Střední průmyslová škola sdělovací techniky
Panská 3
Praha 1

Matematické hrátky

náměty na matematické hrátky

Obsah

1. Úvod

Některé hodiny fyziky i matematiky lze příležitostně oživit různými aktivitami, které mohou zvýšit pozornost žáků, rozptýlit monotónní běh hodiny nebo rozšířit vědomosti, znalosti a dovednosti žáků nad rámec toho, co běžně v hodinách fyziky a matematiky probírají. Uvedené úlohy jsou pouze náměty, jak s nimi naloží jednotliví vyučující je na jejich uvážení, znalosti žáků, metodě výuky, …

2. Úlohy řešené geometricky

Aktivity popsané v této kapitole jako geometrické „důkazy“ nejsou důkazy v pravém matematickém smyslu. Aktivity jsou totiž provedeny pro jednu konkrétní volbu trojúhelníka (pro jeho konkrétně zadané rozměry), pro nějž chceme ukázat platnost Pythagorovy věty resp. pro jednu konkrétní volbu obdélníků, pomocí kterých chceme ukázat platnost algebraických vztahů. Dále je třeba vzít v úvahu skutečnost, že pokud si budou žáci tyto aktivity skutečně samostatně zkoušet, nemusejí příslušné geometrické obrazce (díky nenulové tloušťce čar, možnému zkreslení při tisku, …) zcela přesně odpovídat zobrazené síti, do které je budeme skládat. I přes tato omezení mohou dále popsané aktivity přispět k pevnějšímu pochopení „dokazovaných“ tvrzení.

Míru komentáře výše uvedeného žákům ponechávám na rozhodnutí a zodpovědnosti učitele. Musí zvážit věk žáků, typ studované školy, …, do jaké míry má smysl aktivity komentovat.

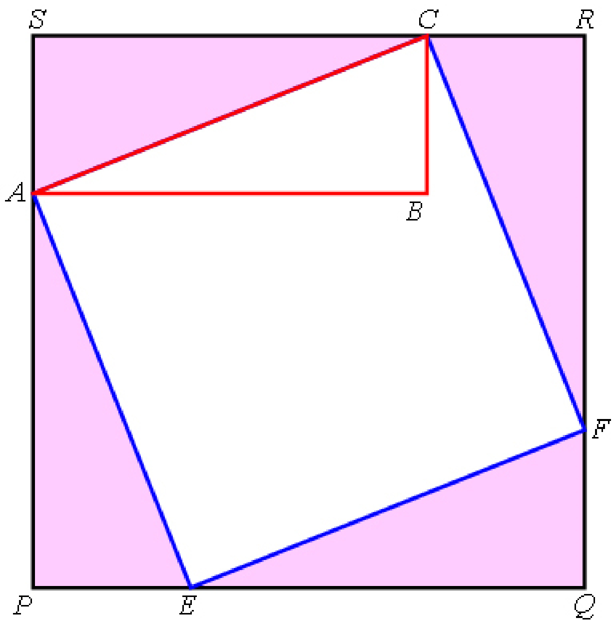
2.1 Pythagorova věta

Jedním ze základních poznatků matematiky je i Pythagorova věta. Tu znali patrně již staří Egypťané, kteří na základě trojúhelníka o stranách délky 3 jednotky, 4 jednotky a 5 jednotek vyměřovali pravé úhly. Formální důkaz platnosti této důležité věty provedli až pythagorejci.

Důkazů Pythagorovy věty existuje celá řada – ať už to jsou geometrické důkazy nebo algebraické důkazy. Geometrický důkaz je důkaz, který je založen na operacích s geometrickými objekty (čtverce, obdélníky, jejich obsahy, …). Algebraický důkaz je veden pomocí úprav algebraických výrazů. Několik důkazů platnosti Pythagorovy je uvedeno níže. Se žáky je vhodné postupovat tak, že vystřihneme příslušné útvary z papíru a žáci je samostatně skládají, a tak sami důkaz objeví nebo vymyslí.

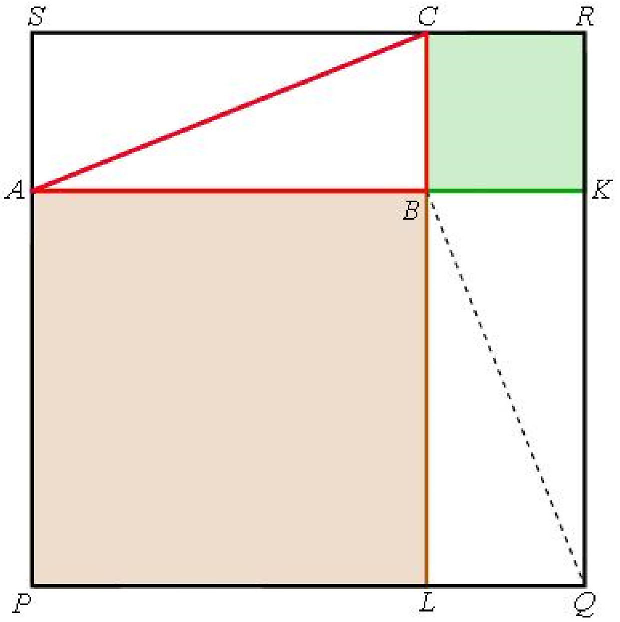
Jedním z důkazů je důkaz, který lze postupně sledovat na obr. 1 a obr. 2. Na obou obrázcích je zobrazen ve čtverci PQRS pravoúhlý trojúhelník ABC. A právě tento pravoúhlý trojúhelník je ten, pro který se budeme snažit dokázat platnost Pythagorovy věty.

Na obr. 1 je dále sestrojen čtverec AEFC, který je sestrojen nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka ABC, tj. jedna strana tohoto čtverce leží na přeponě tohoto trojúhelníka. Většinou se čtverec nad příslušnou stranou trojúhelníka sestrojuje tak, že je vně uvažovaného trojúhelníka, ale v tomto případě je záměrně sestrojen „přes“ trojúhelník. Důvody této volby budou zřejmé.

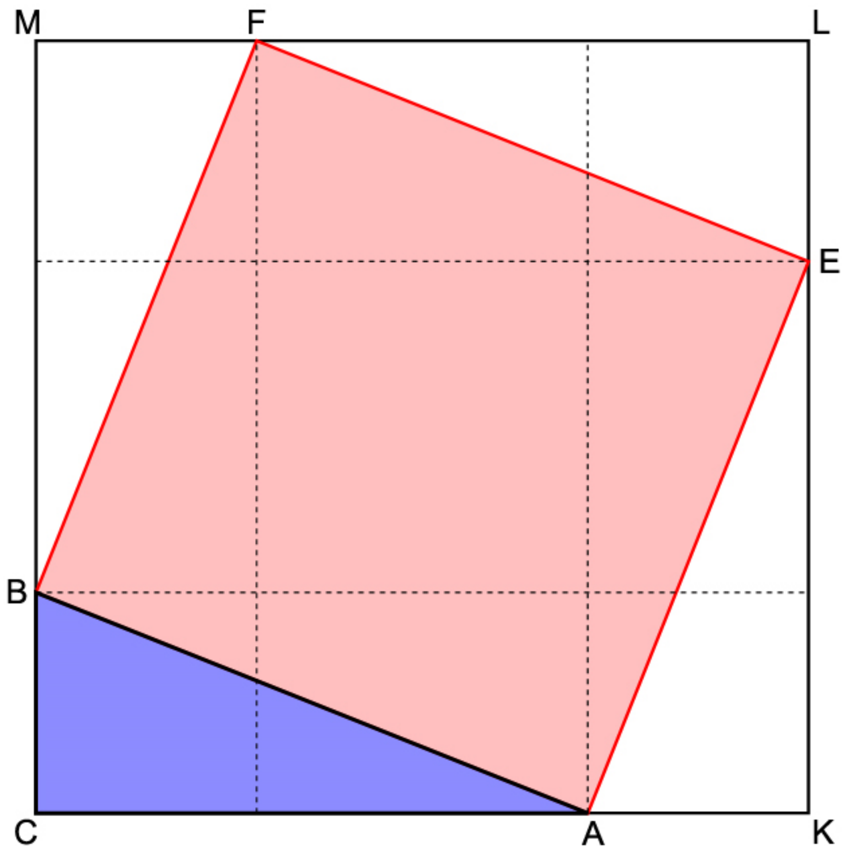


obr. 1

Z obr. 1 vyplývá, že čtverec AEFC můžeme doplnit čtyřmi shodnými pravoúhlými trojúhelníky APE, EQF, FRC a CSA na čtverec PQRS. Přitom tyto trojúhelníky jsou shodné i s trojúhelníkem ABC.



obr. 2



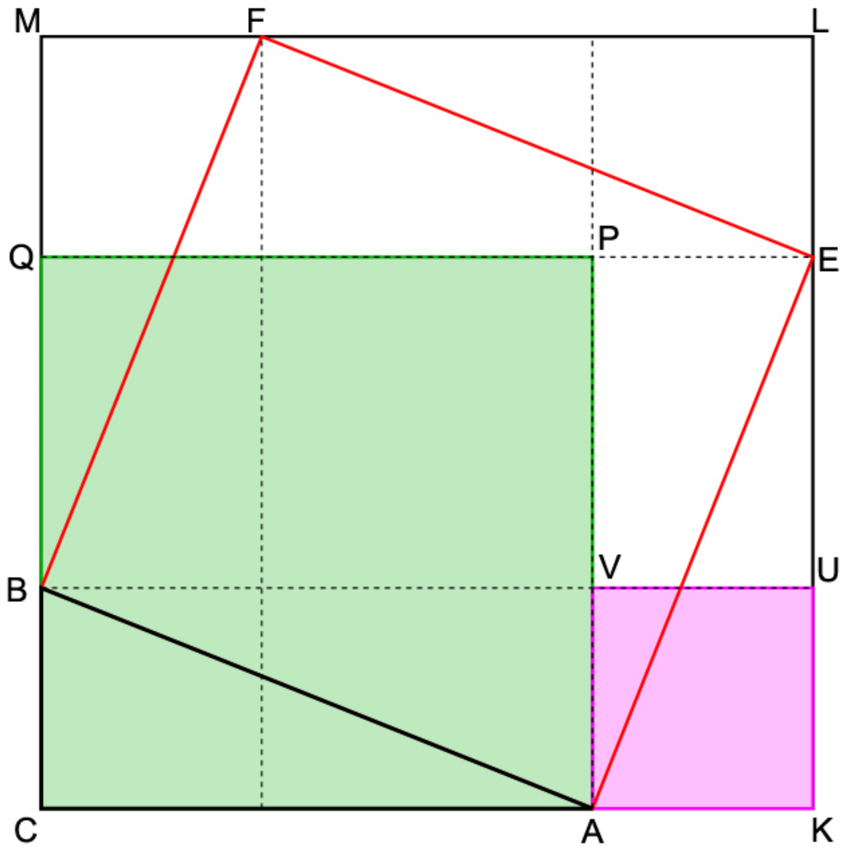
obr. 3

Na obr. 2 je zobrazen tentýž čtverec PQRS a tentýž pravoúhlý trojúhelník ABC. Nad odvěsnami AB a BC tohoto trojúhelníka jsou sestrojeny čtverce PLBA a BKRC. Tyto dva čtverce můžeme doplnit čtyřmi shodnými pravoúhlými trojúhelníky ABC, CSA, BLQ a QKB na čtverec PQRS. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABC, CSA, BLQ a QKB jsou shodné s trojúhelníky APE, EQF, FRC a CSA, kterými jsme doplnili čtverec AEFC rovněž na čtverec PQRS, musí mít čtverec AEFC stejný obsah jako je součet obsahů čtverců PLBA a BKRC. Jinými slovy: Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhelného trojúhelníka ABC je roven součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami tohoto trojúhelníka.

A to je znění Pythagorovy věty, která byla tímto dokázána.

Další důkaz platnosti Pythagorovy věty je velmi podobný. Do čtverce CKLM je vepsán pravoúhlý trojúhelník ABC, pro který chceme dokázat platnost Pythagorovy věty, čtverec BAEF a tři navzájem shodné pravoúhlé trojúhelníky EAK, FEL a BFM, které jsou shodné s trojúhelníkem ABC (viz obr. 3). Shodnost trojúhelníků vyplývá z jejich konstrukce a z pomocné sítě zobrazené na obr. 3. Čtverec BAEF je přitom čtvercem, který je sestrojen nad přeponou trojúhelníka ABC. Další kroky důkazu jsou pro větší přehlednost zakresleny na dalších obrázcích.

Na obr. 4 jsou zakresleny (a barevně vyznačeny) čtverce AKUV a CAPQ, které jsou sestrojené nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka ABC. Čtverec CAPQ není sestrojen vně trojúhelníka, jak bývá zvykem, ale přes tento trojúhelník. Nyní se budeme snažit dokázat, že součet obsahů čtverců AKUV a CAPQ je roven obsahu čtverce BAEF. To lze dokázat např. tak, že se nám podaří přeskládat části čtverců AKUV a CAPQ, které leží mimo čtverec BAEF, do tohoto čtverce.

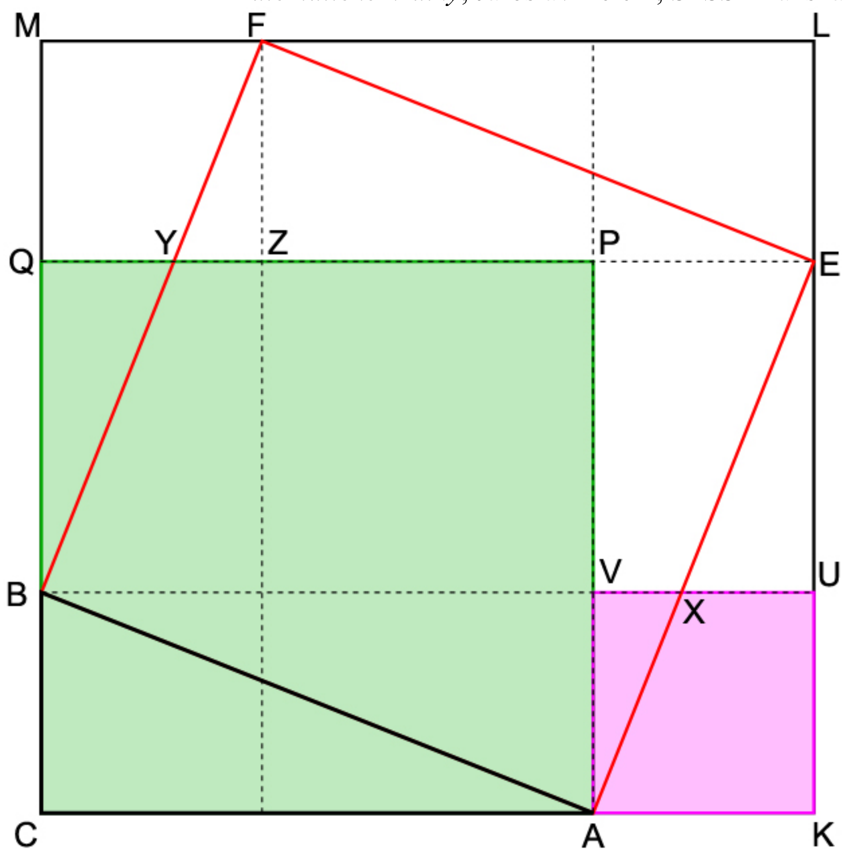


obr. 4

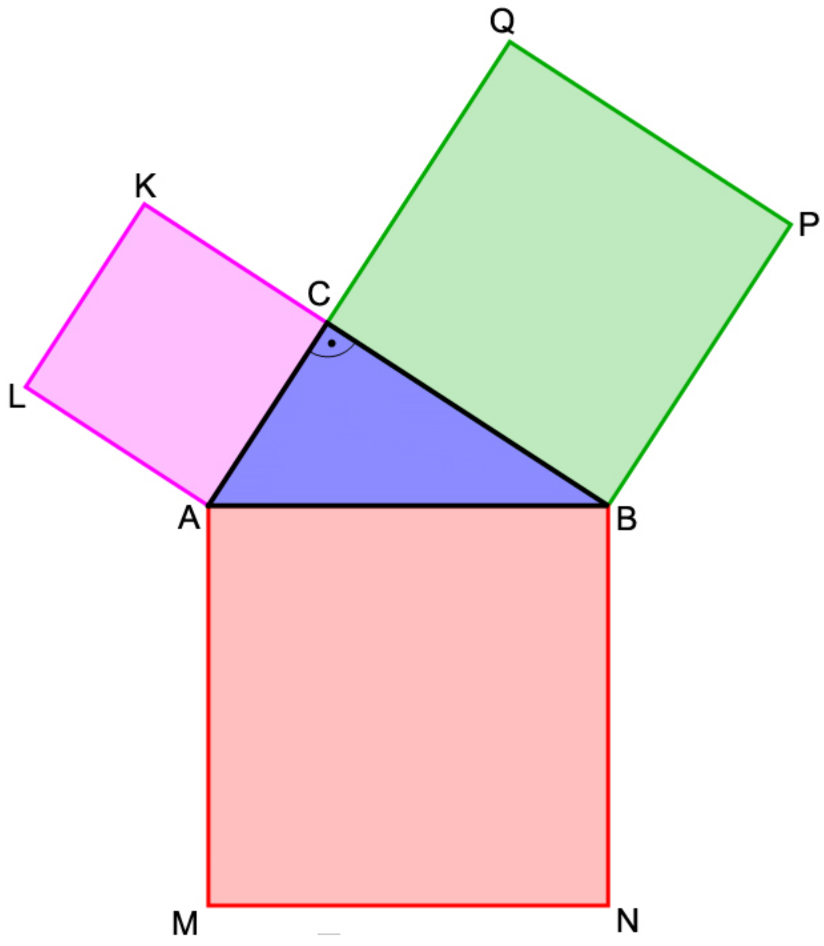
Pro přesnější popis přeskládání čtverců jsou na obr. 5 popsány zbývající body, se kterými budeme dále pracovat.

