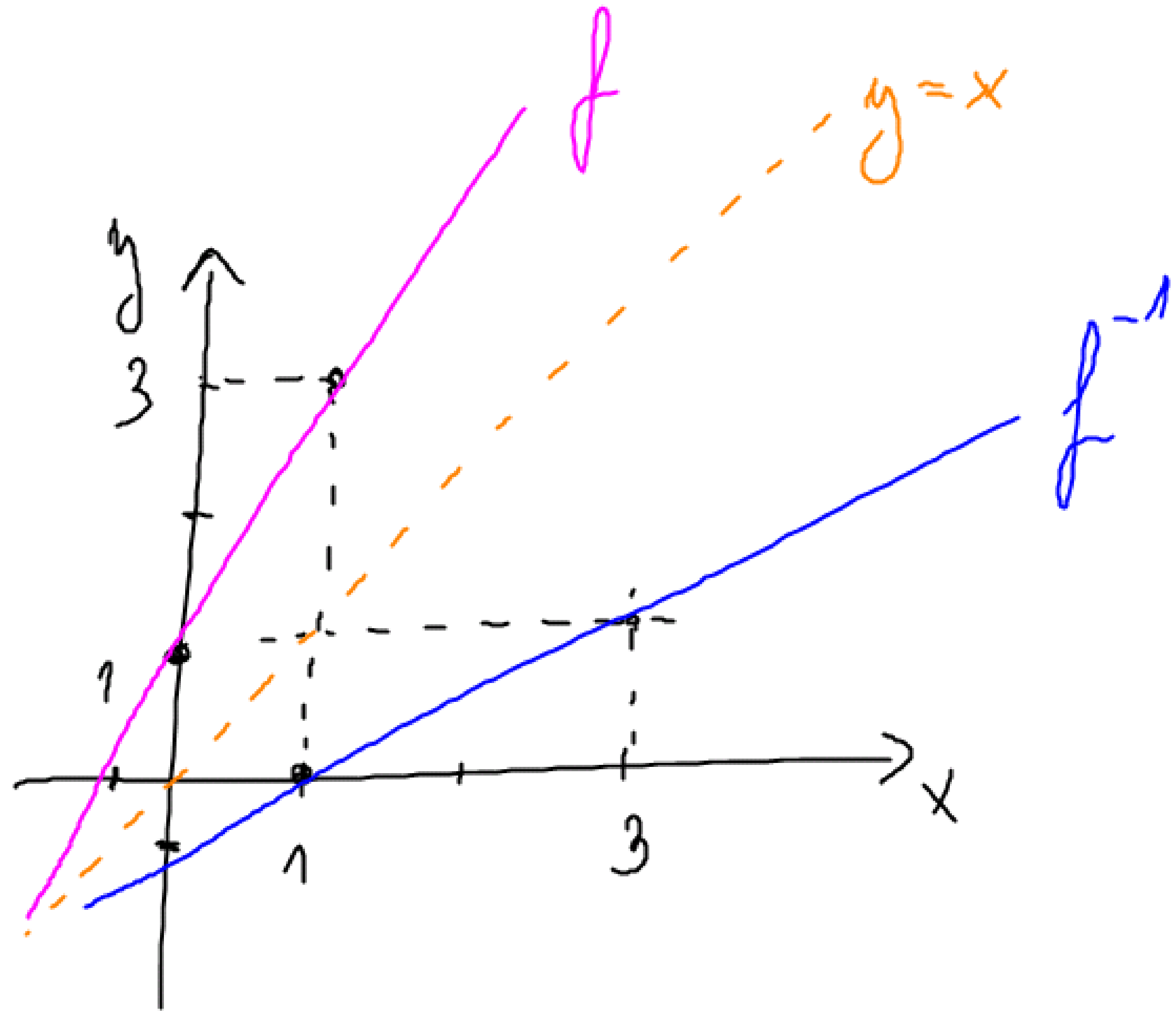
logaritmická fce je INVERZNÍ FCE k fci exponenciální

Př. inverzní fce

$f: y = 2x + 1$

$f^{-1}: x = 2y + 1$

$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

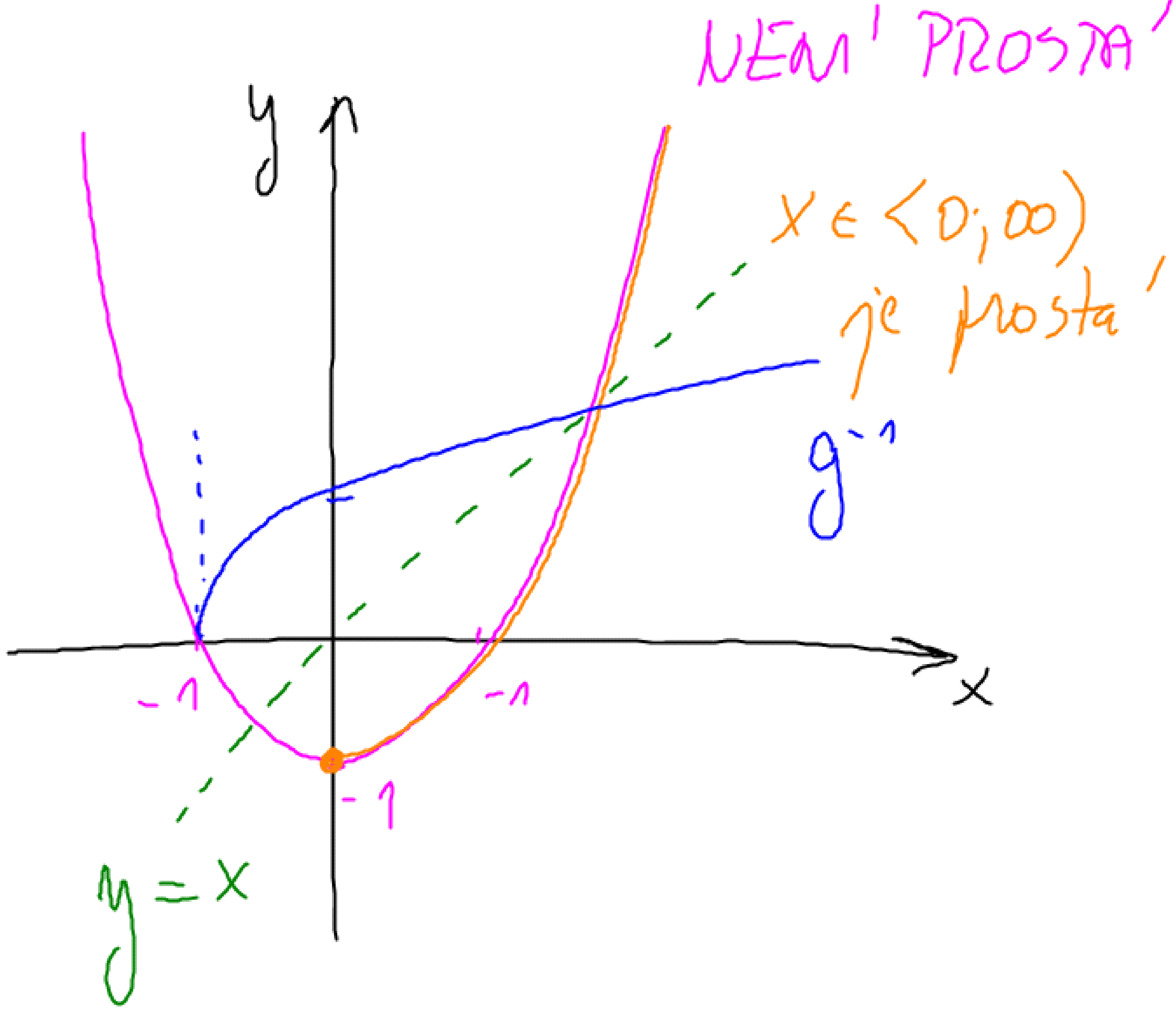


inverzní fce je definovaná pouze pro PROSTÉ FCE

$g: y = x^2 - 1$

$g^{-1}: x = y^2 - 1$

$y = +\sqrt{x+1}$



$D_g = \langle 0; \infty) = H_{g^{-1}}$

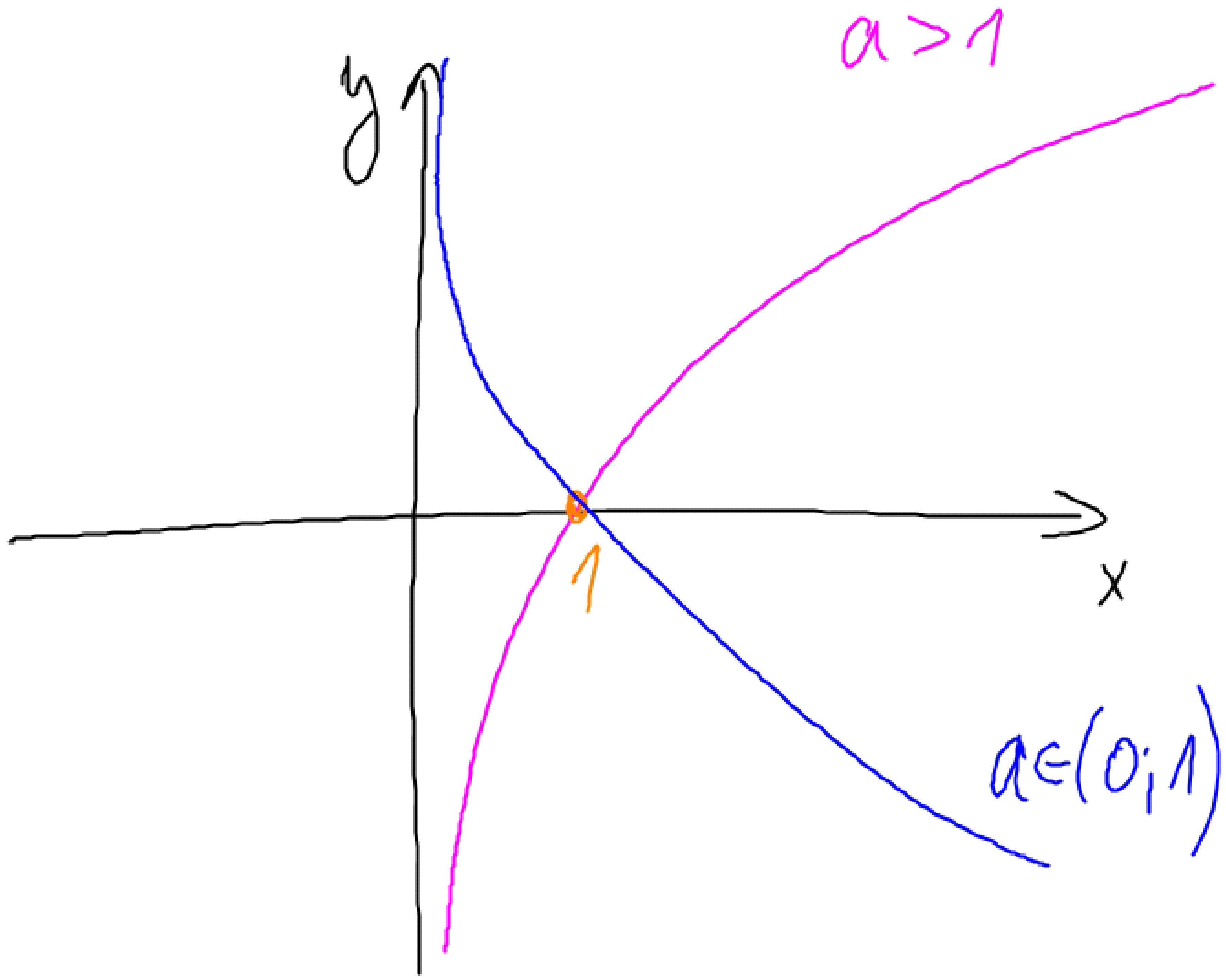
$H_g = \langle -1; \infty) = D_{g^{-1}}$

$f: y = a^x$, pak logaritmická fce

je $g: y = \log_a x$

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$x \in \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$



logaritmus: $a^x = y \iff \log_a y = x$

označení: $\log x = \log_{10} x$ ... dekadický

$\ln x = \log_e x$ ... přirozený

Př.

$\log 100 = 2 \iff 10^2 = 100$

$\log_2 8 = 3$

$\log_4 16 = 2$

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

$\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

$\log 0{,}1 = -1$

$$\log_{\frac{1}{8}} 2 = -\frac{1}{3} \iff \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Pravidla pro počítání:

- $\log_z (a \cdot b) = \log_z a + \log_z b$
- $\log_z \frac{a}{b} = \log_z a - \log_z b$
- $\log_z a^n = n \log_z a$
- $\log_z a = \dfrac{\log_t a}{\log_t z}$

$a, b \in \mathbb{R}^+$

$z, t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$n \in \mathbb{R}$

Dk posledního vztahu:

$$z^{\log_z a} = a \quad / \log_t$$

$$\log_t z^{\log_z a} = \log_t a$$

$$\log_z a \cdot \log_t z = \log_t a$$

$$\log_z a = \frac{\log_t a}{\log_t z} \quad \text{.....není nula, protože } z \neq 1$$

cbd.

užití: kalkulačky mívají $\underline{\ln x}$ a $\underline{\log x}$

Pro techniky

1) $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} = 0{,}43 \ln x$

$\ln x = \dfrac{\log x}{\log e} = \ln 10 \cdot \log x = 2{,}3 \log x$

$\ln 10 = \dfrac{1}{\log e}$

2) logaritmus vrací řád fyzikální veličiny

Př. akustika

$I_0 = 10^{\boxed{-12}}\ W \cdot m^{-2}$ ... práh slyšení

$I_B = 1\ W \cdot m^{-2}$ ... práh bolesti

$\quad\ \ \| \ 10^{\boxed{0}}$

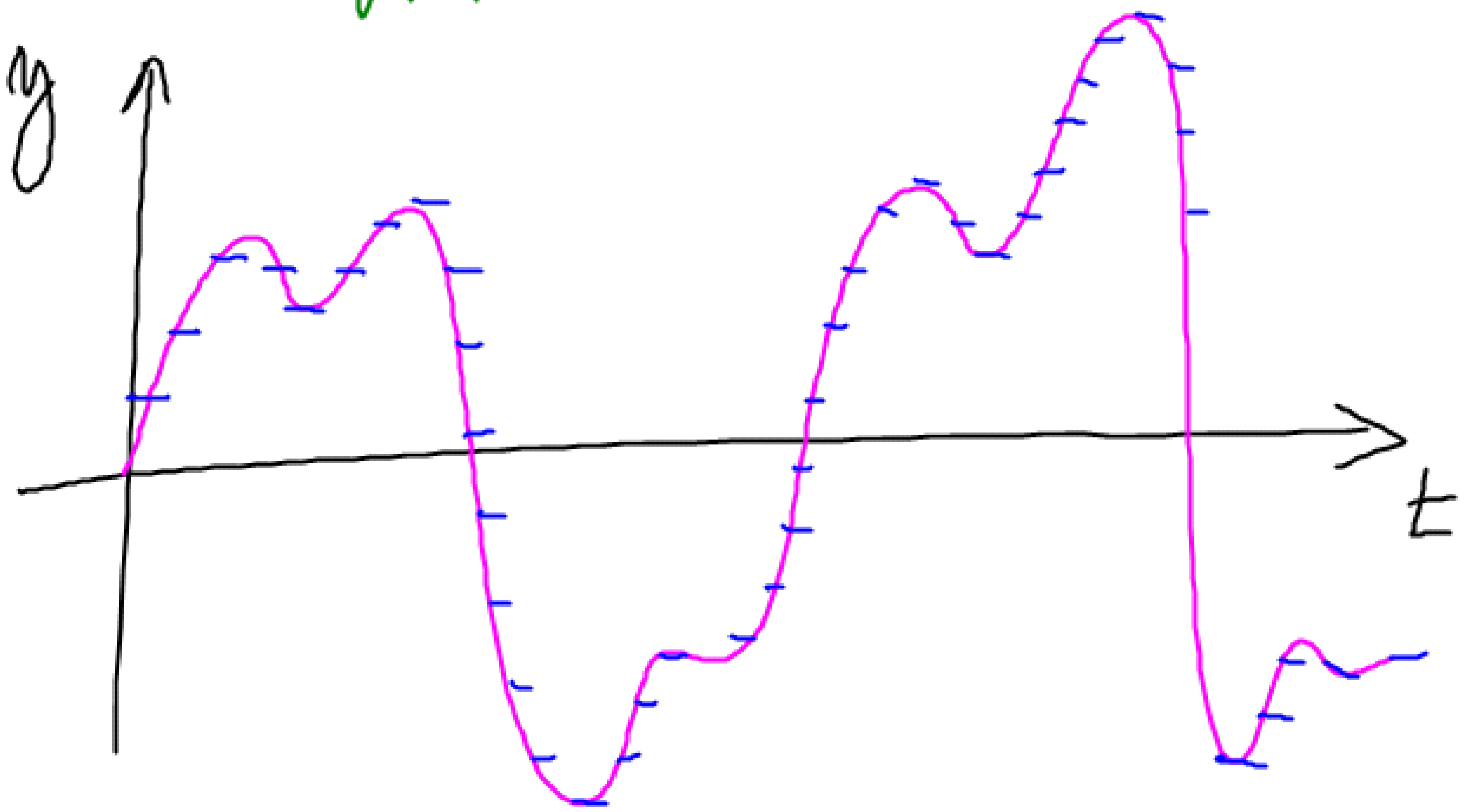
$\boxed{}$ - 12 řádů!!!

$\Rightarrow$ zavedení logaritmu, což je ve shodě s WEBER-FECHNEROVÝM ZÁKONEM

W–F: Mění-li se fyzikální podněty působí na smysly člověka geometrickou řadou, vnímáme jejich změny v řadě aritmetické.

„Člověk je tvor analogový a logaritmický."

VNÍMÁ SPOJITĚ



- analogový záznam např. zvuku
- digitální záznam, NESPOJITÝ

podněty: $p, pq, pq^2, pq^3, \ldots$

$q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0,1\}$ ... kvocient geom. posloupnosti

+ <u>speciální</u> podněty

$\rightsquigarrow$ rozdíl posoudit <u>VJEM</u> 2 po sobě jdoucích podnětů

vjem: $v = \log p$ $\boxed{v = k \log \frac{p}{p_0}}$

$v = \log \frac{p}{p_0}$ $v = k \log p$

ve vztahu musí jít:

- $\underline{k}$ – upravit vjem dle člověka
  – kvůli jednotce $\underline{v}$

- $\frac{p}{p_0}$ – p_0 určuje referenční hladinu
  – $\left[\frac{p}{p_0}\right] = 1$; argument fce NESMÍ MÍT JEDNOTKU

m zmèna vjeum

$$v_1 = k \log \frac{p q^n}{p_0}$$

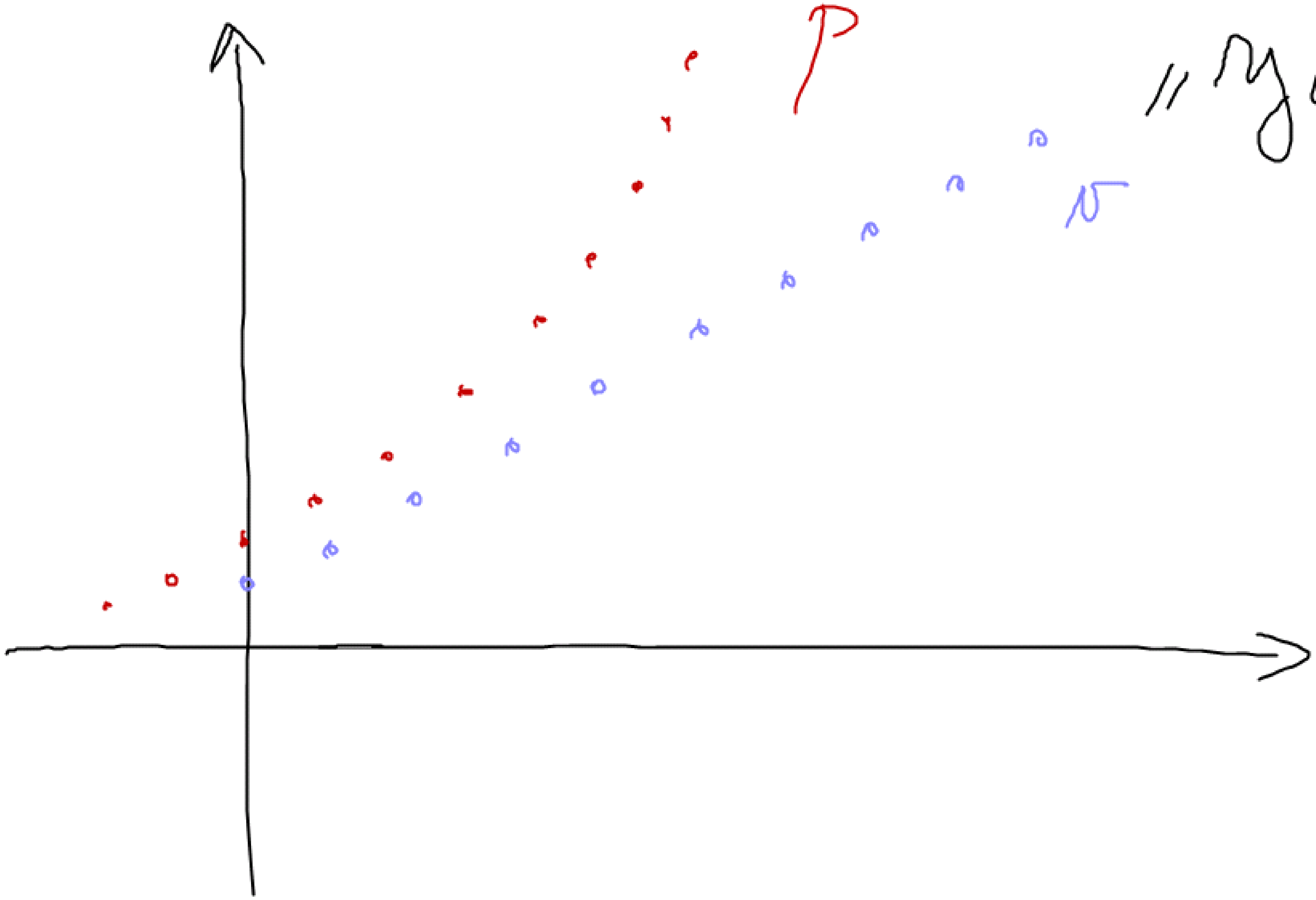
$$v_2 = k \log \frac{p q^{n+1}}{p_0}$$

$$v_2 - v_1 = k \log \frac{p q^{n+1}}{p_0} - k \log \frac{p q^n}{p_0} =$$

$$= k \left(\log \frac{p q^{n+1}}{p_0} - \log \frac{p q^n}{p_0} \right) =$$

$$= k \log \frac{\frac{\cancel{p} q^{n+1}}{\cancel{p_0}}}{\frac{\cancel{p} q^n}{\cancel{p_0}}} = k \log q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 + k \log q$$