Z obrázku obr. 5 a zobrazené sítě je zřejmé, že lichoběžníky AKUX a FMQY jsou shodné. Proto lze lichoběžník AKUX přemístit na místo lichoběžníku FMQY. Tím získáme trojúhelník BFM, který je shodný s trojúhelníkem ABC. Trojúhelník BFM lze umístit do čtverce BAEF na pozici trojúhelníka EFZ, který je s ním shodný. Trojúhelník AXV přemístíme na pozici trojúhelníka FYZ. Na místo trojúhelníka AEP přemístíme trojúhelník ABC. Tím se nám podařilo čtverce CAPQ a AKUV sestrojené nad odvěsnami pravoúhelného trojúhelníka ABC přemístit do čtverce BAEF sestrojeného nad přeponou trojúhelníka ABC. Pythagorova je tedy dokázána.

Další typ důkazu Pythagorovy věty využívá vlastností geometrických útvarů. Tentokráte sestrojíme čtverce nad stranami pravoúhlého trojúhelníka ABC tak, jak je zvykem, tj. vně tohoto trojúhelníka (viz obr. 6).

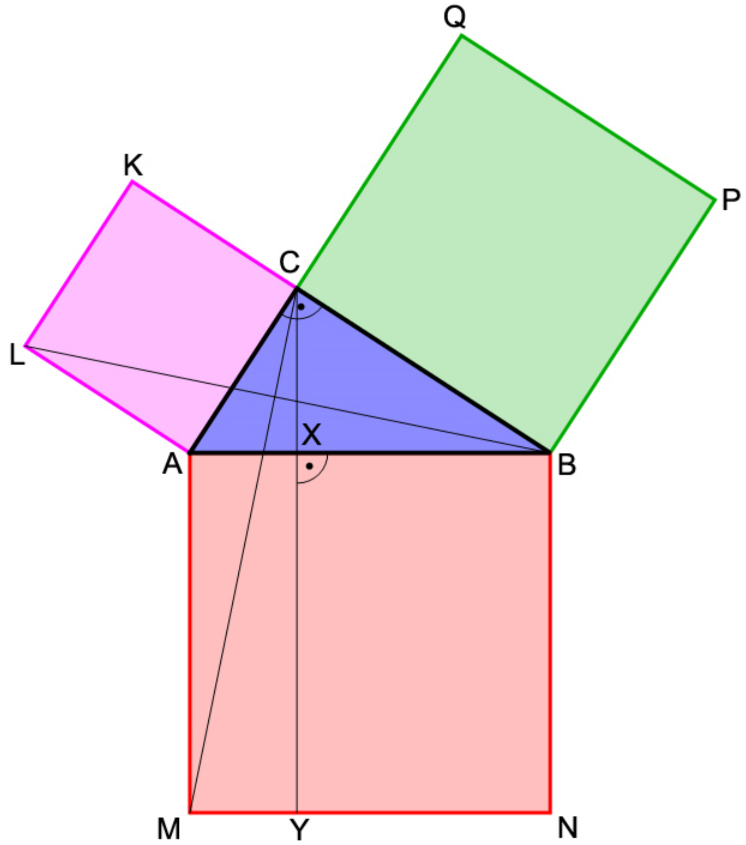


obr. 5

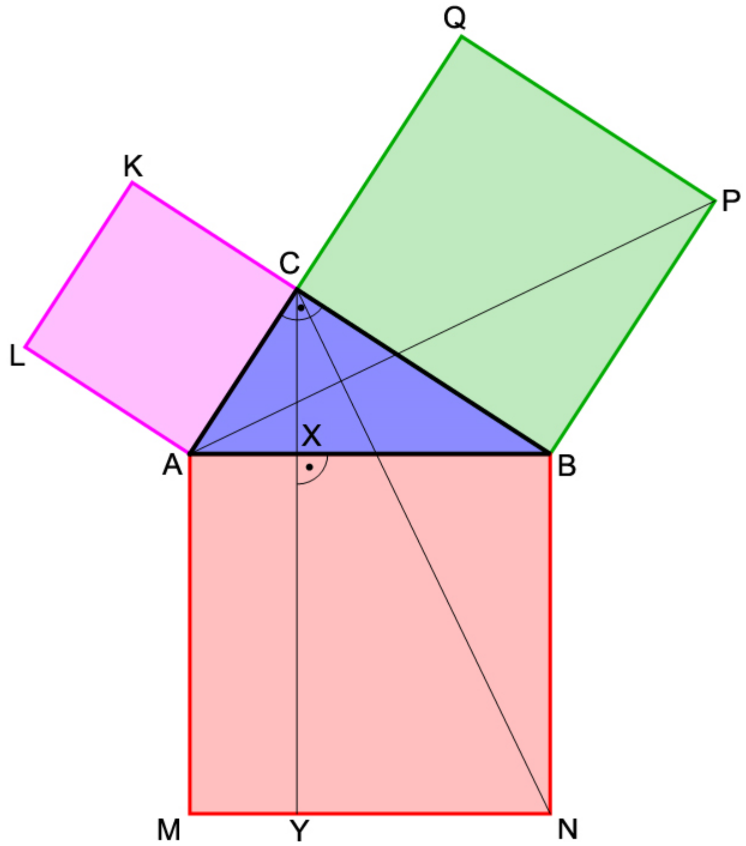


obr. 6

Nyní sestrojíme úsečky LB a CM a bodem C vedeme kolmici na stranu AB; tak získáme další dva body X a Y (viz obr. 7). Nyní si uvědomíme, že trojúhelníky LAB a CAM jsou shodné, protože mají navzájem shodné všechny tři odpovídající si strany. Úsečka AC je kolmá na úsečku LA, a tedy úsečka AC je výškou trojúhelníka LAB. Proto je obsah trojúhelníka LAB poloviční ve srovnání s obsahem čtverce LACK. Analogicky je úsečka AM kolmá na úsečku AX, a proto lze úsečku AX považovat za výšku v trojúhelníku CAM. Proto je obsah trojúhelníka CAM poloviční ve srovnání s obsahem obdélníka AMYX. Vzhledem ke shodnosti trojúhelníků LAB a CAM je obsah čtverce LACK stejný, jako je obsah obdélníka AMYX.



obr. 7



obr. 8

Nyní vyznačíme v zadaném trojúhelníku a původních čtvercích úsečky AP a CN (viz obr. 8) a provedeme analogický důkaz, jako byl proveden výše, pro čtverec BPQC a obdélník NBXY. Pomocí shodných trojúhelníků BPA a BCN dokážeme, že obsah čtverce BPQC je stejný jako obsah obdélníka NBXY. To ovšem znamená, že součet obsahů čtverců LACK a BPQC je stejný jako obsah čtverce MNBA, který je roven součtu obsahů obdélníků AMYX a NBXY. Tím je Pythagorova věta dokázána.

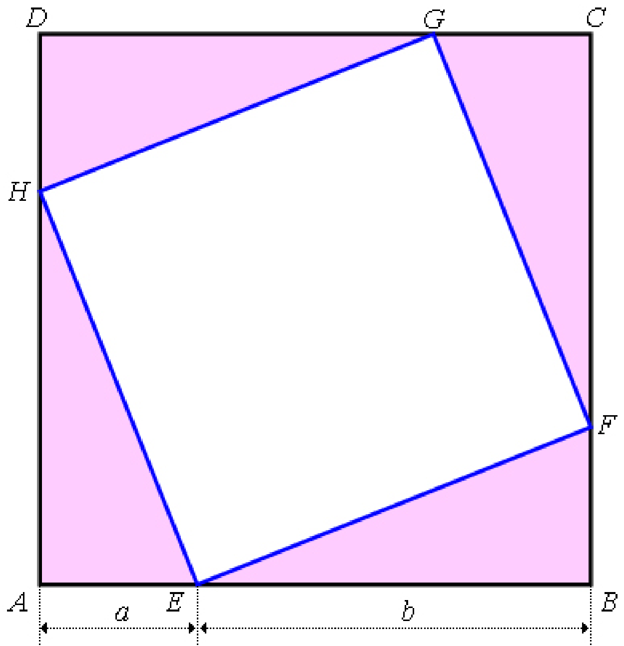
2.2 Algebraické vztahy

S využitím geometrie lze také dokázat platnost některých algebraických vztahů.

Platnost vztahu, který v současné době zapisujeme ve tvaru

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (1)$$

lze dokázat s využitím obr. 9. Na něm je zobrazen čtverec ABCD o straně délky *a* + *b*; jeho obsah tedy je $(a+b)^2$. Do tohoto čtverce je vepsán další čtverec a čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky. Obsah čtverce EFGH přitom je a^2+b^2 – tento čtverec je totiž sestrojen nad přeponou jednoho ze čtyř pravoúhlých trojúhelníků HAE, EBF, FCG nebo GDH. Všechny tyto pravoúhlé trojúhelníky mají odvěsny o délkách *a* a *b*. Podle Pythagorovy věty je pak délka jejich přepon rovna $\sqrt{a^2+b^2}$, a tedy obsah čtverce sestrojeného nad touto přeponou je roven a^2+b^2. Obsahy uvedených čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků jsou přitom rovny obsahu dvou obdélníků o stranách délky *a* a *b*.



obr. 9

Obsah čtverce ABCD tedy můžeme psát buď ve tvaru $(a+b)^2$ nebo v ekvivalentním vyjádření jako součet obsahu čtverce EFGH a čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků, tedy a^2+b^2+2ab.

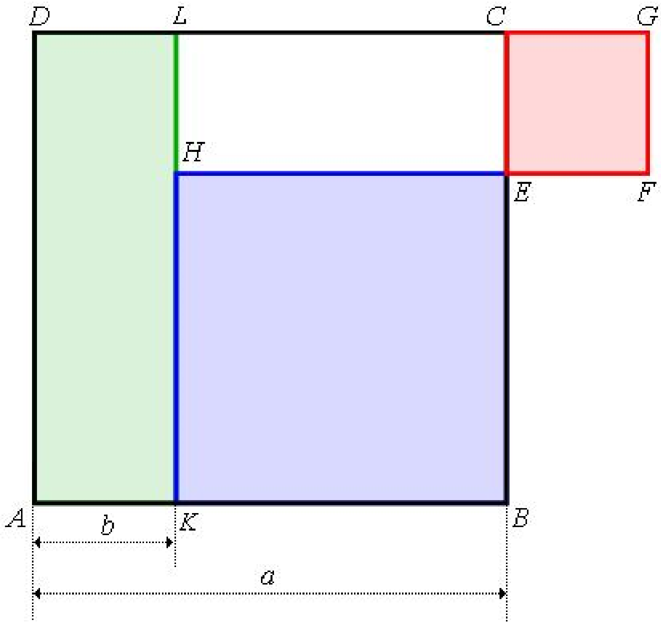
Tím je platnost vztahu dokázána.

Analogicky lze dokázat platnost vztahu, který v současné době zapisujeme ve tvaru

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \qquad (2)$$

Na obr. 10 je zobrazen čtverec KBEH o straně délky *a* - *b*, a tedy o obsahu $(a-b)^2$. Obsah tohoto čtverce přitom můžeme vyjádřit také pomocí obsahu čtverce ABCD, obsahu čtverce EFGC a obsahů dvou obdélníků AKLD a HFGL. Obsah čtverce ABCD, jehož strana má délku *a*, je a^2. Obsah čtverce EFGC o straně délky *b* je b^2. Každý z obdélníků AKLD a HFGL má strany délky *a* a *b*, a proto obsah každého z nich je *ab*.

Přitom obsah čtverce KBEH je roven součtu obsahů čtverců ABCD a EFGC zmenšenému o obsah obou obdélníků AKLD a HFGL. Tím je platnost uvedeného vztahu dokázána.

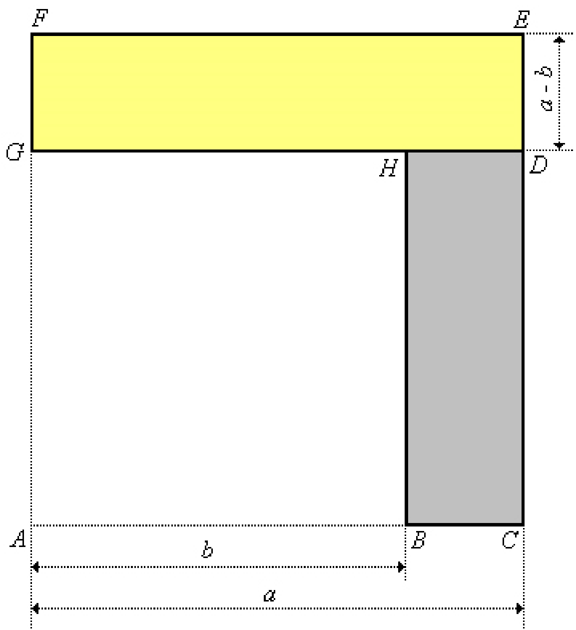


obr. 10

Také vztah, který se v současné době zapisuje ve tvaru

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \tag{3}$$

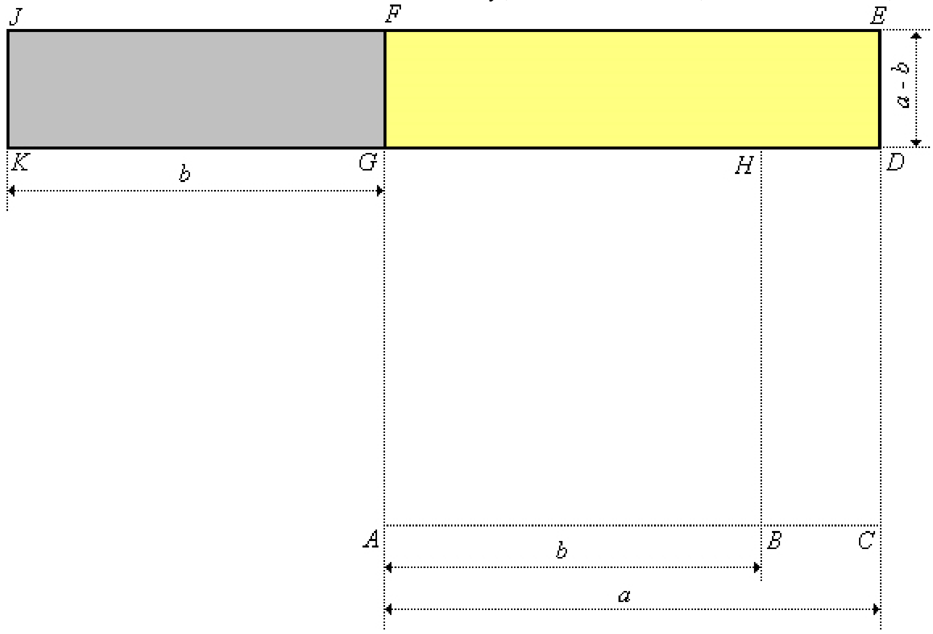
lze dokázat geometricky. Na obr. 11 je zobrazen gnómon BCEFGH, který vznikl ze čtverce ACEF o straně délky *a* vyříznutím čtverce ABHG o straně délky *b*. Obsah gnómu BCEFGH proto je $a^2 - b^2$.



obr. 11

Gnómon BCEFGH lze ovšem přeskládat do obdélníka DEJK zobrazeného na obr. 12, přičemž tento obdélník má stejný obsah jako původní gnómon. Obdélník DEJK má přitom strany délky *a* - *b* a *a* + *b*, tj. jeho obsah je $(a+b)(a-b)$.

Tím je platnost vztahu dokázána.



obr. 12

Analogicky by bylo možné dokázat také platnost vztahů, v nichž se vyskytují třetí mocniny. K tomu by bylo ale zapotřebí modelů krychlí a hranolů.

3. Zlatý řez

3.1 Teoretický popis

V celé matematice je málo čísel, která vzbudila takovou pozornost v celých dějinách nejen matematiky. Kromě čísla π, které udává poměr délky kružnice a jejího průměru a které později vešlo ve známost jako Ludolfovo číslo, je snad podobně známé už jen číslo φ charakterizující tzv. zlatý řez. Důležitost čísla π pro matematiku a jeho popularitu mezi matematiky lze snadno vysvětlit: přesná hodnota tohoto čísla dovoluje na základě znalosti poloměru kružnice (resp. kruhu) určit její délku (resp. obvod kruhu nebo jeho obsah). To byly důležité výpočty i pro praktické využití.

Ale u čísla φ tato praktická stránka využití není na první pohled vidět. Geometricky představuje toto číslo poměr dvou úseček. Ale proč je tento poměr tak zvláštní? Proč jej matematici stále studují? Jednou z možných odpovědí je pravděpodobně fakt, že poměr zlatého řezu se vyskytuje v řadě oblastí, a to nejen v matematice. Velmi často se se zlatým řezem můžeme setkat i v oblastech, ve kterých bychom jej na první pohled velmi těžko čekali:

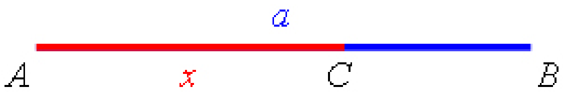
1. poměr stran v pentagramu (resp. pětiúhelníku) je v poměru zlatého řezu;
2. okvětní plátky růží, které jsou v řadě kultur velmi ceněné, a uspořádání listů rostlin se řídí matematickým pravidlem spojeným se zlatým řezem;
3. stavba ulit měkkýšů ve tvaru spirálovité struktury se řídí číslem, které je dáno právě zlatým řezem;
4. řada uměleckých děl (stavby, obrazy, …), ale i geometrické útvary a geometrická tělesa mají ve své struktuře zlatý řez určitým způsobem „zakódován“;
5. fotografové využívají zlatý řez při kompozici fotografie;
6. …

Nyní je zřejmé, že zlatý řez je skutečně velmi zajímavý, a proto je nutné se na něj podívat podrobněji.

Řekneme, že bod C dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu, jestliže pro délky uvažovaných úseček platí vztah

$$|AB|:|AC| = |AC|:|CB|, \tag{4}$$

poměr délek celé úsečky a její delší části je tedy roven poměru délek její delší části a kratší části.



obr. 13

Po označení délky úsečky AB písmenem *a* a délky její delší části písmenem *x*, získáme úměru ve tvaru

$$a:x = x:(a - x). \tag{5}$$

Vyjádříme-li úměru (5) pomocí zlomků ve tvaru $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, můžeme poměrně snadno dojít ke kvadratické rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0\,. \tag{6}$$

Vyřešíme-li rovnici (6) současnými metodami, získáme postupně řešení ve tvaru $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$. Po částečném odmocnění získáme řešení ve tvaru

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a\,. \tag{7}$$

Je zřejmé, že řešení $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$ je kladné a řešení $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}a$ je záporné. Symbolem φ a názvem **zlatý řez** se označuje převrácená hodnota kladného řešení, tj. $\varphi = \frac{1}{x_1}$. V dalším textu budeme uvažovat jednotkovou délku úsečky AB.

Označený poměr nyní upravíme a usměrníme: $\varphi = \frac{1}{x_1} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \cdot \frac{-1-\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}} = \frac{2\left(-1-\sqrt{5}\right)}{-4}$. Dostáváme tak pro zlatý řez vztah

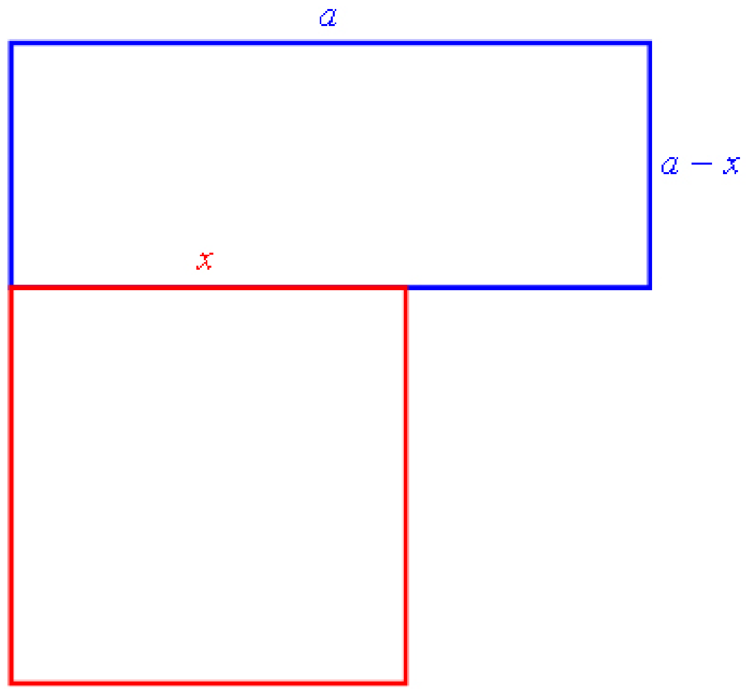
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{8}$$

Hodnota tohoto čísla je $\varphi = 1{,}618033988...$ a patří mezi iracionální čísla. Hodnota kladného kořene rovnice (6) je $x = x_1 = 0{,}618033988...$.

Délka úsečky AC na obr. 13 je geometrickým průměrem délek úseček AB a CB. Proto je obsah čtverce sestrojeného nad delší částí úsečky AB (tj. nad částí AC) roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky stejné jako je délka celé úsečky AB a délka její kratší části (tj. délka úsečky CB) - viz obr. 14.

Rovnici (6) totiž můžeme přepsat ve tvaru $x^2 = a^2 - ax$, čili $x^2 = a(a-x)$. Tento tvar ale přesně odpovídá geometrickému znázornění problému na obr. 14: obsah čtverce se stranou rovnou délce úsečky AC (tj. *x*) je roven obsahu obdélníka o stranách stejných délek, jako mají úsečky AB (tj. *a*) a CB (tj. *a* - *x*).

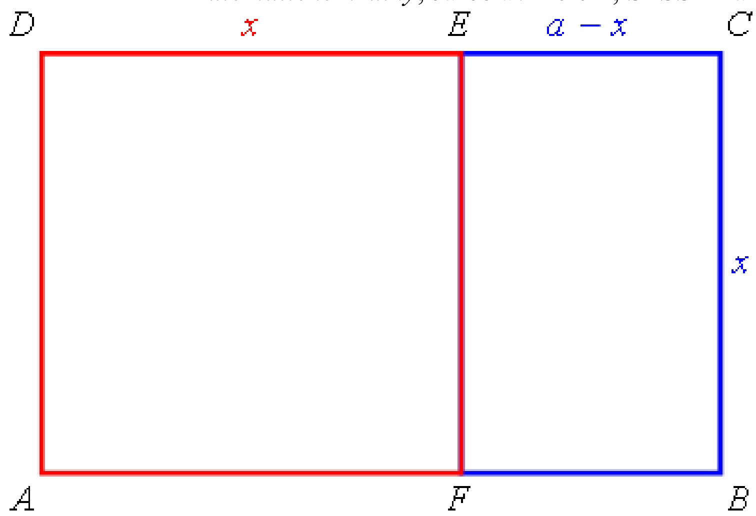
V tomto smyslu je zlatý řez prezentován i v Eukleidových *Základech*.



obr. 14

Při hledání zlatého řezu vlastně hledáme takový obdélník BCEF (obr. 15), který má zajímavou vlastnost. Sestrojíme-li nad jeho delší stranou EF čtverec FEDA, získáme obdélník ABCD, který je obdélníku BCEF podobný. Všechny obdélníky s touto vlastností jsou si navzájem podobné. Délky jejich stran jsou pak v poměru zlatého řezu.

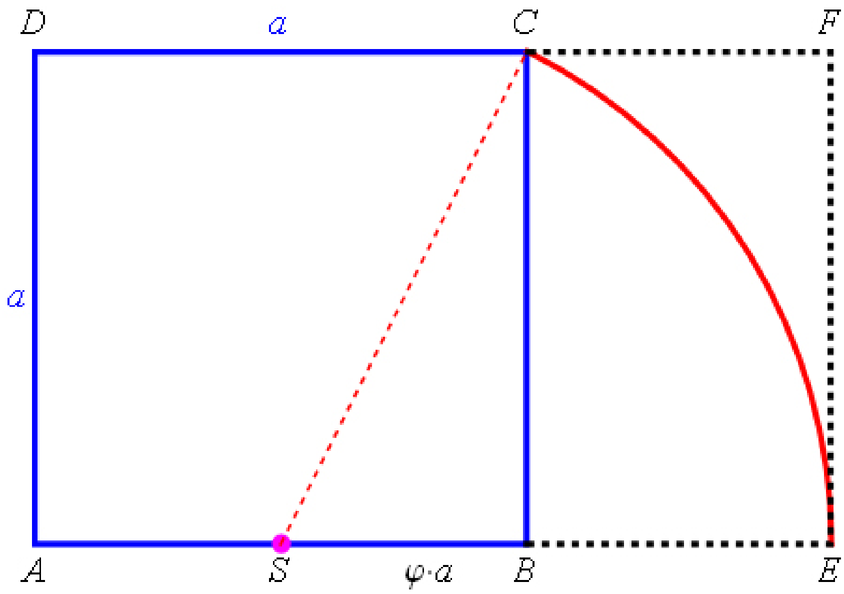
Podle obr. 15 můžeme pro podobnost obdélníků ABCD a BCEF psát: $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CE|}$. Po dosazení pomocí délek uvažovaných úseček dostáváme poměr $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, který je shodný s definičním poměrem zlatého řezu vyjádřeným vztahem (5).



obr. 15

Jednu z konstrukcí zlatého řezu můžeme sledovat podle obr. 16:

1. Sestrojíme čtverec ABCD o straně délky a.
2. Najdeme střed S úsečky AB.
3. Z bodu S opíšeme kružnici o poloměru rovném délce úsečky SC.
4. Průsečík této kružnice a polopřímky AB je bod E.
5. Z bodu E vztyčíme kolmici o délce a k polopřímce AB. Tak získáme na polopřímce DC bod F.
6. Délka úsečky AE je rovna φa, tj. je φ krát delší, než je délka strany čtverce ABCD.



obr. 16

Zdůvodnění výše uvedené konstrukce vyplývá z Pythagorovy věty aplikované na trojúhelník SBC. Pro délku úsečky SC (tj. pro poloměr kružnice sestrojené z bodu S) postupně dostáváme: $|\mathrm{SC}| = \sqrt{|\mathrm{SB}|^2 + |\mathrm{BC}|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Uvědomíme-li si, že délky úseček SC a SE jsou navzájem stejné, pak pro délku úsečky AE můžeme psát: $|\mathrm{AE}| = |\mathrm{AS}| + |\mathrm{SE}| = |\mathrm{AS}| + |\mathrm{SC}| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. S využitím vztahu (8) tedy můžeme psát $|\mathrm{AE}| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a = \varphi a$.

Je tedy zřejmé, že délky stran obdélníka AEFD jsou v poměru $\varphi a : a = \varphi : 1$. Délky stran obdélníka BEFC jsou v poměru $a : (\varphi a - a) = 1 : (\varphi - 1) = 1 : \frac{1}{\varphi} = \varphi : 1$, přičemž předposlední krok v rovnosti poměrů byl učiněn na základě číselné vlastnosti zlatého řezu popsané vztahem (9). Oba tyto obdélníky jsou proto tzv. **zlaté obdélníky**.

Zlatý řez má některé zajímavé matematické vlastnosti:

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1, \tag{9}$$

$$\varphi^2 = 1 + \varphi, \tag{10}$$

$$\varphi^3 = \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1} \tag{11}$$

a řadu dalších. Důkaz těchto vlastností lze provést algebraickými úpravami.

Další konstrukce a další vlastnosti zlatého řezu jsou popsány např. v [1].

3.2 Aktivita spojená se zlatým řezem

Žákům lze problematiku zlatého řezu přiblížit jednoduchou aktivitou, kterou lze ukázat, že zlatý řez skutečně člověk intuitivně vnímá.

Budeme potřebovat pracovní list, na kterém jsou zobrazeny obdélníky (viz obr. 70 až obr. 77). Žákům tyto obdélníky ukážeme (např. promítneme ze souboru dataprojektorem) a žáci mají za úkol napsat číslo obdélníka, který se jim nejvíce líbí, který vypadá jako typický obdélník.

S rostoucím počtem žáků (respondentů), kteří se tohoto experimentu zúčastní, poroste procento těch, kteří vyberou obdélník číslo 4. Tento obdélník má strany v poměru zlatého řezu a pro vnímání lidským okem je to ten „nejpřirozenější“ obdélník.

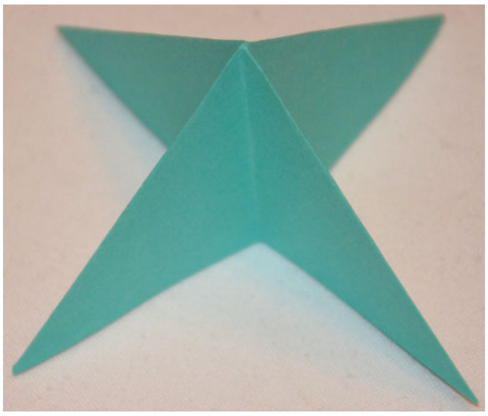
4. Model osmistěnu

Otevřený model osmistěnu, ve kterém jsou pozorovat úhlopříčné roviny lze sestavit ze šesti čtvercových listů papírového špalíčku (viz obr. 17). Pro názornost a přehlednost při skládání bylo v popisovaném případě zvoleno více různých barev jednotlivých listů, ale není to podmínkou.