„rychlost místa"

Jak se změní hladina intenzity zvuku při nárůstu intenzity zvuku na dvojnásobek?

$$L_1 = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

$$L_2 = 10 \log \frac{2I}{I_0}$$

$$L_2 - L_1 = 10 \log \frac{2I}{I_0} - 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{\frac{2\cancel{I}}{\cancel{I_0}}}{\frac{\cancel{I}}{\cancel{I_0}}} =$$

$$= 10 \log 2 \ \mathrm{dB} = \underline{\underline{3 \ \mathrm{dB}}}$$

$$I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2} \quad \ldots\ldots \quad p_0 = 20\ \mu Pa$$

$p_B = ?$ (práh bolesti)

$$L = 10 \log \frac{I_B}{I_0} = 20 \log \frac{p_B}{p_0}$$

$$10 \log \frac{I_B}{I_0} = 10 \log \left(\frac{p_B}{p_0}\right)^2 \quad / : 10;\ \text{odlogaritmovat}$$

$$\frac{I_B}{I_0} = \left(\frac{p_B}{p_0}\right)^2$$

$$\underline{\underline{p_B}} = p_0 \sqrt{\frac{I_B}{I_0}} = 20 \sqrt{\frac{1}{10^{-12}}}\ \mu Pa = \underline{\underline{20\ Pa}}$$

$$I = \frac{P}{S}$$

$$I \sim y_m^2 \sim F^2 \sim (pS)^2$$

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{P}{4\pi r^2 I_0}$$

$$I \sim \frac{1}{r^2}$$

DIFERENCIÁLNÍ POČET

- infinitezimální (spolu s integrálním)
- Newton – fyzikální cesta
  - „divné úpravy"

Leibnitz – matematická cesta

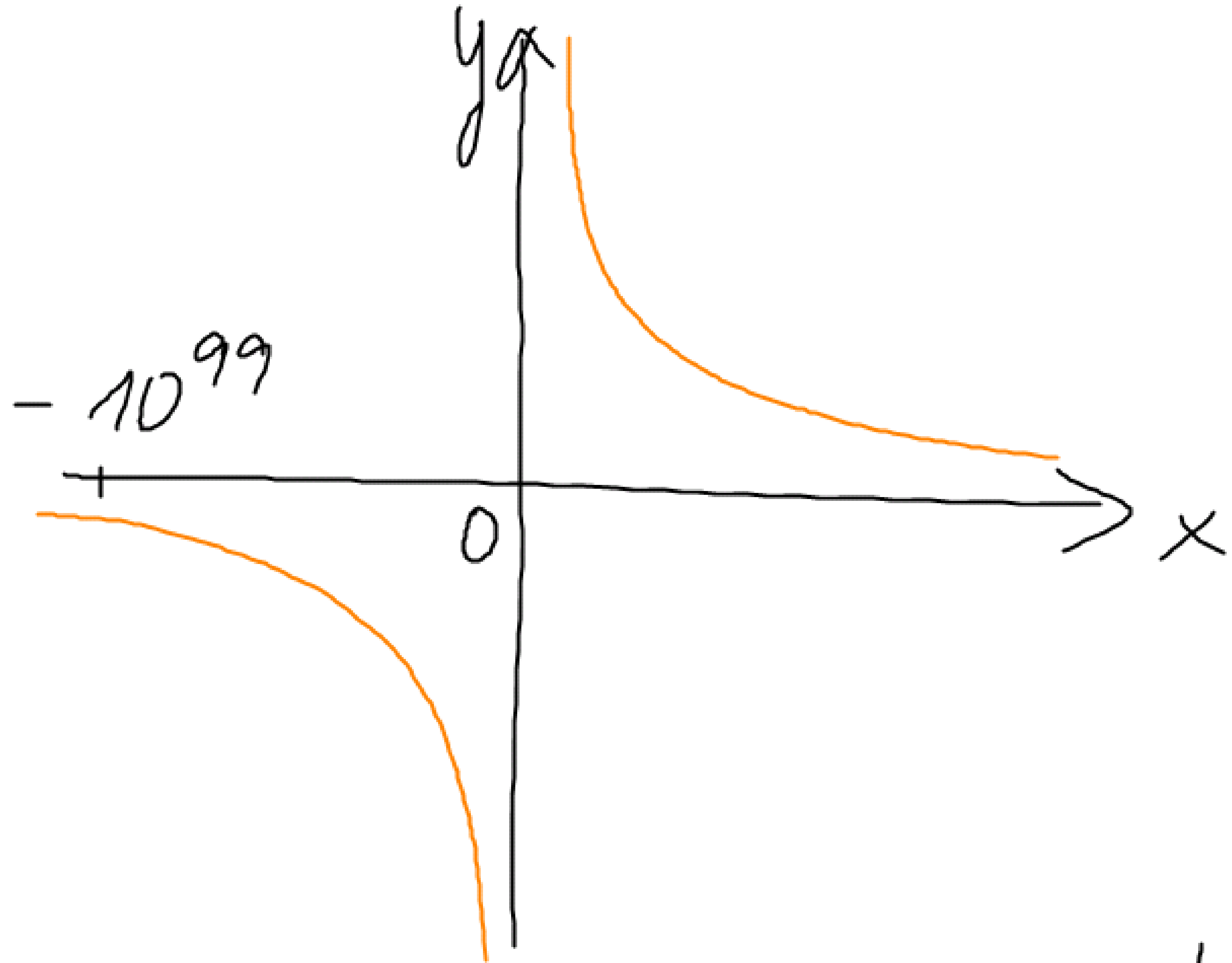
Bolzano – náznak ε-δ definic

Cauchy, Lagrange, Rolle, … – ε-δ definice

Limita

$f: y = \frac{1}{x}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



- pro velká $\underline{x}$ se hodnoty $f(x)$ blíží k nule
- pro extrémně malá $\underline{x}$ se hodnoty $f(x)$ blíží k nule
- pro $\underline{x}$ v okolí 0

- pro x skoro nulová ale KLADNÁ jsou $f(x)$ extrémně velké
- pro x skoro nulová ale ZÁPORNÁ jsou $f(x)$ extrémně malé