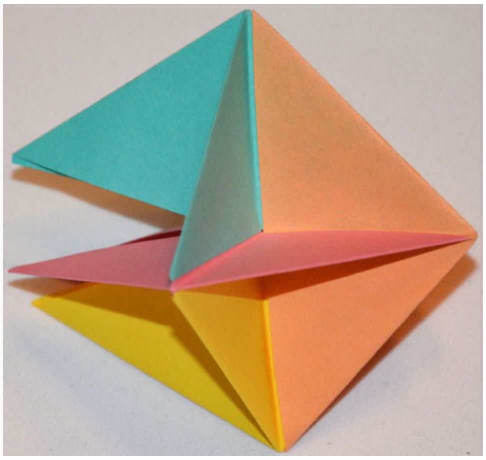
Všechny listy postupně přehneme podél obou úhlopříček na polovinu (viz obr. 18). Poté přehneme ještě každý list dvakrát na polovinu podél kolmic ke stranám daného listu. Poté úhlopříčné sklady přehneme tak, aby tvořily vrcholy, a další sklady přehneme tak, aby tvořily „údolí“ (viz obr. 19). Střed listu, ve kterém se všechny čtyři sklady protínají, bude tvořit vždy jeden z vrcholů osmistěnu.

obr. 17

obr. 18



obr. 19



obr. 20

Nyní začneme skládat vlastní model osmistěnu. Zejména závěrečné fáze skládání se budou zdát komplikované, protože papír se bude mačkat. Ale při opatrném postupu se podaří model zdárně složit.

Máme tedy šest útvarů, z nichž jeden je zobrazen na obr. 19. Tyto útvary složíme bez lepení k sobě tak, že z každého tohoto útvaru bude vidět jen polovina. Bude tedy vidět jen jeden úhlopříčný sklad. Druhý úhlopříčný sklad každého útvaru bude zakryt dalšími těmito útvary.

Skládání tedy začneme se třemi útvary. Postup budeme sledovat na obr. 20, podle kterého budeme charakterizovat jednotlivé skládané útvary barvou. Začneme např. červeným útvarem, jehož jeden úhlopříčný sklad postupně zakryjeme úhlopříčným skladem žlutého a zeleného útvaru. Pod viditelný červený sklad vsuneme úhlopříčný sklad oranžového útvaru; současně ale druhým úhlopříčným skladem tohoto oranžového útvaru zakryjeme jeden úhlopříčný sklad zeleného útvaru a žlutého útvaru.

Uvedeným postupem pokračujeme ve skládání dále. S rostoucím počtem do sebe již zaklesnutých útvarů poroste složitost zasunout další úhlopříčný sklad na své místo. Ale při troše trpělivosti (i za cenu částečného povolení k sobě již přitažených složených částí) se podaří složit model osmistěnu, který je zobrazen na obr. 21.

obr. 21

Model osmistěnu můžeme použít nejen k tomu, aby žáci získali méně obvyklou představu tohoto tělesa, ale také k netradičnímu pohledu na krychli. Vytvořený model osmistěnu je totiž vepsán do krychle.

Po popsání základních vlastností tělesa (počet stěn, počet hran, počet vrcholů, typ stěn, …) lze se žáky řešit např. tyto úlohy:

1. Jaká je délka úhlopříčky základního čtvercového listu, z nichž je model složen, je-li délka jeho strany rovna *a*?
2. Jaký je objem plného osmistěnu, který je reprezentován složeným modelem?
3. Jaký je povrch plného osmistěnu, který je reprezentován složeným modelem?
4. Jaký je celkový povrch vytvořeného modelu?
5. Jaká je délka hrany krychle, do níž je uvažovaný osmistěn vepsán?
6. Kolik procent objemu krychle zabírá uvažovaný osmistěn?

Řešení uvedených otázek uvedeme postupně.

1. Je-li délka strany čtverce a, pak délka jeho úhlopříčky je na základě platnosti Pythagorovy věty rovna

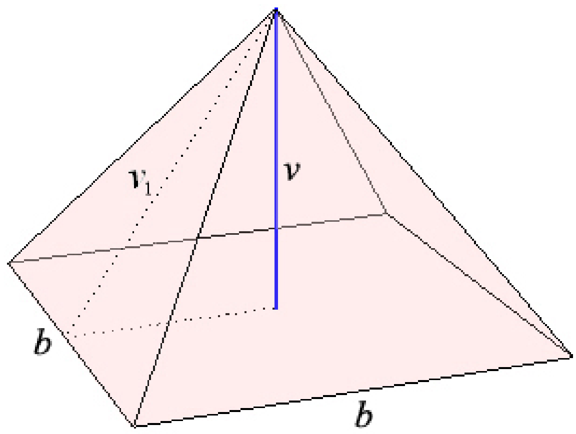
$$u = a\sqrt{2}\,. \tag{12}$$

2. Osmistěn si můžeme představit tak, že je složený ze dvou pravidelných čtyřbokých jehlanů. Přitom délka podstavné hrany daného jehlanu je rovna 0,5u a výška tohoto jehlanu je rovna 0,5a. Objem osmistěnu tedy můžeme psát ve tvaru $V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot S_\mathrm{p}\cdot v$. Po dosazení dostaneme: $V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{u^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot a$. Po dosazení ze vztahu (12) a dalších úpravách pak dostaneme:

$$V = \frac{1}{6}\cdot a^3\,. \tag{13}$$

3. Povrch plného osmistěnu určíme na základě stejné úvahy, jako byla úvaha při určování objemu osmistěnu. Pro výpočet povrchu pláště bude nutné znát ještě výšku v_1 jedné trojúhelníkové stěny. Na základě obr. 22, na kterém je zobrazen pravidelný čtyřboký jehlan, je zřejmé, že můžeme pomocí Pythagorovy věty psát: $v_1 = \sqrt{v^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Po dosazení za výšku jehlanu v, za stranu b a ze vztahu (12) dostaneme: $v_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{16}} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$. Pro povrch celého osmistěnu tak nyní můžeme psát: $S = 2\cdot S_\mathrm{pl}$; po dosazení dostaneme: $S = 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{2}\cdot v_1$. S využitím právě odvozeného vztahu pro výšku v_1 a vztahu (12) dostáváme:

$$S = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}\,. \qquad (14)$$



obr. 22

4. Před počítáním celkového povrchu složeného modelu je nutné vědět, že povrch modelu je tvořen 24 pravoúhlými rovnoramennými trojúhelníky. Délka ramen těchto trojúhelníků je přitom rovna polovině strany původního čtvercového listu, ze kterých byl modle sestaven. Proto pro celkový povrch modelu můžeme psát: $S_c = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$. Dostáváme tedy:

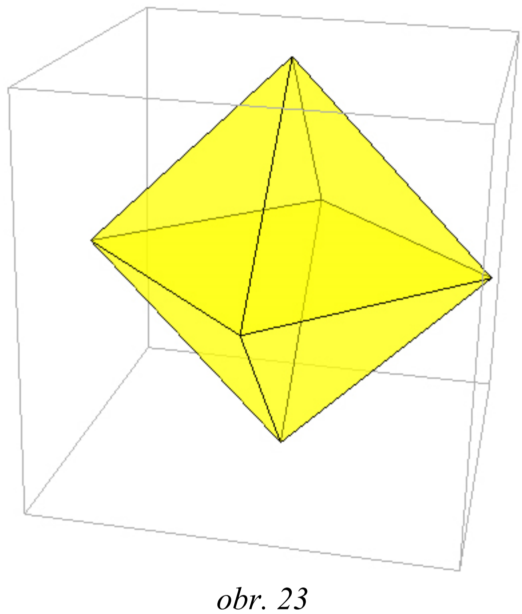
$$S_c = 3 \cdot a^2\,. \qquad (15)$$

Celkový povrch modelu je tedy roven ploše tří základních listů. Pokud bychom se o tom chtěli přesvědčit experimentálně, je možné vzít další tři barevné listy, rozdělit je na čtyři pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky (poskládáním podél úhlopříček a podél os jednotlivých stran čtvercového listu), nastříhat a postupně přiložit ke složenému modelu.

5. Na základě obr. 23 je zřejmé, že délka hrany krychle je rovna dvojnásobku délky ramene rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, se kterým jsme počítali v minulé úloze. Pro délku a_k hrany krychle tedy platí

$$a_k = 2 \cdot \frac{a}{2} = a\,; \qquad (16)$$

délka hrany krychle je tedy stejná jako délka strany listu, ze kterých je model osmistěnu složen. To lze experimentálně dokázat tak, že ze zbylých čtvercových listů osmistěn obestavíme a sestavíme tak krychli osmistěnu opsanou.



obr. 23

6. S využitím vztahu (16) lze pro objem krychle psát

$$V_k = a^3\,. \qquad (17)$$

S využitím vztahu (13) pak můžeme psát: $\frac{V}{V_{\mathrm{k}}} \cdot 100\,\% = \frac{1}{6} \cdot a^3 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot 100\,\% \doteq 17\,\%$. Objem osmistěnu tedy tvoří přibližně 17 % objemu krychle.

5. Geometrie papíru formátu A4

S běžným papírem formátu A4 lze modelovat několik plošných pravidelných útvarů a model jednoho tělesa. Pro lepší zřetelnost při pořizování fotodokumentace byl použit papír formátu A4 slepený ze dvou barevných listů. Při vlastním skládání je vhodné použít pouze jeden list, protože se lépe skládá.

Začneme s papírem formátu A4 (viz obr. 24), který podélně přeložíme na polovinu (viz obr. 25); tento sklad je pouze pomocný. Nyní přeložíme papír tak, aby se jeden vrchol původně obdélníkového papíru dostal na právě vytvořený pomocný sklad, a přitom aby nový sklad začínal v sousedním vrcholu (viz obr. 26).

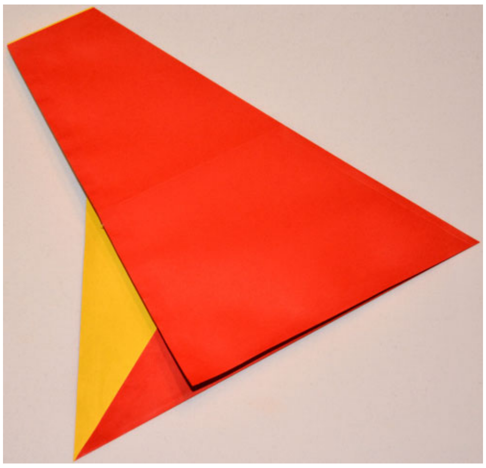
obr. 24

obr. 25

Než budeme pokračovat dále, je možné se velmi jednoduše přesvědčit, že nejmenší úhel právě vytvořeného trojúhelníka (na obr. 26 je tento trojúhelník zobrazen červeně) je roven třetině pravého úhlu - tj. že hodnota tohoto úhlu je $30°$. Stačí podél delší odvěsny takto vytvořeného trojúhelníka přehnout zbývající část papíru a zjistíme, že se nám podařilo rozložit původně pravý úhel na tři shodné části (z nichž každá má tedy $30°$).

Další sklad, který provedeme po navrácení papíru do stavu zobrazeného na obr. 26, bude kopírovat kratší odvěsnu vytvořeného trojúhelníka; po přeložení získáme tvar zobrazený na obr. 27.

obr. 26

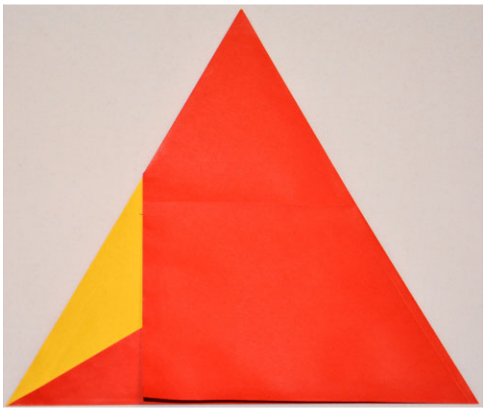


obr. 27

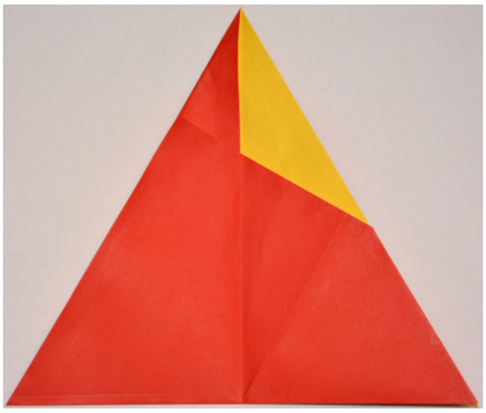
Nyní stačí založit část, která je zobrazená na obr. 27 vlevo nahoře, podél hrany původního obdélníka dospod. Získáme tak rovnostranný trojúhelník zobrazený na obr. 28. Důkaz, že se jedná skutečně o rovnostranný trojúhelník, lze provést pomocí úvah o hodnotách vnitřních úhlů trojúhelníka zobrazeného na obr. 28: všechny úhly mají hodnotu $60°$.

V právě složeném trojúhelníku si vyznačíme pomocným přeložením alespoň dvě jeho výšky (těžnice, osy stran, osy úhlů), abychom mohli pokračovat v dalším skládání (viz obr. 29 a obr. 30). Dalším krokem je složení vrcholů trojúhelníka tak, aby se všechny vrcholy setkaly v nalezeném těžišti. Získáme tak pravidelný šestiúhelník zobrazený na obr. 31.

Nyní vytvořený šestiúhelník rozložíme na trojúhelník (viz obr. 30) a části u vrcholů tohoto trojúhelníka přeložíme podél jeho středních příček opačným směrem, než byly provedeny sklady vedoucí k šestiúhelníku zobrazenému na obr. 31. Získáme tím trojúhelník, jehož délka strany je poloviční ve srovnání s trojúhelníkem zobrazeným na obr. 28 a který je zobrazený na obr. 32.

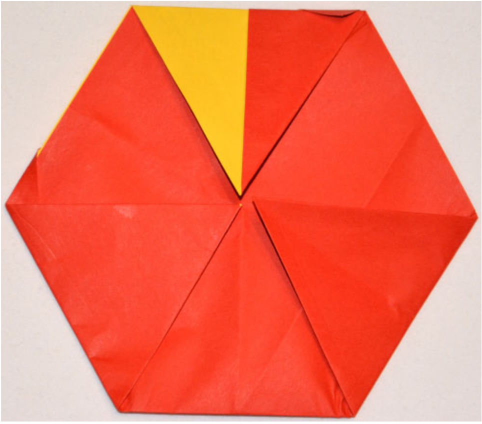


obr. 28



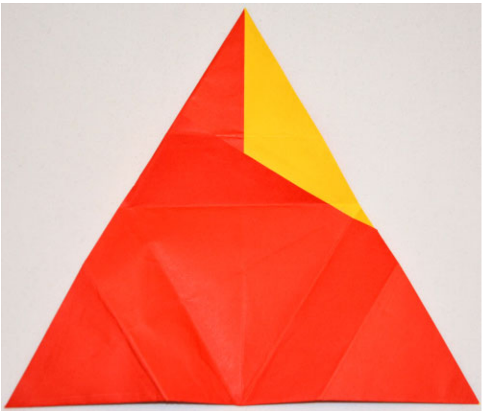
obr. 29

obr. 30



obr. 31

obr. 32

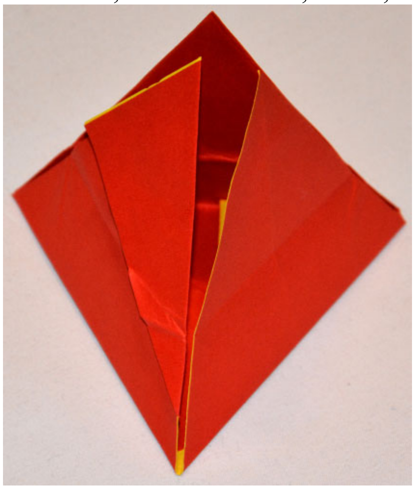


obr. 33

Pokud nyní rozložíme trojúhelník získaný v minulém skladu, získáme původní „velký“ trojúhelník (viz obr. 33). Pokud ho složíme podél dvou skladů, které vedly ke složení šestiúhelníku (zobrazenému na obr. 31) a malého rovnostranného trojúhelníka (zobrazeného na obr. 32), získáme šesticípou hvězdu, která je zobrazená na obr. 34.

Tím jsme vyčerpali možnosti plošných útvarů. Pokud se nyní vrátíme k „malému“ rovnostrannému trojúhelníku (viz obr. 32), můžeme vytvořit model pravidelného tříbokého jehlanu (tj. čtyřstěnu), který je zobrazen na obr. 35. Pro dosažení lepšího vzhledu čtyřstěnu je vhodné jeho čtvrtý vrchol přidržet prsty.

obr. 34



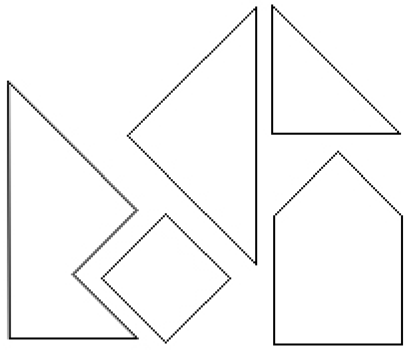
obr. 35

Se žáky můžeme řešit úlohy zaměřené na výpočet obvodů a obsahů vytvořených modelů plošných obrazců nebo povrchu a objemu modelu čtyřstěnu. Je vhodné vycházet ze strany „velkého“ trojúhelníka, kterou označíme symbolem a. Pak „malý“ trojúhelník bude mít délku strany $0{,}5a$, šestiúhelník bude mít délku strany rovnou $\frac{a}{3}$, šesticípá hvězda bude mít délky stran jednotlivých úseků rovné $\frac{a}{6}$ a délka hrany čtyřstěnu bude rovna $0{,}5a$.

6. Skládání čtverců

Geometrické útvary, které jsou zobrazeny na obr. 36, vytiskneme na papír formátu A4 tak, aby každý žák (resp. každá skupinka žáků) měla od každého ze zobrazených útvarů dva kusy. Z těchto částí mají žáci za úkol postupně složit:

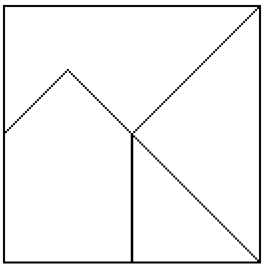
1. čtverec tak, aby každý útvar kromě čtverce použili právě jednou;
2. čtverec tak, aby každý útvar (včetně čtverce) použili právě jednou;
3. čtverec tak, aby každý útvar použili dvakrát.



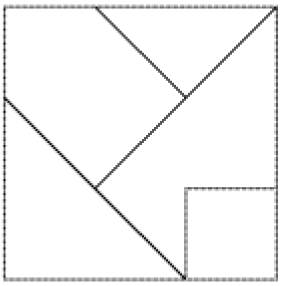
obr. 36

Pokud chceme pro každého žáka připravit jeho sadu předem, je vhodné rozstříhat na jednotlivé části čtverec zobrazeného na obr. 39. Žákům tento útvar ale nesmíme ukázat, protože představuje řešení jedné z výše uvedených úloh.

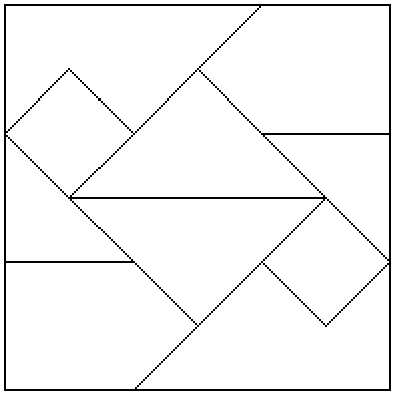
Řešení zadaných úloh je zobrazeno na obr. 37 až obr. 39.



obr. 37



obr. 38

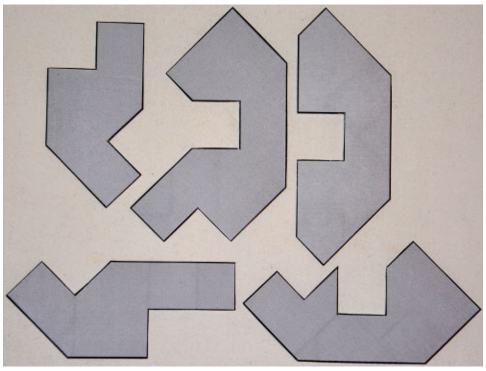


obr. 39

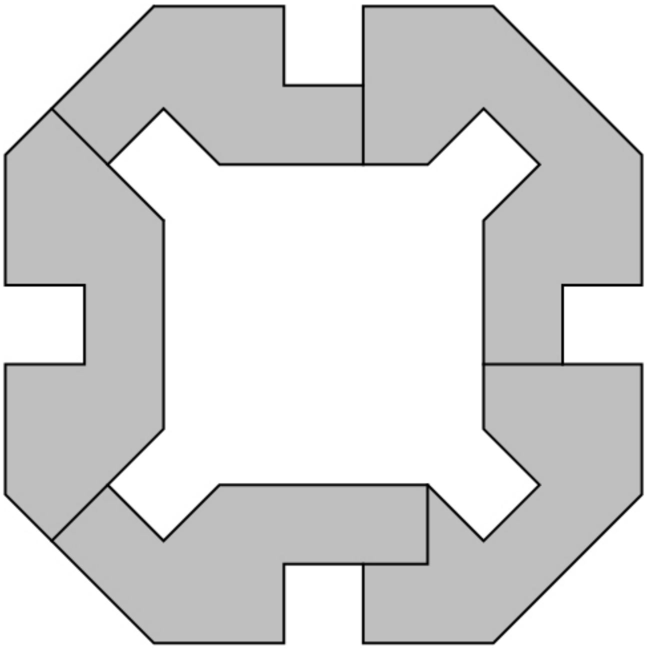
7. Geometrický hlavolam

Z pěti částí zobrazených na obr. 40 je nutné složit rovinný útvar, který je osově i středově souměrný. Proto je nutné tyto části vytisknout na papír a vystřihnout. Pokud budou mít žáci se skládáním problémy, lze napovědět, že v útvaru je otvor.

Složený útvar je zobrazen na obr. 41; z tohoto obrázku je vhodné útvar vytisknout a nastříhat pro samostatnou práci žáků.



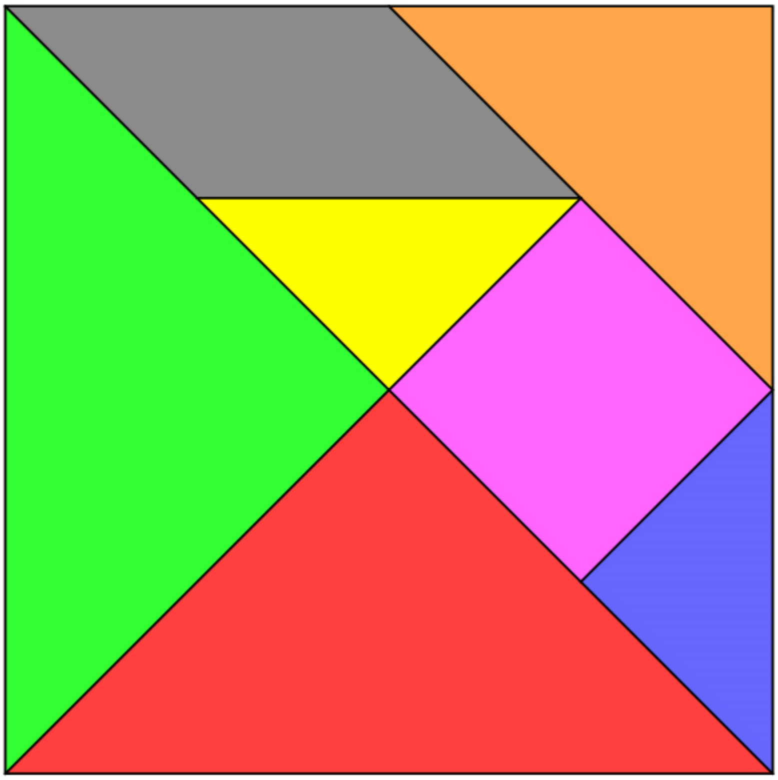
obr. 40



obr. 41

8. Tangram

Tangram je puzzle složené ze sedmi rovinných útvarů, které se nazývají *tans* (viz [2]). Hlavolam byl objeven v Číně během vlády dynastie Song (960 - 1279) a do Evropy se dostal během 19. století. Cílem je jednotlivé útvary poskládat do určitých tvarů, které mohou přestavovat různé motivy, siluety osob, zvířat, … tak, aby bylo použito všech sedm částí a žádné z nich se navzájem nepřekrývaly. V nejjednodušším případě lze jednotlivé části tangramu získat tak, že je vystřihneme ze šablony zobrazené na obr. 42. Pokud šablonu vytiskneme dvakrát a jednotlivé části k sobě slepíme, budeme mít jednotlivé části obarvené z obou stran, čímž se zvýší možnosti použití zejména rovnoběžníku při skládání různých obrazců. Jediný rovnoběžník se totiž při otočení lícem dolů změní. Se žáky ve škole lze při té příležitosti hovořit o přímé shodnosti a nepřímé shodnosti.

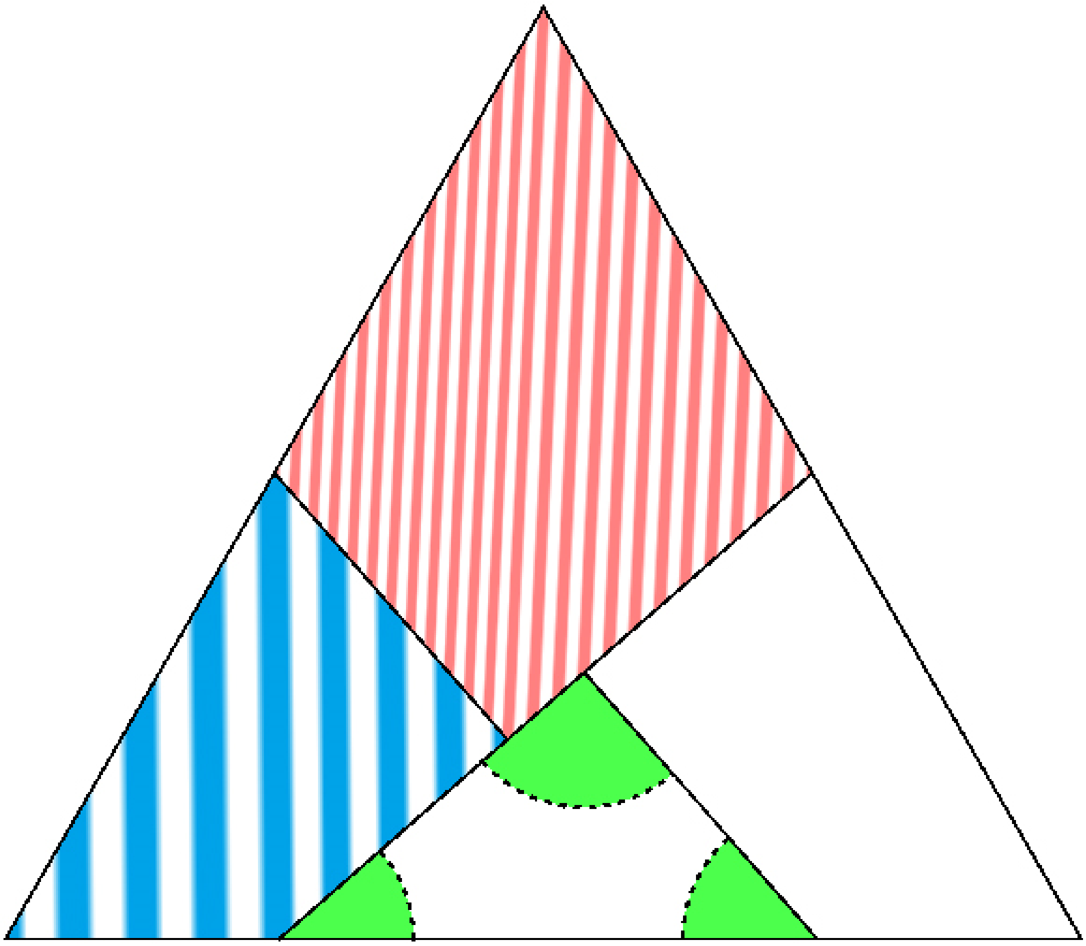


obr. 42

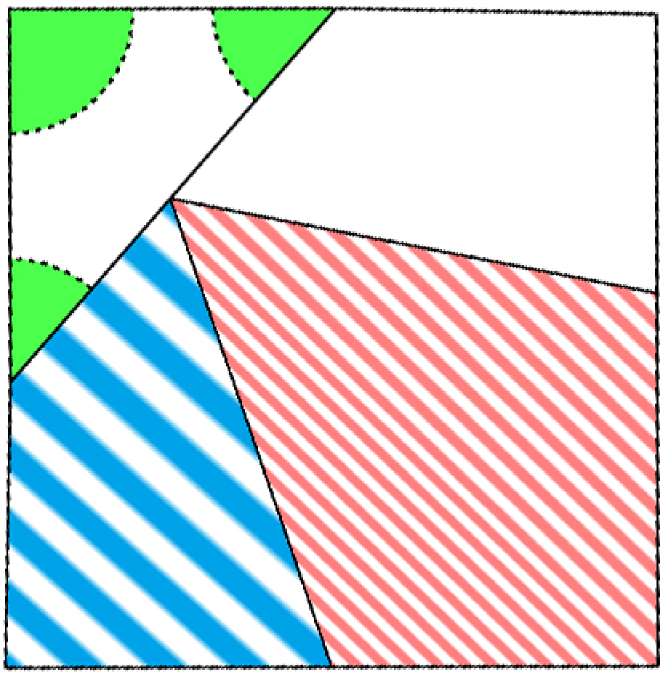
Náměty pro skládání pak lze čerpat na internetu (např. [3]). Tangramy lze skládat i on-line (např. na webové stránce [4]), kde jsou připraveny obrázky na každý den.

9. Přeskládání trojúhelníka na čtverec

Velmi snadno vyrobitelnou, a přitom zajímavou aktivitou je puzzle, jehož cílem je složit ze čtyř zadaných částí rovnostranný trojúhelník (viz obr. 43) a potom i čtverec (viz obr. 44). Nevýhodou obrázků obr. 43 a obr. 44 je, že zobrazují již složené útvary. Proto je vhodné pro žáky předem vytisknout šablonu zobrazenou na obr. 43 a vystřihnout ji, aby neviděli, jak patří jednotlivé díly k sobě.



obr. 43

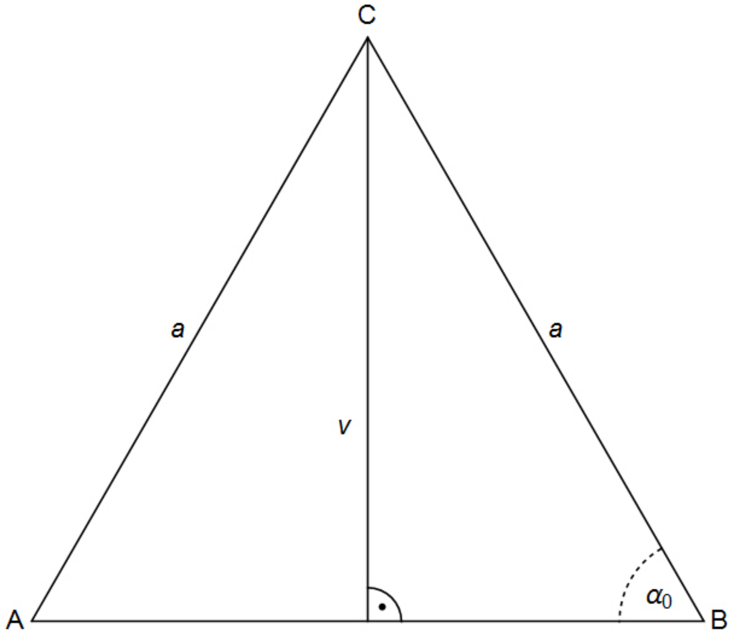


obr. 44

Z hlediska matematiky je nutné nyní zjistit, jak je původní trojúhelník zobrazený na obr. 43 rozdělený, a přesvědčit se, že jednotlivé díly lze přeskládat do tvaru čtverce.