další fce: $y = \frac{2}{x-3} + 1$

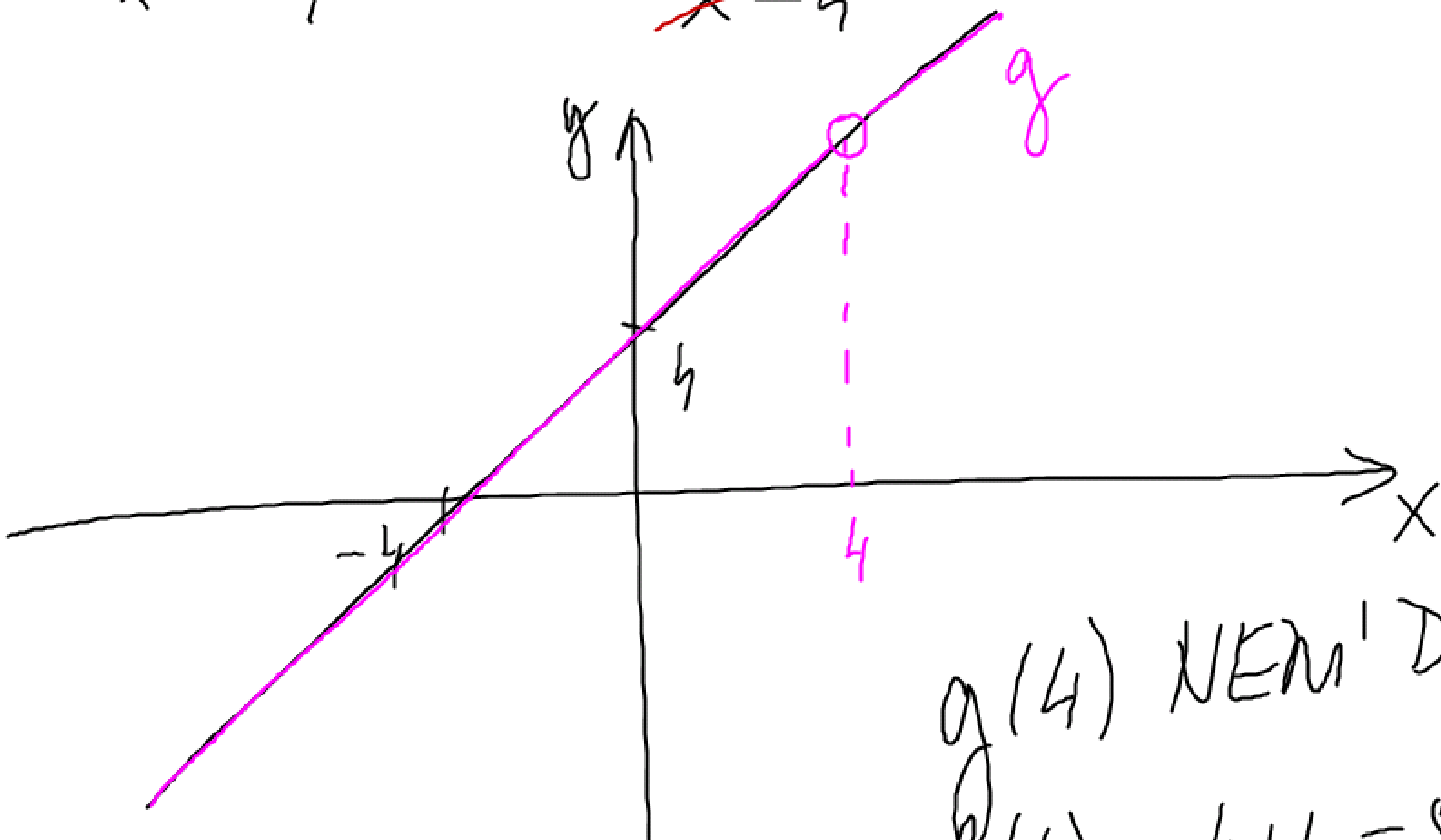
$y = \log x$

$y = -x + 3$

Nakreslete graf fce $g: y = \frac{x^2-16}{x-4}$

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

$h: \quad y = \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}} = x+4$

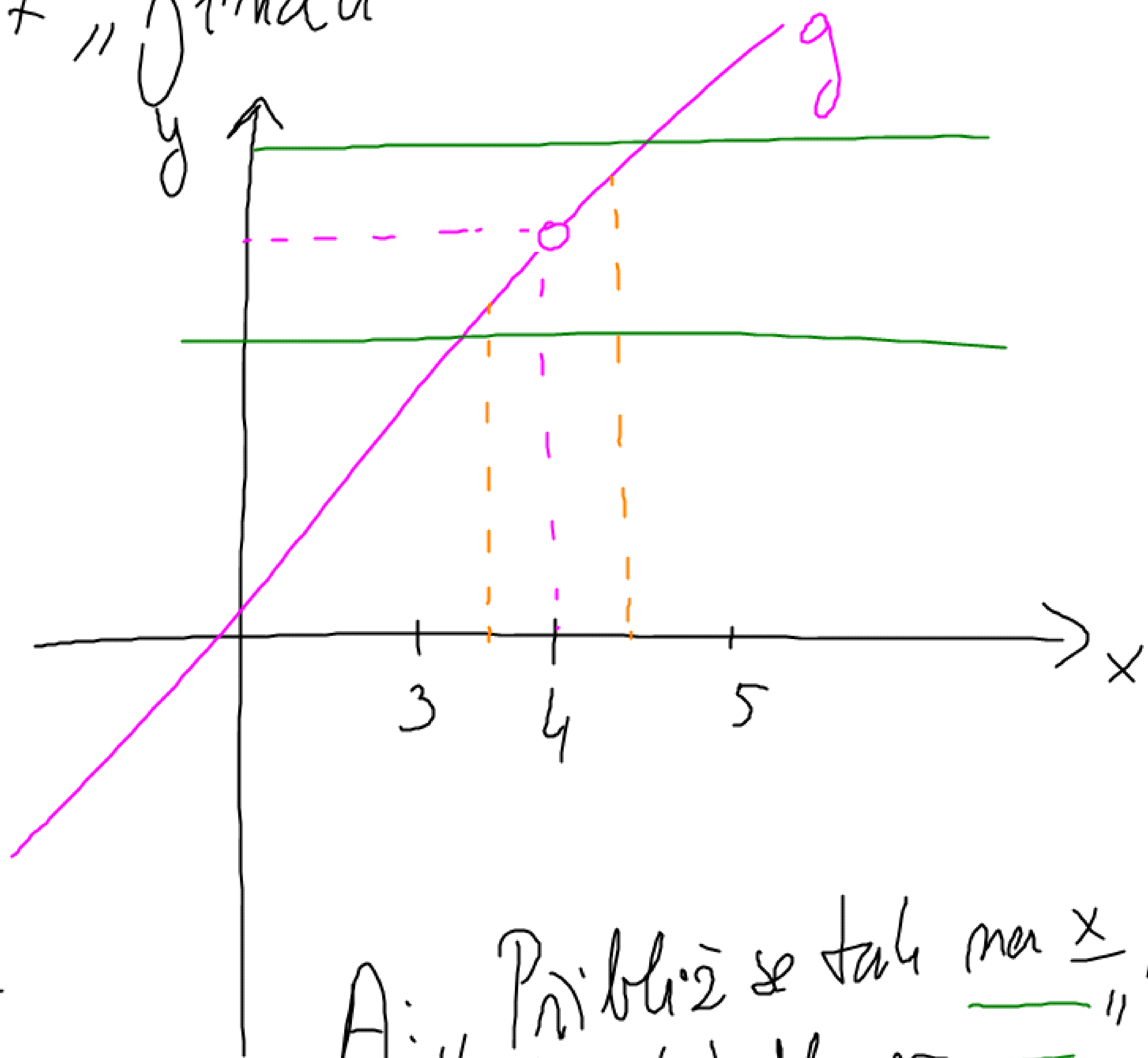


$g(4)$ NENÍ DEFINOVÁNO

$h(4) = 4+4 = 8$

g(4) – výpočet „jinak"

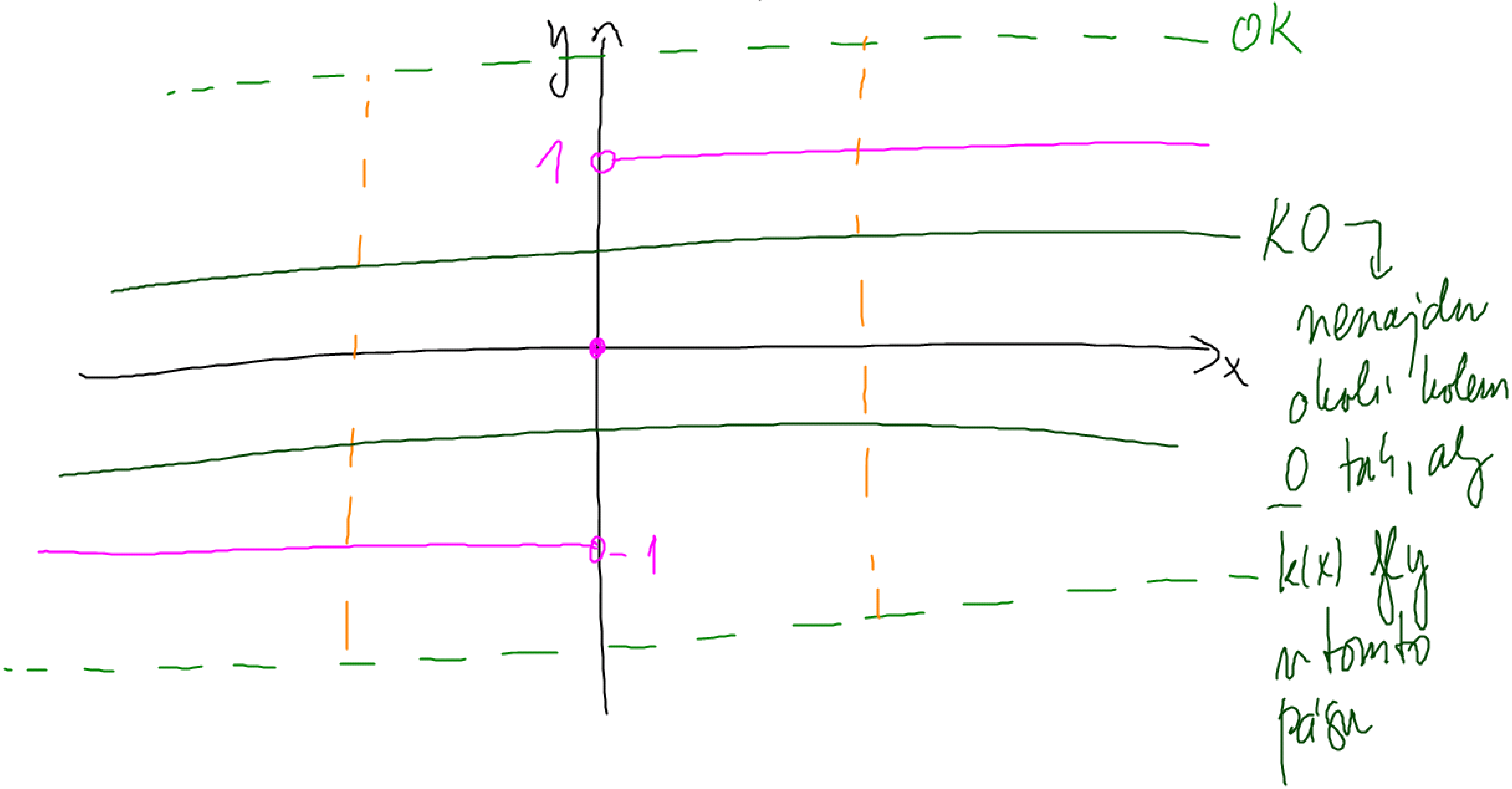
x	g(x)
3	7
5	9
3,5	7,5
4,5	8,5
3,9	7,9
4,1	8,1
3,99	7,99
4,01	8,01



A: „Přibliž se tak na x, aby g(x) bylo v"

B: „Není problém:"

$$k(x) = \operatorname{sign} x = 1 \ \dots \text{ pro } x > 0$$
$$= 0 \ \dots \text{ pro } x = 0$$
$$= -1 \ \dots \text{ pro } x < 0$$

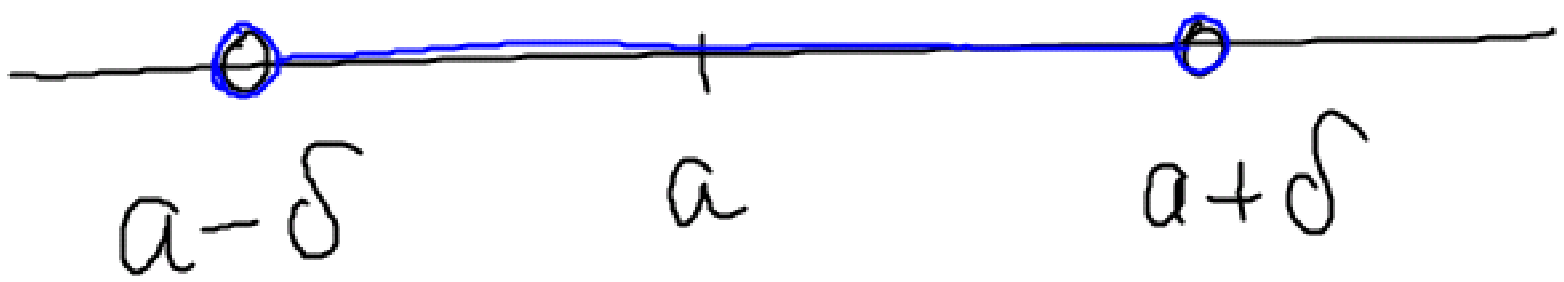


D **Okolí bodu** a se nazývá interval $(a-\delta; a+\delta)$, kde δ je kladné číslo.