Na obr. 45 je zobrazen rovnostranný trojúhelník ABC s délkou strany *a* a výškou *v*, pro jejíž délku platí:

$$v = a \cdot \cos\alpha_0 = a \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} a \,. \tag{18}$$



obr. 45

Obsah tohoto trojúhelníka tedy je

$$S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \,. \tag{19}$$

Vzhledem k tomu, že máme trojúhelník ABC přeskládat na čtverec, musí mít tento čtverec stejný obsah, jako má trojúhelník ABC. Délka strany čtverce tedy musí být rovna

$$a_c = \sqrt{S} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} a \,. \tag{20}$$

Nyní již rozdělíme zadaný trojúhelník na požadované části a to takto:

1. sestrojíme středy stran AC a BC – získáme tak body S a R;
2. sestrojíme úsečku RP, která má délku a_c (viz vztah (20));
3. sestrojíme bod Q tak, že úsečka PQ má délku $\frac{a}{2}$;
4. sestrojíme body X a Y tak, že z bodů S a Q sestrojíme kolmice na úsečku RP.

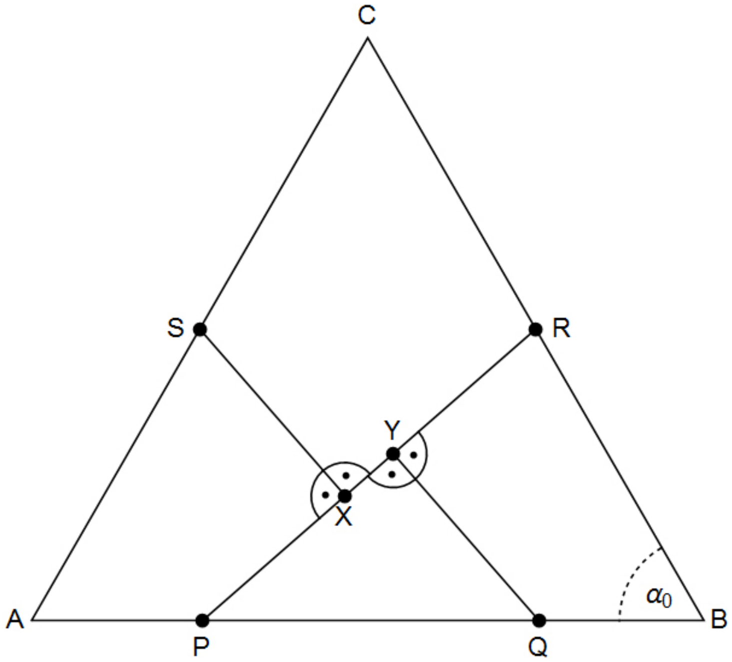
Popsané konstrukce jsou zobrazeny na obr. 46; naznačené spojnice určují rozdělení trojúhelníka na čtyři části, ze kterých je možné sestrojit čtverec.

Abychom se přesvědčili, že z částí trojúhelníka zobrazených na obr. 46 lze složit čtverec, musíme určit délky všech úseček, které vymezují jednotlivé části trojúhelníka. Označme proto úhel *RPB* symbolem α (viz obr. 47). Stejnou velikost pak má i úhel *ARS*. Vzhledem k tomu, že úsečka *SR* je střední příčkou trojúhelníka, je rovnoběžná se stranou *AB* trojúhelníka; úhly *RPB* a *ARS* jsou tedy úhly střídavé a mají tedy stejnou velikost.

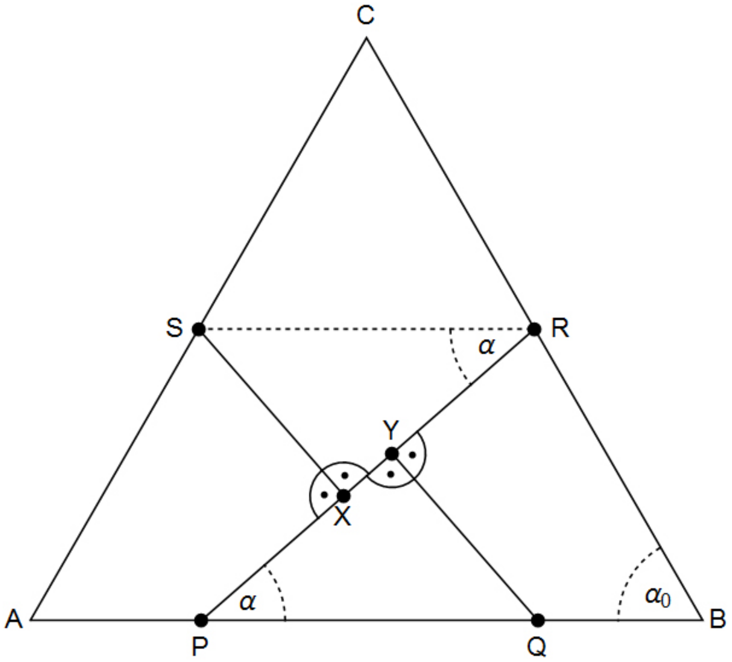
Pro trojúhelník PBR lze na základě sinové věty psát: $\frac{\sin\alpha}{|\mathrm{RB}|} = \frac{\sin\alpha_0}{|\mathrm{RP}|}$, kde α je úhel RPB.

Odtud je možné vyjádřit sinus neznámého úhlu α: $\sin\alpha = \frac{|\mathrm{RB}|}{|\mathrm{RP}|}\sin\alpha_0$. Po dosazení můžeme dále postupně psát: $\sin\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt[4]{3}}{2}a}\sin 60° = \dfrac{a}{a\cdot\sqrt[4]{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt[4]{3}}$. Po poslední úpravě dostaneme:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}\,. \tag{21}$$



obr. 46



obr. 47

Vzhledem k tomu, že $|PQ| = |SR| = \frac{a}{2}$, jsou trojúhelníky PQY a RSX shodné (mají shodnou jednu stranu a všechny tři vnitřní úhly). Proto $|QY| = |SX| = \frac{a}{2}\sin\alpha$. Po dosazení ze vztahu (21) dostaneme:

$$|QY| = |SX| = \frac{a\cdot\sqrt[4]{3}}{4}\,. \tag{22}$$

Porovnáme-li délky úseček QY a SX (daných vztahem (22)) s délkou strany a_c hledaného čtverce, která je definovaná vztahem (20), vidíme, že platí

$$|QY| = |SX| = \frac{a_c}{2}. \tag{23}$$

Úsečky QY a SX tedy budou tvořit jednu stranu hledaného čtverce.

Ze shodnosti trojúhelníků PQY a RSX dále vyplývá rovnost délek stran PY a RX. Pro délky těchto stran lze na základě Pythagorovy věty (s využitím vztahu (22)) psát: $|PY| = |RX| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt[4]{3}}{4}\right)^2}$. Po úpravě pak dostáváme:

$$|PY| = |RX| = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{4}}. \tag{24}$$

Vzhledem k tomu, že (podle obr. 47) platí $|PY| = |PX| + |XY|$ a také $|RX| = |RY| + |XY|$ a dále také platí vztah (24), pak platí

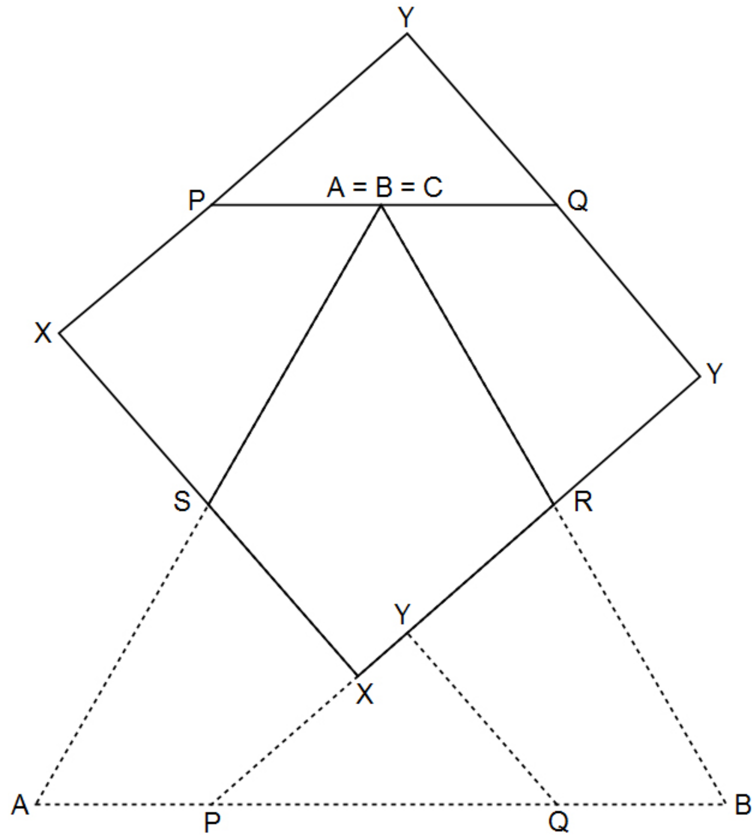
$$|PX| = |RY|. \tag{25}$$

Současně platí $|PX| = |PR| - |RX|$, přičemž délka úsečky PR je rovna délce strany a_c hledaného čtverce. Proto můžeme psát:

$$|PX| = a_c - |RX|. \tag{26}$$

Poslední vlastnost, kterou je nutné si uvědomit, se týká rozdělení strany AB trojúhelníka ABC. Určitě platí $|AP| + |PQ| + |BQ| = |AB| = a$. Vzhledem k tomu, že $|PQ| = \frac{a}{2}$, pak

$$|AP| + |BQ| = |PQ| = \frac{a}{2}. \tag{27}$$



obr. 48

Nyní již můžeme popsat, jak bude vytvořen čtverec, který má vzniknout přeskládáním trojúhelníka zobrazeného na obr. 46. Tento čtverec je spolu s původním trojúhelníkem ABC zobrazen na obr. 48; na tomto obrázku je záměrně více bodů popsáno stejnými písmeny, aby byla patrná souvislost čtverce s původním trojúhelníkem. Jednotlivé strany čtverce vznikly takto:

1. strana XYRY je tvořena úsečkou složenou z úseček RX a PX (viz vztah (26));

2. strana YQY je tvořena úsečkou složenou ze dvou úseček QY (viz vztah (23));
3. strana YPX je tvořena úsečkou složenou z úseček PY a PX (viz vztahy (24) a (26));
4. strana XSX je tvořena úsečkou složenou ze dvou úseček SX (viz vztah (23)).

Vnitřní úhly nalezeného čtyřúhelníku jsou pravé (takže se jedná skutečně o čtverec), protože úhly u bodů X a Y v trojúhelníku ABC jsou pravé na základě konstrukce úseček SX a QY.

Čtverec lze z trojúhelníka získat nejen přeskládáním čtyř částí, na které je trojúhelník rozdělen, ale také jejich pouhou rotací. Stačí si představit, že jednotlivé části trojúhelníka jsou v bodech R, Q a P spojeny k sobě otočnými klouby. Pokud začneme tři spodní části trojúhelníka otáčet v kladném směru kolem bodu R, postupně splynou úsečka CR s úsečkou RB, úsečky BQ a AP s úsečkou PQ (viz vztah (27)) a úsečka AS s úsečkou CS.

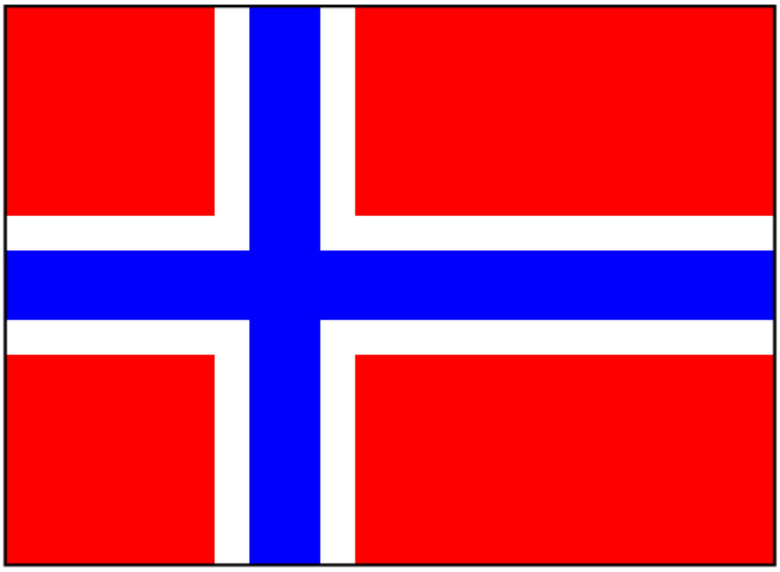
Pokud bychom chtěli matematický popis zjednodušit (případně jej zcela vypustit - např. pro mladší žáky základních škol), je možné základní konstrukci bodů P a Q provést jinak. Stačí vést kolmice k úsečce AB v bodech S a R. Úsečka RP nebude mít v tomto případě délku danou vztahem (20). Délku úsečky RP určíme na základě podmínky $|\mathrm{RP}| = \dfrac{|\mathrm{PQ}|}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cdot\cos\alpha}$.
Úhel α přitom určíme na základě podmínky $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{0,5v}{|\mathrm{PQ}|} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\dfrac{2}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Odtud $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a tedy dostáváme:

$$|\mathrm{RP}| = \frac{a}{2\cdot\cos\alpha} = \frac{a}{2\cdot\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}. \tag{28}$$

Podílem vztahů (20) a (27) dostaneme: $\dfrac{|\mathrm{RP}|}{a_c} = \dfrac{a}{2\cdot\cos\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}\cdot\dfrac{2}{a\sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2\cdot\sqrt[4]{3}} \doteq 1,0052$, tedy chybu v určení délky úsečky RP přibližně 0,5 %. Tato chyba se při přeskládávání trojúhelníka na čtverec (při vystřižení trojúhelníka z papíru formátu A4) neprojeví.

10. Vlajky

Zajímavé souvislosti lze nalézt na norské vlajce (viz obr. 49) a na základě nich řešit různé matematické úlohy zaměřené na obsahy geometrických obrazců.



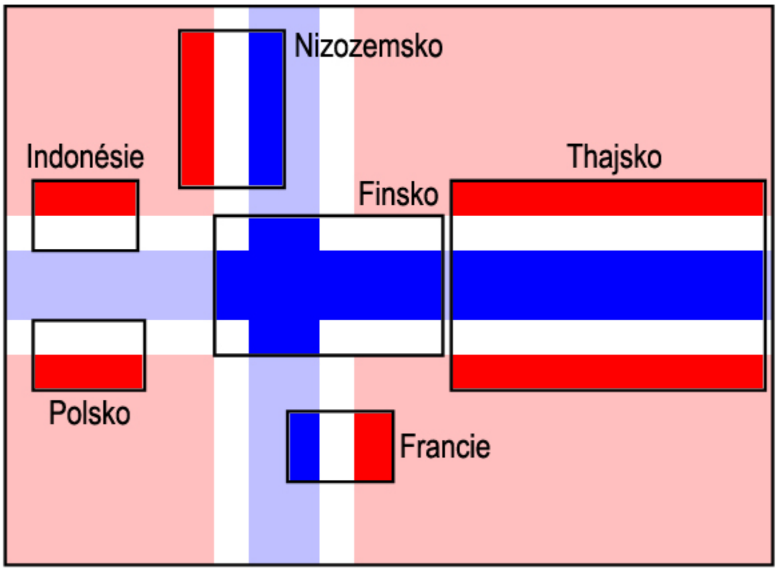
obr. 49

Norská vlajka je podle [5] obdélník, jehož strany a a b jsou v poměru $a : b = 8 : 11$, přičemž poměry barev červená, bílá a modrá jsou:

1. červená : bílá : modrá : bílá : červená = 6 : 1 : 2 : 1 : 6 na šířku;
2. červená : bílá : modrá : bílá : červená = 6 : 1 : 2 : 1 : 12 na délku.

Na norské vlajce lze přitom nalézt při vhodném úhlu pohledu i státní vlajky dalších států, jak je zobrazeno na obr. 50. Shora dolů a zleva doprava na norské státní vlajce lze nalézt státní vlajky těchto států:

1. Indonésie;
2. Polsko;
3. Nizozemsko;
4. Finsko;
5. Francie;
6. Thajsko.



obr. 50

Umísťování státních vlajek uvažovaných států na norskou vlajku je přitom dáno šířkou jednotlivých barevných pruhů na norské vlajce, šířkou pruhů na vlajkách dalších států a poměrem stran obdélníků, které jsou tvarem státních vlajek daných států. Vlajky, které lze nalézt na norské vlajce, jsou obdélníkové, ale nemají shodné poměry svých stran.

Indonéská státní vlajka (podle [10]) je obdélník se stranami v poměru 2 : 3 (může se použít i poměr 4 : 5, ale ten v této úloze použit nebyl). Vzhledem k tomu, že indonéská státní vlajka je tvořena dvěma stejně širokými vodorovnými pruhy červené a bílé barvy, je její kratší strana na norské vlajce stejně dlouhá, jako dvojnásobek šířky bílého pruhu norské vlaky. Na základě toho lze dopočítat délku indonéské vlajky. Její umístění (tj. vodorovná souřadnice levého dolního rohu indonéské vlajky) je voleno tak, aby se na norskou vlajku vešly další státní vlajky.

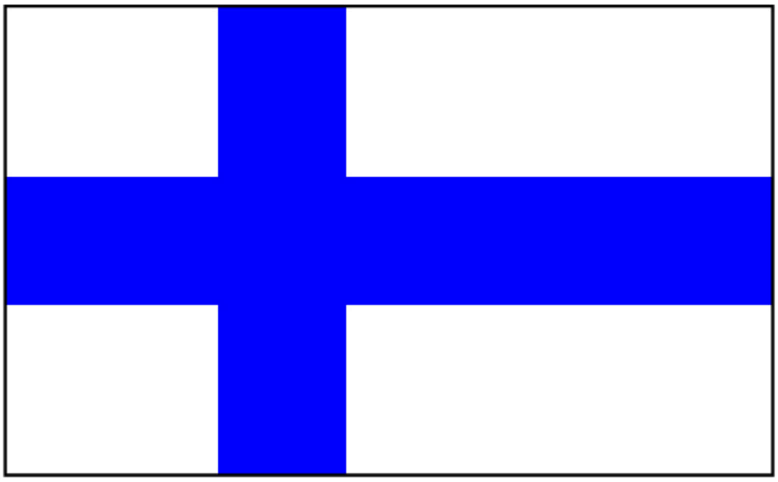
Analogický postup je zvolen u polské státní vlajky, která je tvořena (podle [7]) obdélníkem se stranami v poměru 5 : 8. Kratší strana polské vlajky umístěné na norské vlajce má tedy stejnou délku, jako je dvojnásobek šířky bílého pruhu norské vlajky. Na základě toho je pak dopočítána délka polské vlajky. Vzhledem k tomu, že indonéská i polská vlajka mají (na norské vlajce) stejnou šířku a že pro uvedené poměry vlajek platí $\frac{2}{3} > \frac{5}{8}$, je polská vlajka delší.

Nizozemská státní vlajka je (podle [6]) obdélník se stranami v poměru 2 : 3, přičemž šířky tří barevných pruhů jsou stejné. Na norskou vlajku musí být vzhledem k barevné kombinaci pruhů umístěna svisle, na což pamatují i pravidla pro vyvěšování nizozemské vlajky: při svislém vyvěšení je pruh, který byl horní vodorovný při vodorovném vyvěšení, vlevo. Šířka nizozemské vlajky na norské vlajce je tedy trojnásobkem šířky bílého pruhu norské vlajky. Délka nizozemské vlajky je pak dopočítána na základě poměru jejích stran.

Finská státní vlajka je (podle [9]) obdélník se stranami v poměru 11 : 18, přičemž poměry barevných pruhů jsou definovány takto:

1. bílá : modrá : bílá = 4 : 3 : 4 na šířku;
2. bílá : modrá : bílá = 5 : 3 : 10 na délku.

Poměr šířky a délky finské vlajky je na norské vlajce (viz obr. 50) dodržen a finská vlajka má tedy šířku rovnou šířce dvou bílých a jednoho modrého pruhu (měřeno ve směru šířky) norské vlajky. Proporce pruhů finské vlajky ale dodrženy nejsou. Vzhledem k šířce a poměrům pruhů na norské vlajce, nebylo možné zachovat proporce pruhů i finské vlajky. Ve správných proporcích je finská vlajka zobrazena na obr. 51.



obr. 51

Francouzská státní vlajka je podle [8] obdélník se stranami v poměru 2:3, jejíž tři barevné pruhy mají šířky v těchto poměrech: modrá : bílá : červená = 30 : 33 : 37. Při umisťování francouzské vlajky na norskou vlajku je nutné začít od bílého pruhu a podle něj pak dopočítat šířky ostatních pruhů francouzské vlajky. Poté na základě poměru délek jejích stran určit šířku francouzské vlajky.

Poslední vlajkou, kterou lze na norskou vlajku umístit, je thajská státní vlajka. Ta je podle [11] tvořená obdélníkem, jehož strany jsou v poměru 2 : 3. Poměr šířek jednotlivých barevných pruhů je: červená : bílá : modrá : bílá : červená = 1 : 1 : 2 : 1 : 1. Vzhledem k tomu, že modrý pruh má jak na norské vlajce, tak na thajské vlajce dvojnásobnou šířku, než pruh bílý, je možné thajskou vlajku pohodlně na norskou vlajku umístit. Na základě této skutečnosti lze určit šířku thajské vlajky. A poté dopočítat její délku.

V souvislosti s uvedenými zajímavostmi lze řešit tyto matematické úlohy:

1. Kolik procent plochy norské státní vlajky je vyplněno: a) červenou, b) modrou, c) bílou barvou?
2. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha indonéské státní vlajky?
3. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha polské státní vlajky?
4. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha nizozemské státní vlajky?
5. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha finské státní vlajky?
6. Kolik procent plochy finské státní vlajky je vyplněno: a) bílou, b) modrou barvou?
7. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha francouzské státní vlajky?
8. Kolik procent plochy norské státní vlajky tvoří plocha thajské státní vlajky?

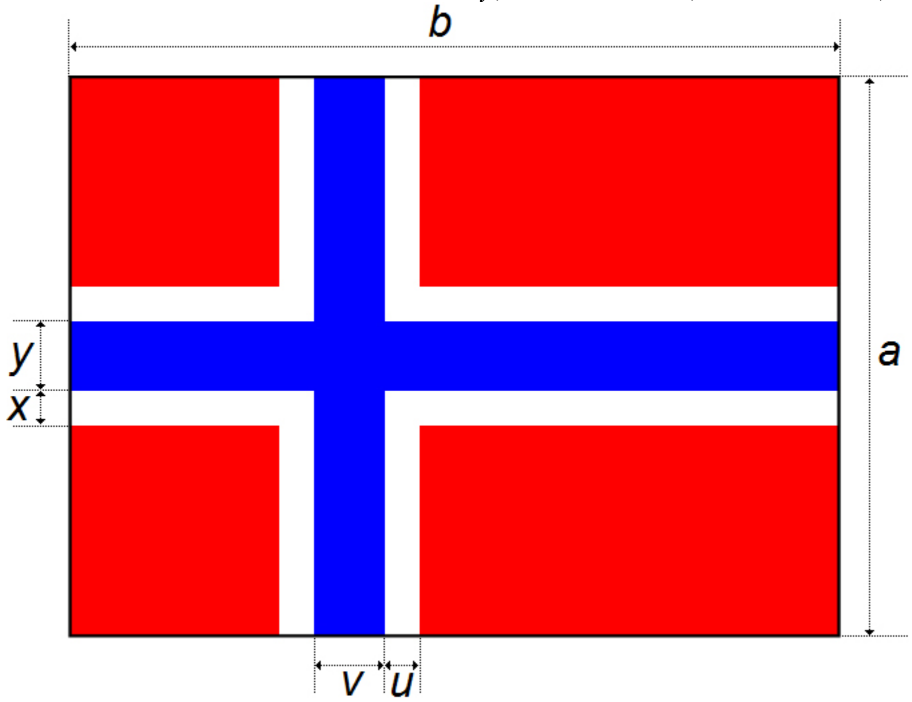
Řešení zadaných úloh:

1. Podle obr. 52 platí: $b=\frac{11}{8}a$, $x=\frac{1}{16}a$, $y=\frac{2}{16}a$, $u=\frac{1}{22}b=\frac{1}{22}\cdot\frac{11}{8}a=\frac{1}{16}a$ a $v=\frac{2}{22}b=\frac{2}{22}\cdot\frac{11}{8}a=\frac{1}{8}a$. Plocha celé vlajky je: $S=a\cdot b=a\cdot\frac{11}{8}a=\frac{11}{8}a^2$. Plocha bílých pruhů pak je: $S_\mathrm{b}=2x\cdot b+2u\cdot a-2u\cdot y-2x\cdot v-4x\cdot u=$ $=2\cdot\left(\frac{1}{16}a\cdot\frac{11}{8}a+\frac{1}{16}a\cdot a-\frac{1}{16}a\cdot\frac{1}{8}a-\frac{1}{16}a\cdot\frac{1}{8}a-2\cdot\frac{1}{16}a\cdot\frac{1}{16}a\right)=\frac{1}{4}a^2$. Plocha modrých pruhů je: $S_\mathrm{m}=y\cdot b+v\cdot a-v\cdot y=\frac{1}{8}a\cdot\frac{11}{8}a+\frac{1}{8}a\cdot a-\frac{1}{8}a\cdot\frac{1}{8}a=\frac{9}{32}a^2$. Plocha bílých pruhů tedy tvoří $\frac{S_\mathrm{b}}{S}\cdot 100\,\%=\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{8}{11a^2}\cdot 100\,\%=\frac{200}{11}\,\%\doteq 18\,\%$ plochy vlajky, plocha modrých tvoří $\frac{S_\mathrm{m}}{S}\cdot 100\,\%=\frac{9}{32}a^2\cdot\frac{8}{11a^2}\cdot 100\,\%=\frac{225}{11}\,\%\doteq 21\,\%$ plochy vlajky. Plocha červených obdélníků pak tvoří 61 % plochy vlajky.
2. Plocha norské vlajky je $S=\frac{11}{8}a^2$. Šířka indonéské vlajky na norské vlajce je rovna dvojnásobku šířky bílého pruhu norské vlajky, tedy $a_\mathrm{I}=2\cdot\frac{1}{16}a=\frac{1}{8}a$. Její délka pak je $b_\mathrm{I}=\frac{3}{2}a_\mathrm{I}=\frac{3}{16}a$. Plocha indonéské vlajky proto je $S_\mathrm{I}=a_\mathrm{I}\cdot b_\mathrm{I}=\frac{1}{8}a\cdot\frac{3}{16}a=\frac{3}{128}a^2$. Plocha indonéské vlajky tedy tvoří $\frac{S_\mathrm{I}}{S}\cdot 100\,\%=\frac{3}{128}a^2\cdot\frac{8}{11a^2}\cdot 100\,\%=\frac{300}{176}\,\%\doteq 1{,}7\,\%$ plochy norské vlajky.
3. Plocha norské vlajky je $S=\frac{11}{8}a^2$. Šířka polské vlajky na norské vlajce je rovna dvojnásobku šířky bílého pruhu norské vlajky, tedy $a_\mathrm{P}=2\cdot\frac{1}{16}a=\frac{1}{8}a$. Její délka pak je $b_\mathrm{P}=\frac{8}{5}a_\mathrm{P}=\frac{1}{5}a$. Plocha polské vlajky proto je $S_\mathrm{P}=a_\mathrm{P}\cdot b_\mathrm{P}=\frac{1}{8}a\cdot\frac{1}{5}a=\frac{1}{40}a^2$. Plocha polské vlajky tedy tvoří $\frac{S_\mathrm{P}}{S}\cdot 100\,\%=\frac{1}{40}a^2\cdot\frac{8}{11a^2}\cdot 100\,\%=\frac{100}{55}\,\%\doteq 1{,}8\,\%$ plochy norské vlajky.