Značení: $U(a,\delta)$

$$x \in U(a,\delta) \iff a-\delta < x < a+\delta$$

$$|x-a| < \delta$$

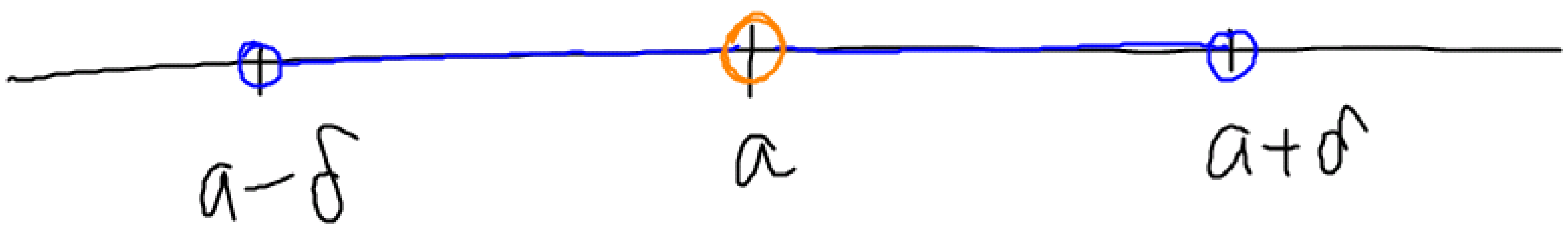


D **Prstencové okolí** bodu $\underline{a}$ se nazývá množina $(a-\delta; a) \cup (a; a+\delta)$, tj. $U(a,\delta) \setminus \{a\}$.

Značení: $P(a,\delta)$

$$x \in P(a,\delta) \iff x \in (a-\delta; a) \vee x \in (a; a+\delta)$$

$$0 < |x-a| < \delta$$



pojmy:

- VLASTNÍ BOD .... $a \in \mathbb{R}$
- NEVLASTNÍ BOD ... $a \to \infty$ nebo $a \to -\infty$
- VLASTNÍ LIMITA ... limita $\in \mathbb{R}$
- NEVLASTNÍ LIMITA ... limita $\to \pm\infty$

defce VLASTNÍ limity ve VLASTNÍM bodě (pro jiné kombinace můžeme mít jiné defce U a P)

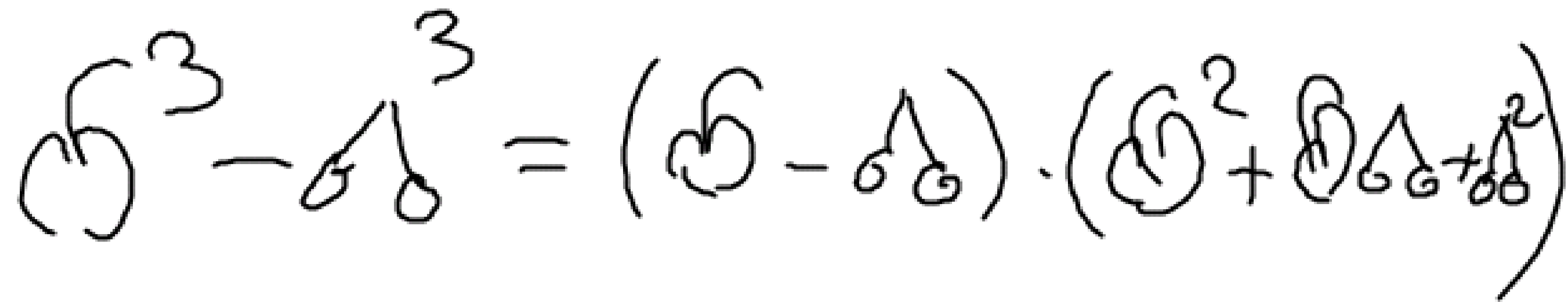
D Fce f má v bodě a limitu L, jestliže k libovolně zvolenému okolí bodu L existuje prstencové okolí bodu a tak, že pro všechna x z tohoto prstencového okolí bodu a nabývá funkční hodnoty $f(x)$ zvoleném okolí bodu L.

Zápis: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in P(a,\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$U(a,\delta) \setminus \{a\} \qquad f(x) \in U(L,\varepsilon)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x+3}{x^3-1} =$$



limita typu $\frac{0}{0}$, která (s dalšími) patří mezi tzv. neurčité výrazy

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-2x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{3(1-1)}{1^2+1+1} = \underline{\underline{0}}$$

pracujeme na $\mathbf{P}(1,\delta)$

limita důležitá pro techniku:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\Updownarrow$$

$\sin x \doteq x$ pro malé úhly

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot 3 \right) = \underline{\underline{3}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1+\cos 0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \iff 1-\cos x \doteq \frac{x^2}{2}$$

$$\text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

$$\frac{1000-1000}{100-100}=\frac{100(10-10)}{(10-10)(10+10)}=$$

$$=\frac{100}{10+10}=\underline{\underline{5}}$$

$$\frac{600-600}{100-100}=\frac{60(10-10)}{(10+10)(10-10)}=\frac{60}{20}=3$$

$$\frac{-1400+1400}{100-100}=\frac{-140(10-10)}{(10-10)(10+10)}=-\frac{140}{20}=-7$$

$$\frac{kx^2 - kx^2}{x^2 - x^2} = \frac{kx(x-x)}{(x-x)(x+x)} = \frac{kx}{x+x} = \frac{k}{2}$$

0 – „natvrdo nula"

$$\lim_{x \to a} \frac{\cancel{x-a}}{(\cancel{x-a})(x+a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x+a}$$

↳ je OK, neboť pracujeme na **PRSTENCOVÉM** okolí bodu <u>a</u>

limita typu „$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha + 17}{x^\beta + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha\left(1 + \frac{17}{x^\alpha}\right)}{x^\beta\left(1+\frac{1}{x^\beta}\right)} =$$

$\frac{17}{x^\alpha} \to 0$, $\frac{1}{x^\beta} \to 0$

$$= \begin{cases} \infty & \alpha > \beta \\ 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha < \beta \end{cases}$$

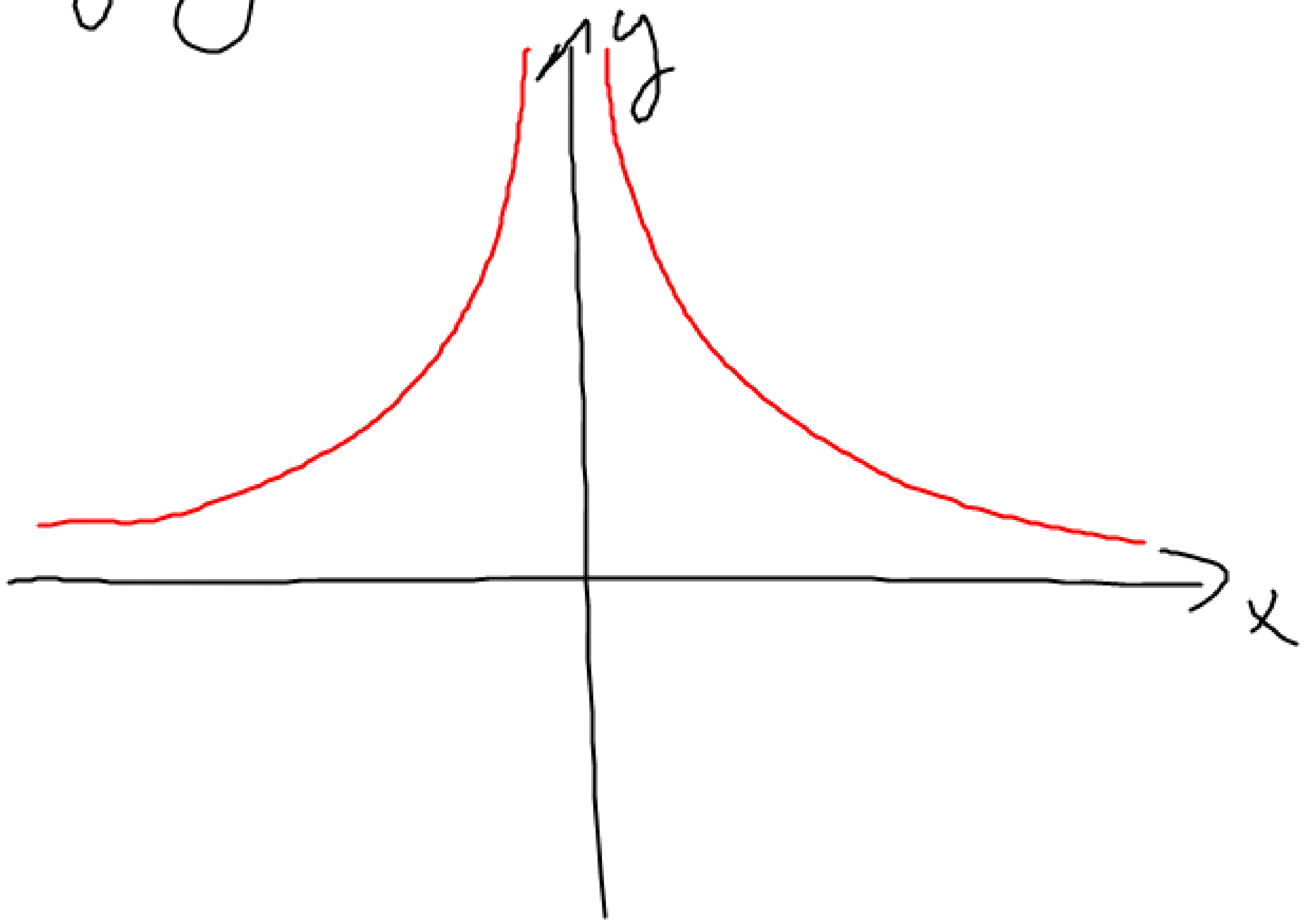
Spojitost fce

„jsou hezké, jsou nakreslitelné jedním tahem"

D Fce f se nazývá SPOJITÁ v bodě $\underline{a}$, jestliže současně platí:

- f je v $\underline{a}$ definovaná ($\Leftrightarrow a \in D_f$);
- existuje vlastní $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

① $f: y = \frac{1}{x^2}$



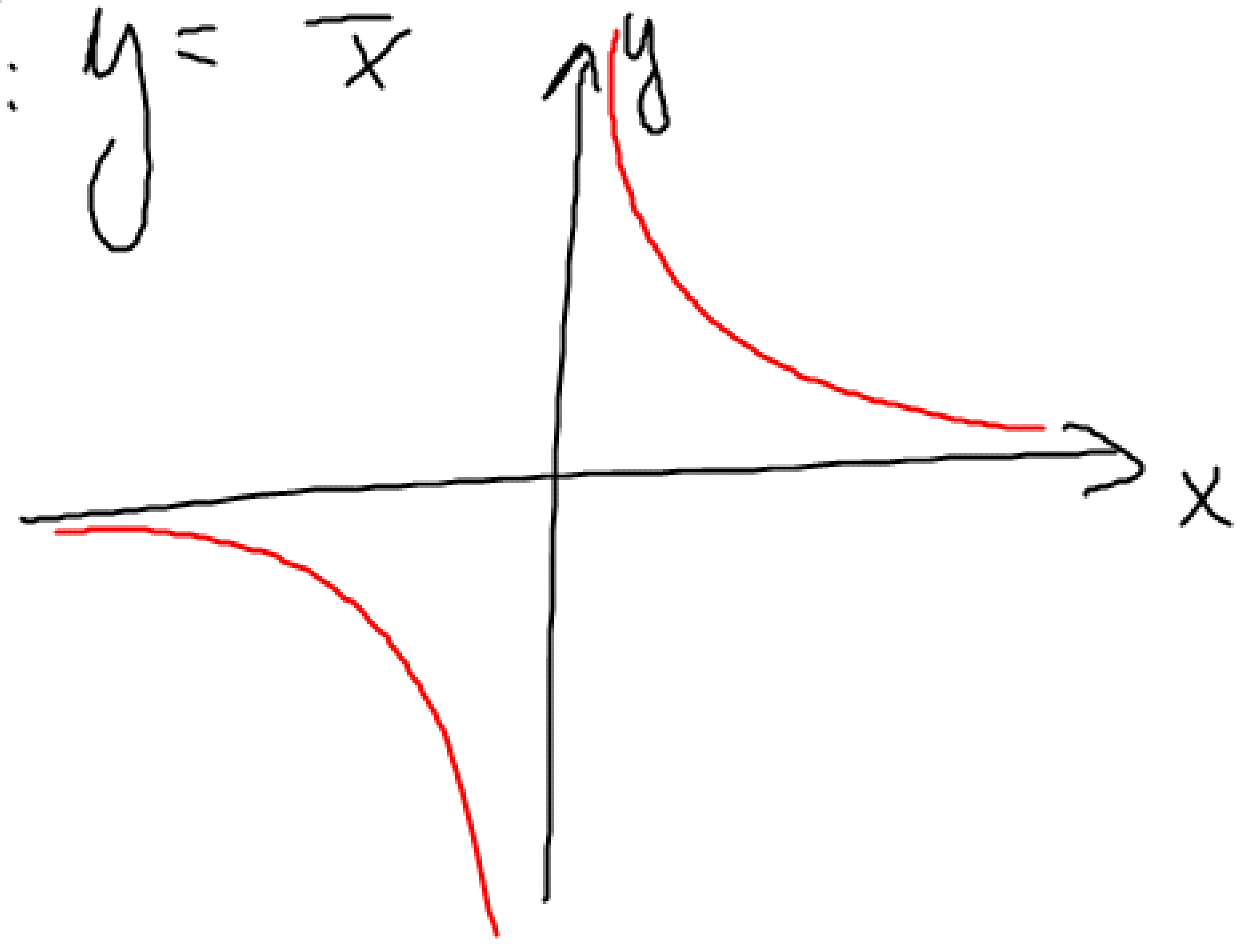
$x \to 0$

$0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$

nevlastní

② $f: y = \frac{1}{x}$

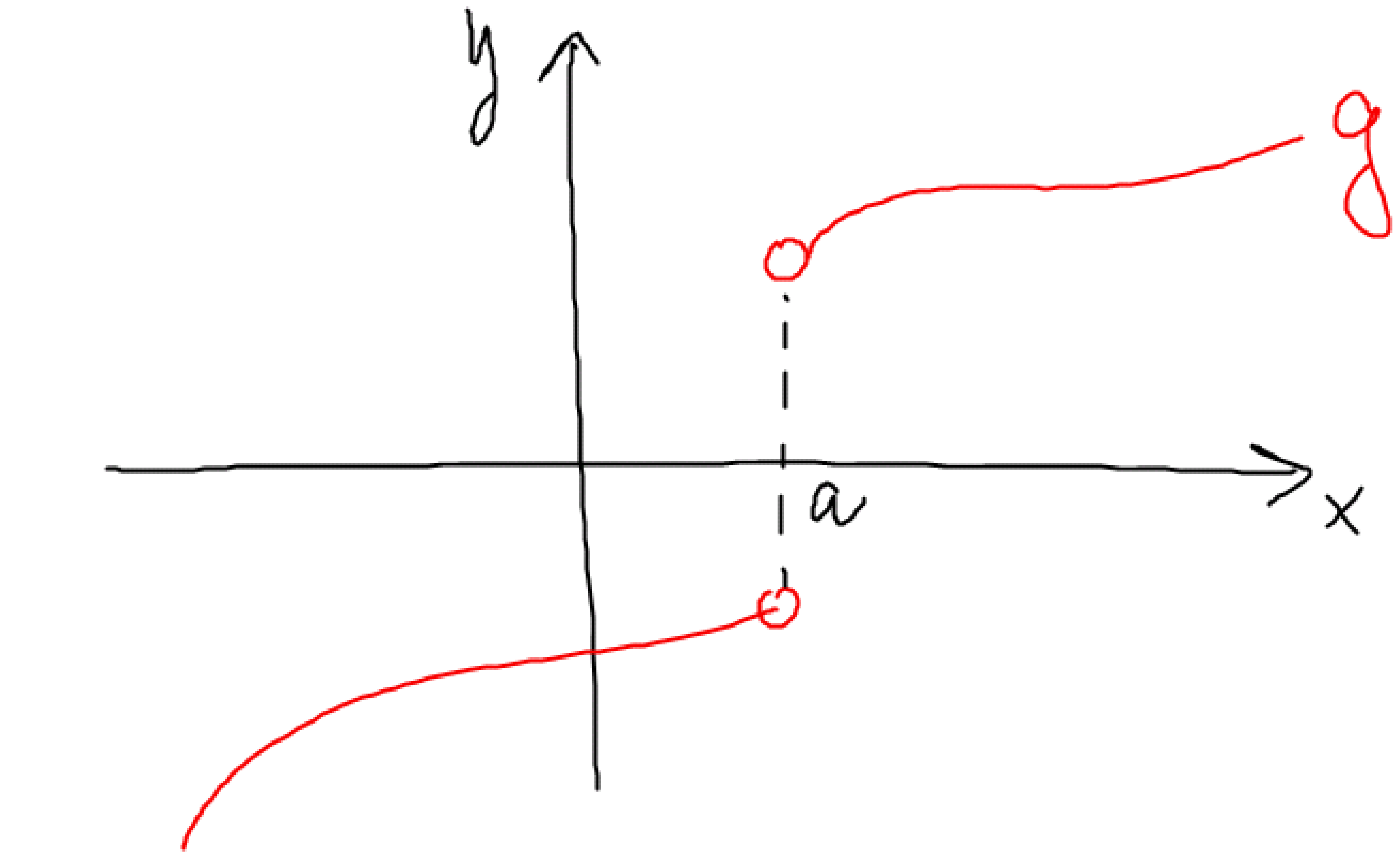


$x \to 0$

$0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ NEEXJE

③



$x \to a$

$\lim\limits_{x \to a} g(a)$ NEEXISTUJE,

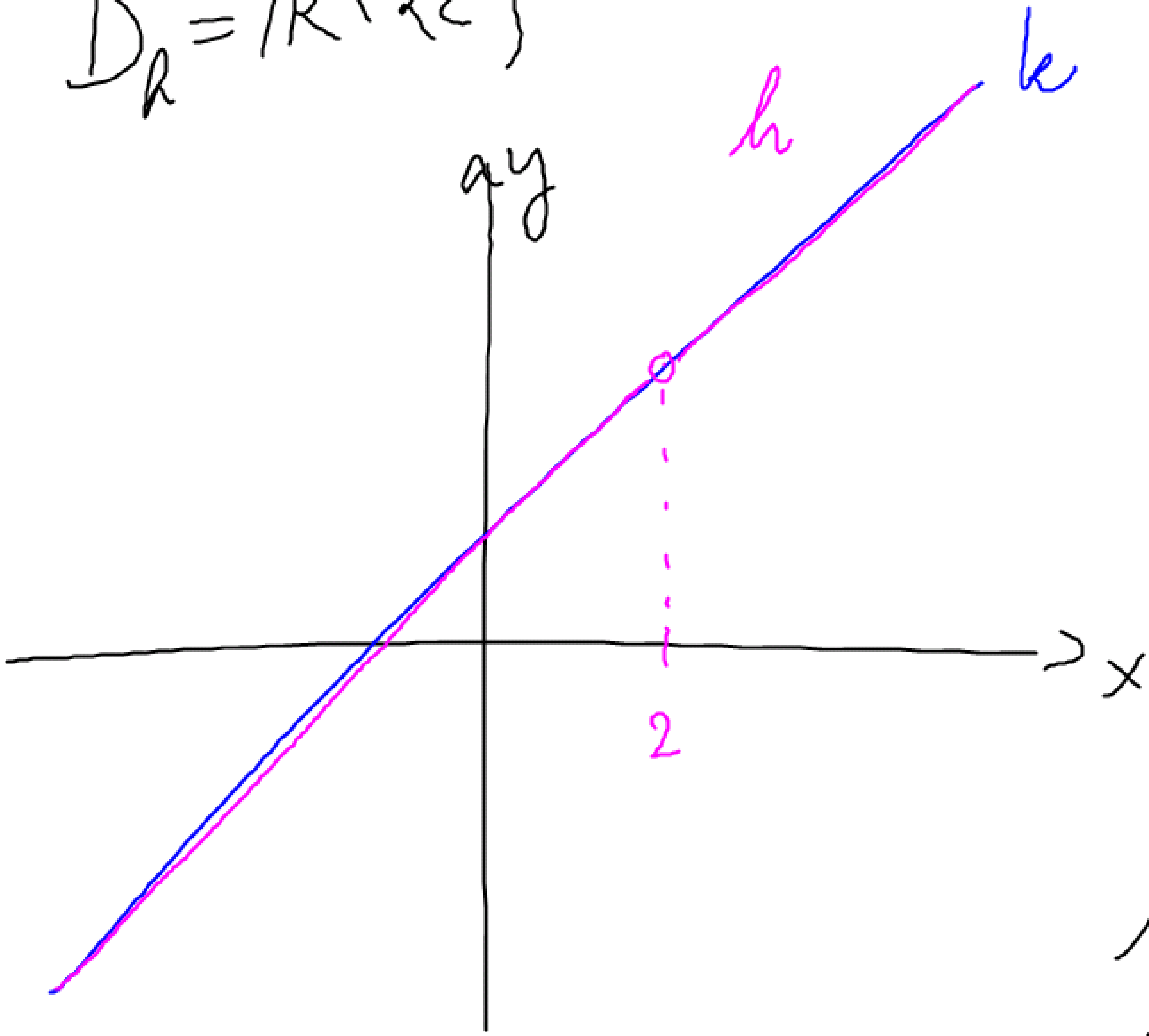
protože limity zleva a zprava jsou různé

(př. pilovitý, trojúhelníkový, ... průběh napětí)

(4)

$$h: y = \frac{x^2-4}{x-2} \rightsquigarrow k: y = x+2$$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



$\underline{h}$ není spojitá v $x=2$, protože $2 \notin D_h$

lze (pomocí fce $\underline{h}$) $h(2)$ dodefinovat tak, aby $\underline{h}$ byla spojitá i pro $x=2$

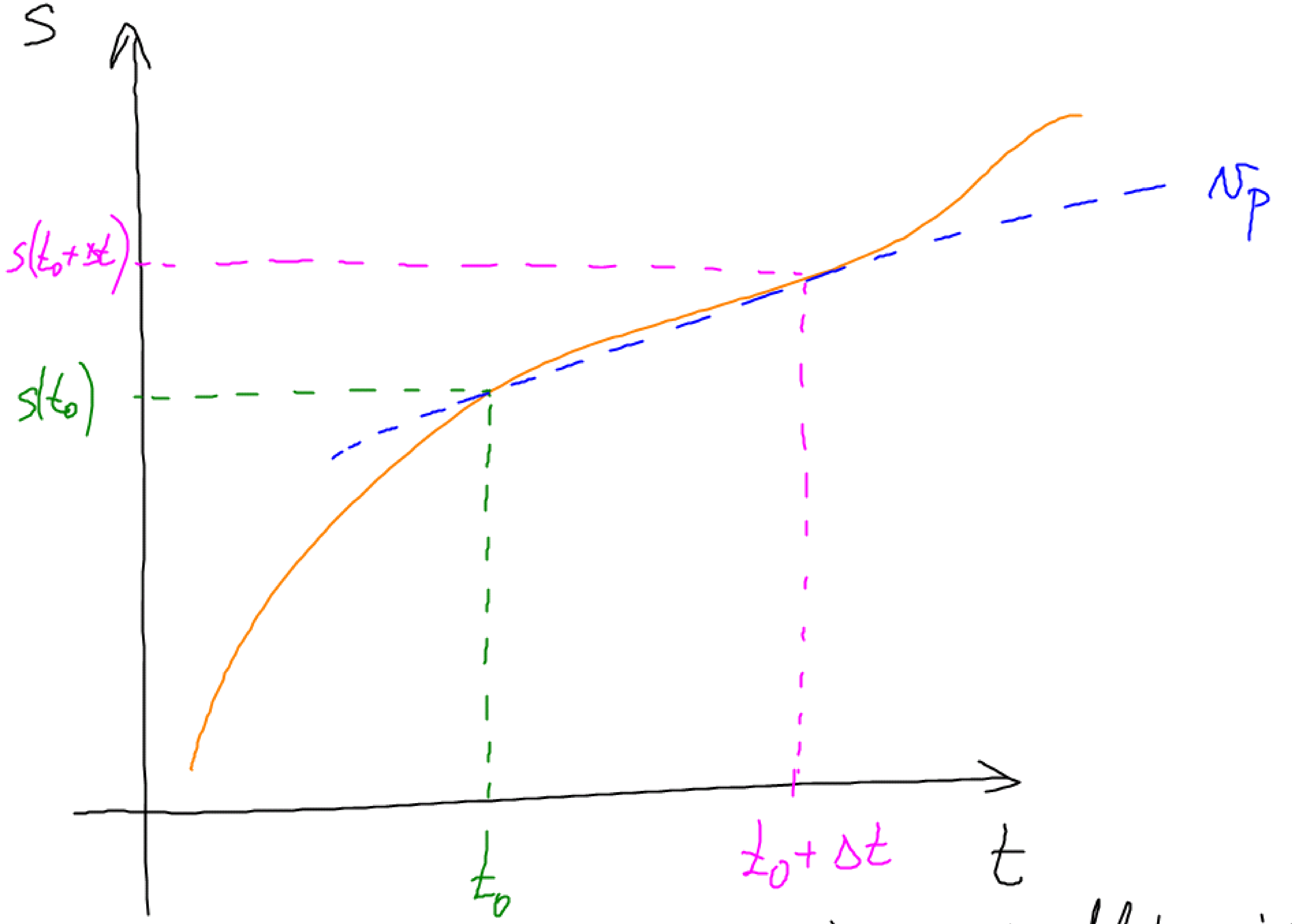
Derivace fce

1) motivace: graf závislosti $s(t)$ (resp. $x(t)$)

a frajity

cíl: najít VELIKOST OKAMŽITÉ RYCHLOSTI

v libovolném čase $\underline{t_0}$



výpočet okamžité rychlosti ... problém i ve F; snadno
počítat pomocí průměrné rychlosti (viz cyklo-computer, auto, GPS, ...)

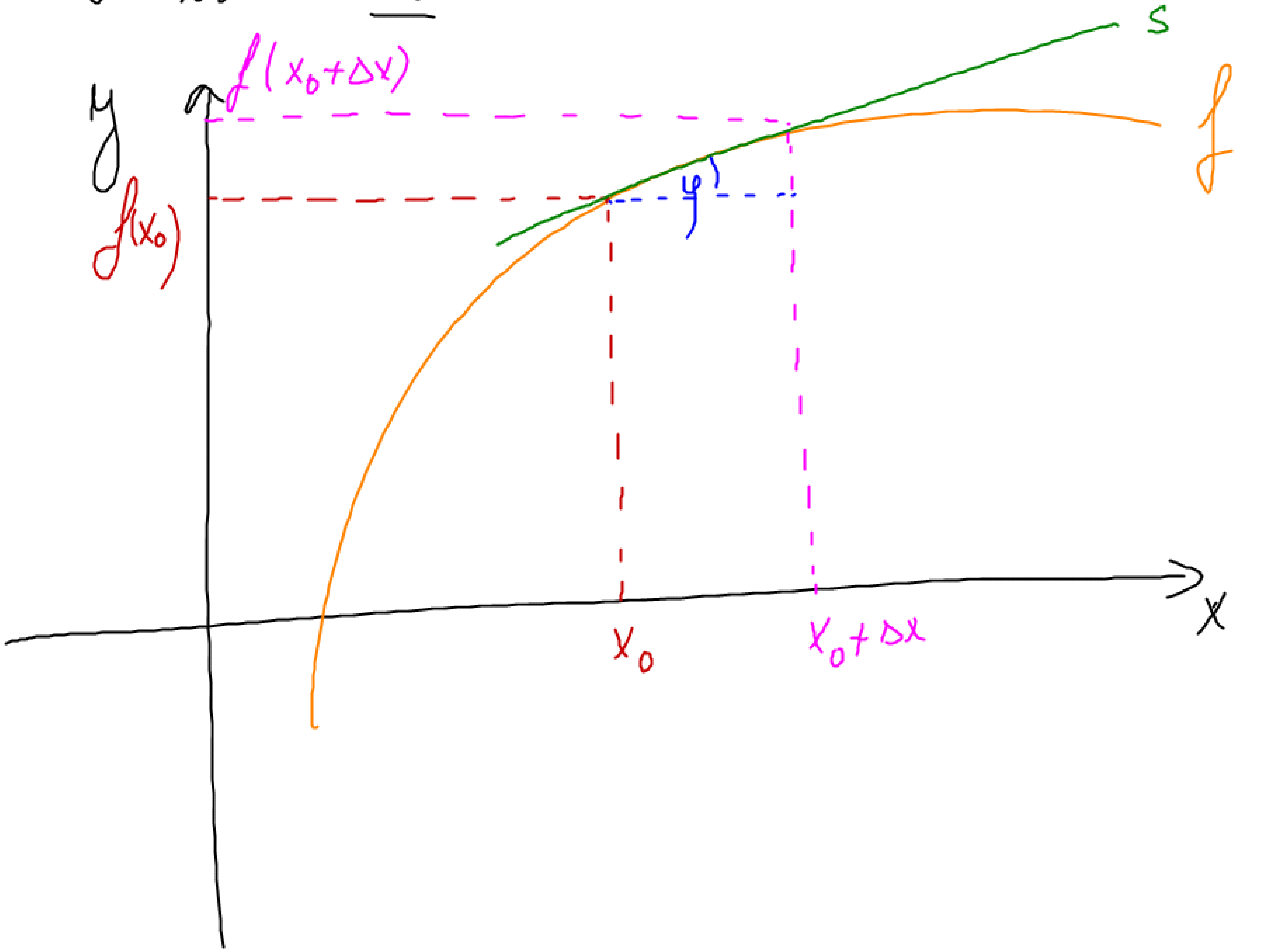
průměrná rychlost na intervalu $(t_0 ; t_0 + \Delta t)$

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

okamžitá rychlost: $\underline{v_p}$ na <u>malém</u> intervalu $(t_0 ; t_0 + \Delta t)$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

2) najít směrnici tečny ke grafu fce f v bodě $\underline{x_0}$



směrnice tečny k_t je problém na výpočet,

ale směrnice k_s sečny, která prochází

bodem $[x_0; f(x_0)]$, půjde spočítat

$$k_s = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

sečna přejde v tečnu, pokud budeme zmenšovat

Δx k nule

$$k_t = \lim_{\Delta x \to 0} k_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Zároveň: poslední vztah ve 2, je stejný
jako poslední vztah v 1)

FORMÁLNĚ

⇒ tento vztah (jak si všimli i matematikové a fyzikové v historii) má tedy patrně velký význam ⇒ nazvali ho DERIVACE FCE

D Nechť fce f je definovaná v určitém okolí bodu x_0. Existuje-li limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta)-f(x_0)}{\Delta x}$$

nazývá se DERIVACE FCE f v bodě x_0.

Značení: $$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

lenost matematiků: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$

lenost fyziků : $\dot{s}(t_0) = \frac{ds}{dt}$

derivace elementárních fcí z defce:

$f: y = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x_0^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 + 0 =$$

$$= 2x_0$$

$$g: y = \sin x$$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x_0+\Delta x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_0+\Delta x + x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$\nearrow 1$$

$$= 1 \cdot \cos \frac{2x_0 + 0}{2} = \cos x_0$$

$y = k$

„čistá 0"

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x} = 0$$

nestačí okolí 0

Bez ohľadu na $\underline{D}$ určte 1. deriváciu fcii

1) $f: y = x^4$

$f': y = 4x^3$

$$\frac{\cancel{d}}{\cancel{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = $$
$$= -\frac{1}{x\cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

2) $g: y = 4x^3$

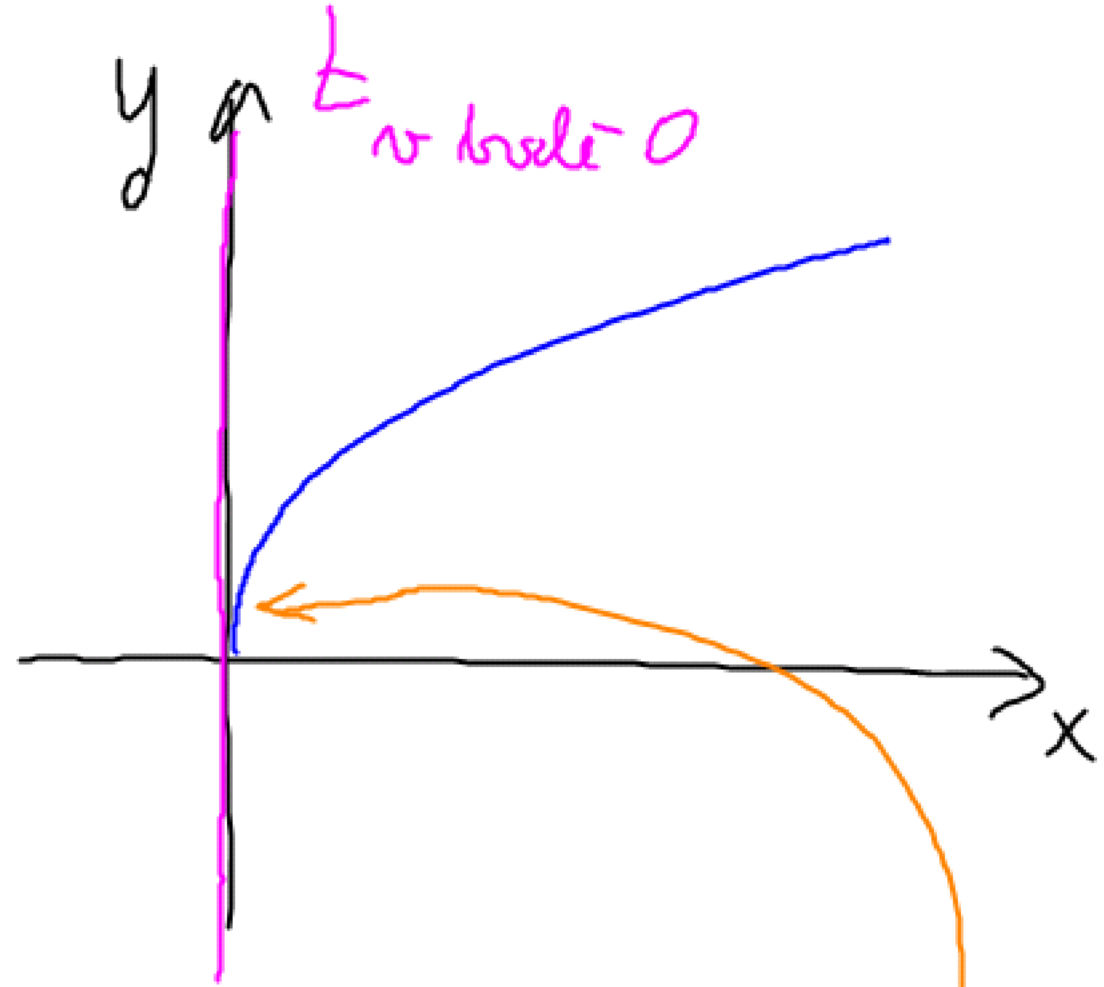
$g': y = 4\cdot 3\cdot x^2 = 12x^2$

3) $h: y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$h': y = -1\cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

5) $j: y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

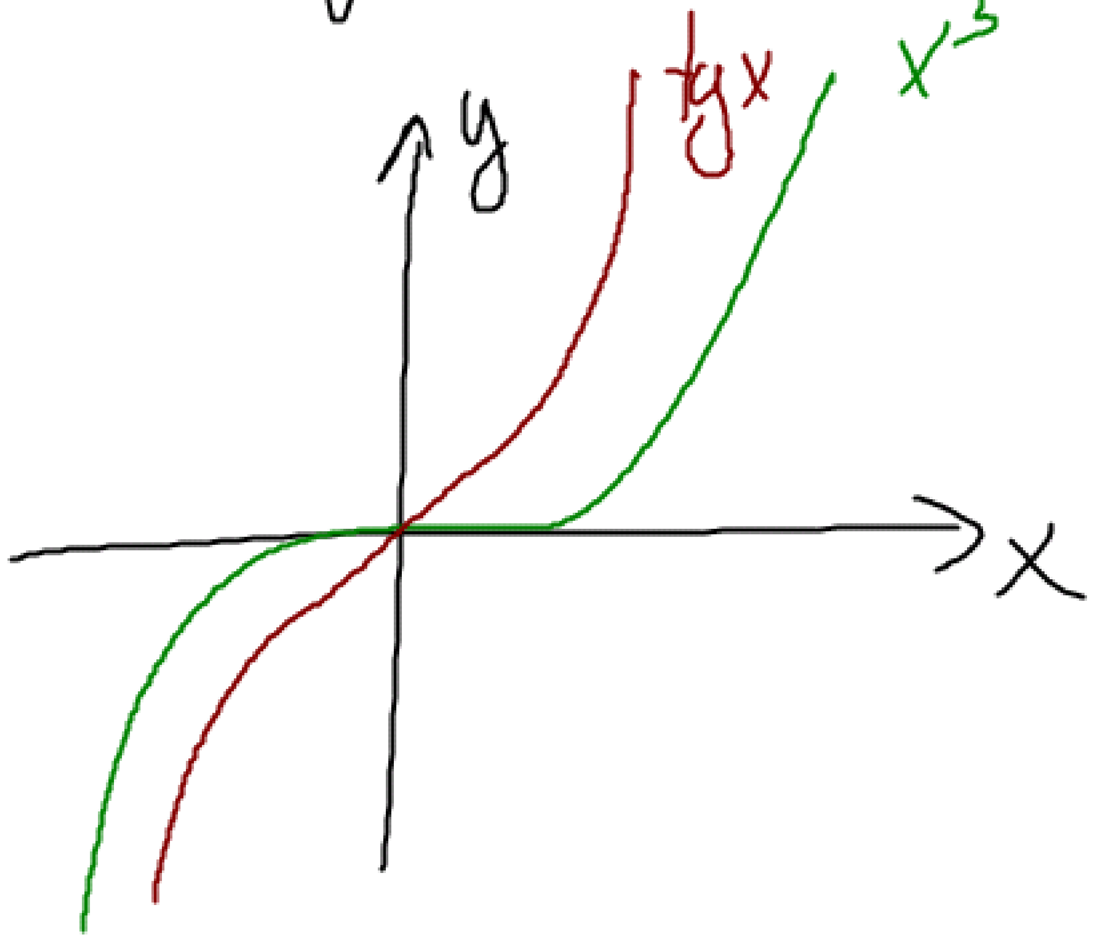
$j': y = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



$D_j = \langle 0; \infty)$

$D_{j'} = (0; \infty)$

$j'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \infty$



$k: y = x^3$

$k': y = 3x^2$

$k'(0) = 0$

$l: y = \mathrm{tg}\, x$

$l': y = \frac{1}{\cos^2 x}$

$l'(0) = \frac{1}{\cos^2 0} = 1$

Mají-li fce $f(x)$ a $g(x)$ derivaci v bodě $\underline{x_0}$, má derivaci i fce:

$$\left(f(x_0) \pm g(x_0)\right)' = f'(x_0) \pm g'(x_0);$$

$$\left(f(x_0) \cdot g(x_0)\right)' = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

$$\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{pro } g(x_0) \neq 0.$$

5) $m: y = x \sin x - 1$

$m': y = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - 0$

6, $m: y = e^x \cdot \cos x + x^2$

$m': y = e^x \cdot \cos x + e^x(-\sin x) + 2x$

7) $p: y = x^2 \cdot \ln x$

$p': y = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$

8) $q: y = \frac{x^3}{\sin x}$

$$q': y = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

9) $r: y = tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$r': y = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

10) $s: y = \frac{3e^x}{\ln x}$

$$s': y = \frac{3e^x \ln x - 3e^x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

složená fce

$f: y = 3x - 2$

$g: y = 4\sin x + 7$

$f \circ g = f(g(x)) = 3(4\sin x + 7) - 2$

$g \circ f = g(f(x)) = 4\sin(3x-2) + 7$

$f(x) = 3x - 2$

$f(5) = 3 \cdot 5 - 2$

$$\left(f(g(x_0))\right)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

11) $z: y = \sin(3x-1)$

$z': y = \cos(3x-1) \cdot 3$

12) $u: y = -2\cos^3(\sin(\underline{4x-2}))$

$u': y = -2 \cdot \underbrace{3 \cdot \cos^2(\sin(4x-2))}_{} \cdot \left(-\sin(\sin(4x-2))\right) \cdot \underline{\cos(4x-2)}$

$\cdot \underline{4}$

13/ $v: \; y = (3x-1)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(3x-1)}$

$v': \; y = e^{\sin x \cdot \ln(3x-1)} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(3x-1) + \sin x \cdot \frac{3}{3x-1} \right) =$

$= (3x-1)^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln(3x-1) + \frac{3 \sin x}{3x-1} \right)$

14/ $k: \; y = 10 \log \frac{x}{5} = 10 \, \frac{\ln \frac{x}{5}}{\ln 10}$ = konst.

$k': \; y = \frac{10}{\ln 10} \cdot \frac{1}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5}$

15, a: $y = x^{x} = e^{x \cdot \ln x}$

a': $y = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= x^{x}\left(\ln x + 1\right)$

Fyzikální aplikace

Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

$v(t) = ?$

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} a \cdot 2t + v_0 = at + v_0$$

$a(t) = ?$

$$a = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = a + 0 = a$$

Mravenec – viz 1.01 (str. 20)

$$\vec{r}_M = \left(\left(\frac{R}{2} + vt\right) \cos\omega t \, ; \, -\left(\frac{R}{2} + vt\right) \sin\omega t \right)$$

$$\vec{v}_M = ?$$

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \left(v \cdot \cos\omega t + \left(\frac{R}{2} + vt\right) \cdot (-\sin\omega t) \cdot \omega \, ; \right.$$

$$\left. -\left(v \sin\omega t + \left(\frac{R}{2} + vt\right) \cdot \cos\omega t \cdot \omega \right) \right)$$

Mravenec na kuželu – viz 1.03 (str. 22–23)

$$\vec{r}_M = \left(vt \sin\alpha \cos\omega t;\ vt \sin\alpha \sin\omega t;\ h - vt\cos\alpha \right)$$

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \Big(v \sin\alpha \cdot \cos\omega t + vt \sin\alpha \cdot (-\sin\omega t)\cdot\omega;$$
$$v \sin\alpha \sin\omega t + vt \sin\alpha \cdot \cos\omega t \cdot \omega;\ -v\cos\alpha \Big)$$

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \Big(v \sin\alpha \left(-\sin\omega t\right)\cdot\omega - v\omega \sin\alpha \cdot \sin\omega t -$$
$$- vt\omega^2 \sin\alpha \cdot \cos\omega t;$$
$$v \sin\alpha \cos\omega t \cdot \omega + v\omega \sin\alpha \cdot \cos\omega t + v\omega^2 t \sin\alpha \left(-\sin\omega t\right);$$
$$0 \Big)$$

Tlumené kmitání:

$$y = y_m e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$y_m, b, \omega, \varphi_0 = konst.$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = y_m(-b)e^{-bt} \sin(\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ y_m e^{-bt} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = y_m b^2 e^{-bt} \sin(\omega t) - y_m b e^{-bt} \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega -$$

$$- y_m b e^{-bt} \omega \cos(\omega t + \varphi_0) + y_m \omega^2 e^{-bt} (-\sin(\omega t + \varphi_0))$$

Kmitanie:

$$y = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = y_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -y_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Mg. indukční tok v cívce:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$u_i = ?$

Faraday: $$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

$$u_i = -L I_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

bez derivace

$$f_{\bar{n}} = \frac{\Delta b\bar{z}}{\Delta h\breve{n}}$$

- rovnoměrné
- pomalé
- malé změny
- . . . .

s derivací

$$f_{\bar{n}} = \frac{d\, b\bar{z}}{d\, h\breve{n}}$$

VŠE