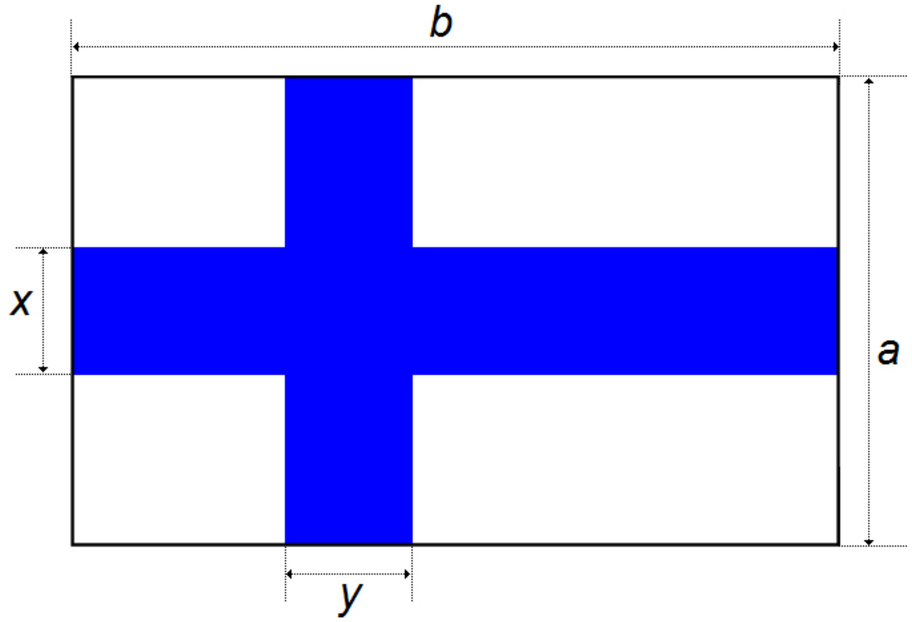
4. Plocha norské vlajky je $S = \frac{11}{8}a^2$. Šířka nizozemské vlajky na norské vlajce je rovna trojnásobku šířky bílého pruhu norské vlajky, tedy $a_{\mathrm{NI}} = 3 \cdot \frac{1}{16}a = \frac{3}{16}a$. Její délka pak je $b_{\mathrm{NI}} = \frac{3}{2}a_{\mathrm{NI}} = \frac{9}{32}a$. Plocha nizozemské vlajky proto je $S_{\mathrm{NI}} = a_{\mathrm{NI}} \cdot b_{\mathrm{NI}} = \frac{3}{16}a \cdot \frac{9}{32}a = \frac{27}{512}a^2$. Plocha nizozemské vlajky tedy tvoří $\frac{S_{\mathrm{NI}}}{S} \cdot 100\,\% = \frac{27}{512}a^2 \cdot \frac{8}{11a^2} \cdot 100\,\% = \frac{2700}{704}\,\% \doteq 3{,}8\,\%$ plochy norské vlajky.
5. Plocha norské vlajky je $S = \frac{11}{8}a^2$. Šířka finské vlajky na norské vlajce je rovna šířce dvou bílých a jednoho modrého pruhu norské vlajky, tedy $a_{\mathrm{FI}} = 2 \cdot \frac{1}{16}a + \frac{1}{8}a = \frac{1}{4}a$. Její délka pak je $b_{\mathrm{FI}} = \frac{18}{11}a_{\mathrm{FI}} = \frac{9}{22}a$. Plocha finské vlajky proto je $S_{\mathrm{FI}} = a_{\mathrm{FI}} \cdot b_{\mathrm{FI}} = \frac{1}{4}a \cdot \frac{9}{22}a = \frac{9}{88}a^2$. Plocha finské vlajky tedy tvoří $\frac{S_{\mathrm{FI}}}{S} \cdot 100\,\% = \frac{9}{88}a^2 \cdot \frac{8}{11a^2} \cdot 100\,\% = \frac{900}{121}\,\% \doteq 7{,}4\,\%$ plochy norské vlajky.
6. Podle obr. 53 platí: $b = \frac{18}{11}a$, $x = \frac{3}{11}a$ a $y = \frac{3}{18}b = \frac{3}{18} \cdot \frac{18}{11}a = \frac{3}{11}a$. Plocha celé vlajky je: $S = a \cdot b = a \cdot \frac{18}{11}a = \frac{18}{11}a^2$. Plocha modrých pruhů je: $S_{\mathrm{m}} = x \cdot b + y \cdot a - x \cdot y = \frac{3}{11}a \cdot \frac{18}{11}a + \frac{3}{11}a \cdot a - \frac{3}{11}a \cdot \frac{3}{11}a = \frac{78}{121}a^2$. Plocha modrých pruhů tedy tvoří $\frac{S_{\mathrm{m}}}{S} \cdot 100\,\% = \frac{78}{121}a^2 \cdot \frac{11}{18a^2} \cdot 100\,\% = \frac{1300}{33}\,\% \doteq 39\,\%$ plochy vlajky. Plocha bílých obdélníků tedy tvoří 61 % plochy vlajky.
7. Plocha norské vlajky je $S = \frac{11}{8}a^2$. Délka francouzské vlajky na norské vlajce je $b_{\mathrm{F}} = \left(\frac{30}{33} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{37}{33} \cdot \frac{1}{16}\right)a = \frac{25}{132}a$. Její šířka pak je $a_{\mathrm{F}} = \frac{2}{3}b_{\mathrm{F}} = \frac{25}{198}a$. Plocha francouzské vlajky proto je $S_{\mathrm{F}} = a_{\mathrm{F}} \cdot b_{\mathrm{F}} = \frac{25}{198}a \cdot \frac{25}{132}a = \frac{625}{26136}a^2$. Plocha francouzské vlajky tedy tvoří $\frac{S_{\mathrm{F}}}{S} \cdot 100\,\% = \frac{625}{26136}a^2 \cdot \frac{8}{11a^2} \cdot 100\,\% = \frac{62500}{35937}\,\% \doteq 1{,}7\,\%$ plochy norské vlajky.
8. Plocha norské vlajky je $S = \frac{11}{8}a^2$. Šířka thajské vlajky na norské vlajce je $a_{\mathrm{T}} = \frac{1}{8}a + 4 \cdot \frac{1}{16}a = \frac{3}{8}a$. Její délka pak je $b_{\mathrm{T}} = \frac{3}{2}a_{\mathrm{T}} = \frac{9}{16}a$. Plocha thajské vlajky proto je $S_{\mathrm{T}} = a_{\mathrm{T}} \cdot b_{\mathrm{T}} = \frac{3}{8}a \cdot \frac{9}{16}a = \frac{27}{128}a^2$. Plocha thajské vlajky tedy tvoří $\frac{S_{\mathrm{T}}}{S} \cdot 100\,\% = \frac{27}{128}a^2 \cdot \frac{8}{11a^2} \cdot 100\,\% = \frac{2700}{176}\,\% \doteq 15{,}3\,\%$ plochy norské vlajky.

Jednou z variant, jak žáky přesvědčit, že na norskou státní vlajku lze umístit státní vlajky dalších států světa, je připravit pro každého z nich vytištěný model norské vlajky (viz obr. 83, který je až na velikost totožný s obr. 49) a šablonu zobrazenou na obr. 84. Pokud z této šablony žáci vystřihnou vyznačené obdélníky a položí na stejně velký model státní vlajky Norska, ve vystřižených obdélnících se objeví vlajky dalších šesti států světa. Při stříhání otvorů v šabloně zobrazené na obr. 84 je nutné dbát na to, abychom dva velké obdélníky vystřihli velmi přesně a šablona zůstala držet pohromadě.

Právě popsanou aktivitu lze využít nejen v hodinách matematiky při probírání obsahů geometrických útvarů, ale také jí propojit s výukou zeměpisu a zopakovat při ní vlajky vybraných států.



obr. 52



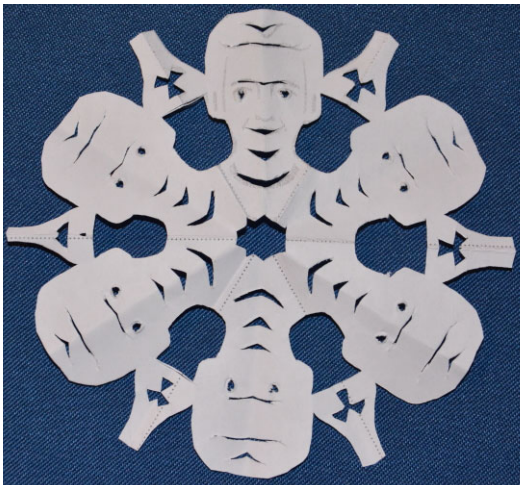
obr. 53

11. Vědecká prostírání

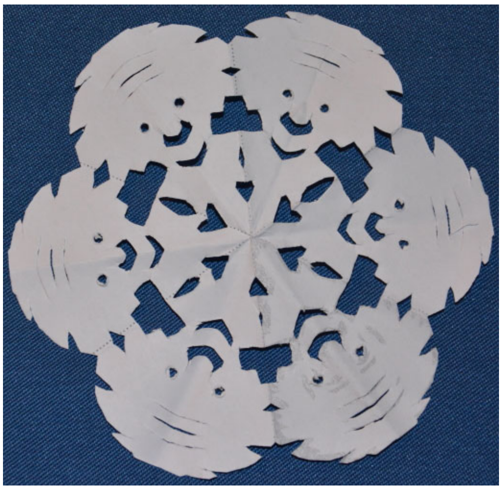
Zajímavá prostírání lze nalézt na webových stránkách [12]. Upravené šablony jsou zobrazeny na obr. 85 až obr. 87. Šablonu vytiskneme na běžný papír formátu A4, obstřihneme velmi přibližně kolem naznačené černé kružnice a podél tečkovaných čar přehneme tak, abychom získali kruhovou výseč se středovým úhlem 60 stupňů resp. 90 stupňů (tj. výseč s obrázkem). Tuto výseč můžeme ještě jednou přehnout na polovinu. Nyní stačí vystřihnout dle šablony šedé části – tj. vést střihy nůžkami tak, abychom odstranili šedé části obrázku.

Po následném rozložení získáme netradiční prostírání, na kterém budou vyznačeny hlavy tří fyziků včetně typického předmětu, který je s daným vědcem spjat. Na obr. 54 až obr. 56 jsou zobrazena výsledná prostírání v pořadí Curie, Einstein a Schrödinger.

Ve výuce lze tato prostírání využít při probírání symetrií, osové souměrnosti nebo shodných zobrazení.



obr. 54

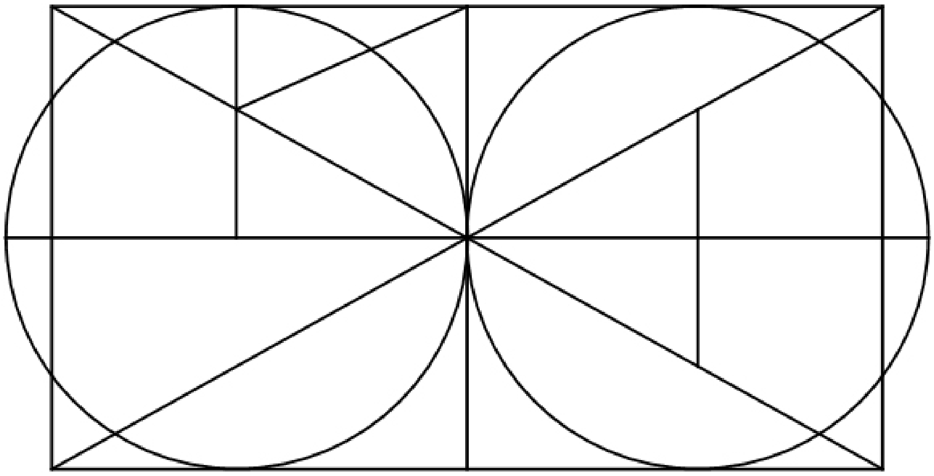


obr. 55

obr. 56

12. Monogram

Na obr. 57 je zobrazen tzv. monogram, ve kterém jsou zakódovány všechna písmena anglické abecedy a všechny číslice od 0 do 9. Najdete je?



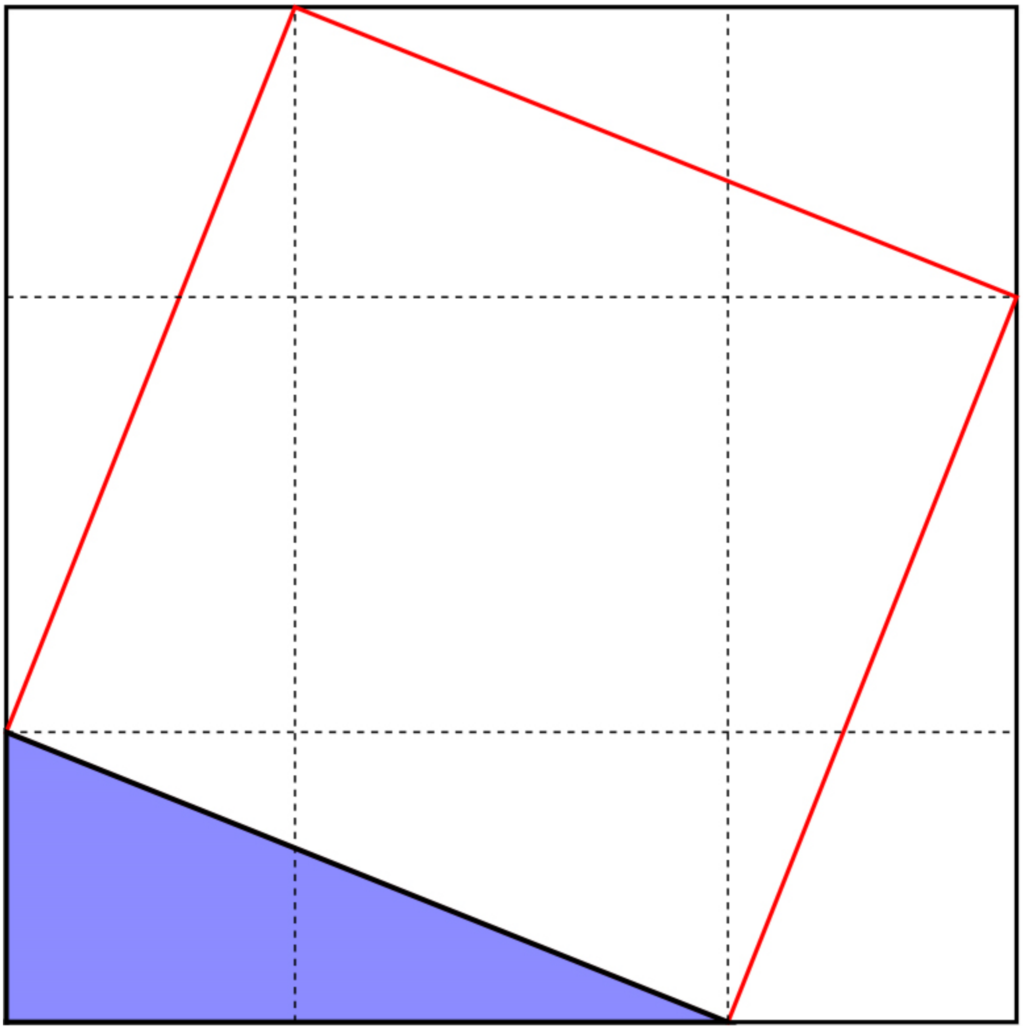
obr. 57

Řešení je možné zkontrolovat v animovaném souboru formátu GIF (viz [13]).

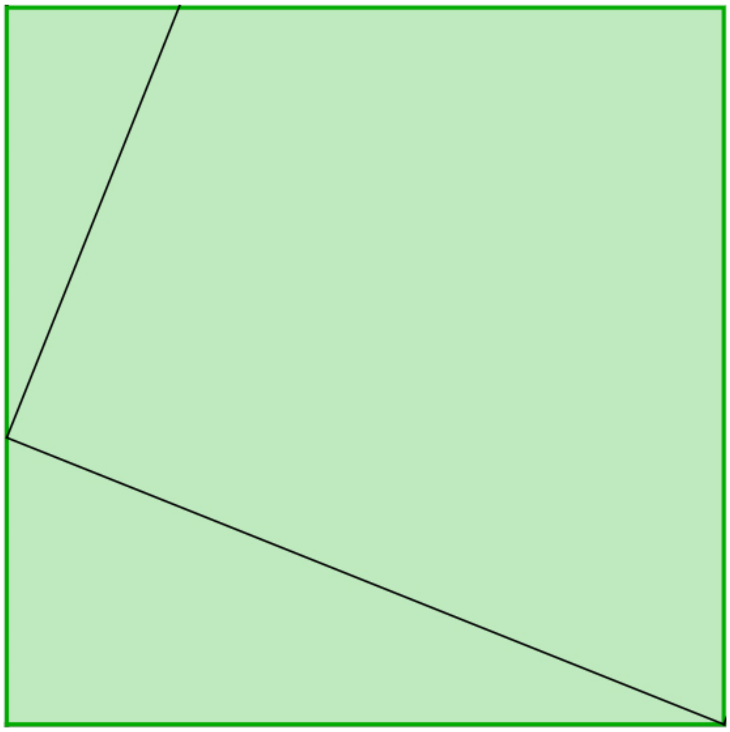
13. Materiály pro samostatnou práci žáků

13.1 Pythagorova věta

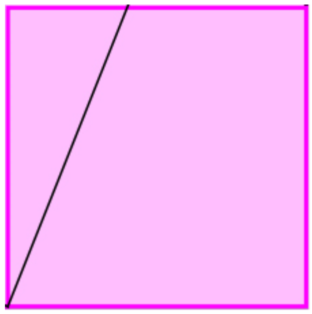
Na obr. 58 je zobrazena síť, do které je třeba seskládat postupem popsaným výše vystřižené útvary zobrazené na obr. 59 a obr. 60; tyto dva útvary je třeba vystřihnout navíc podél černých čar.



obr. 58

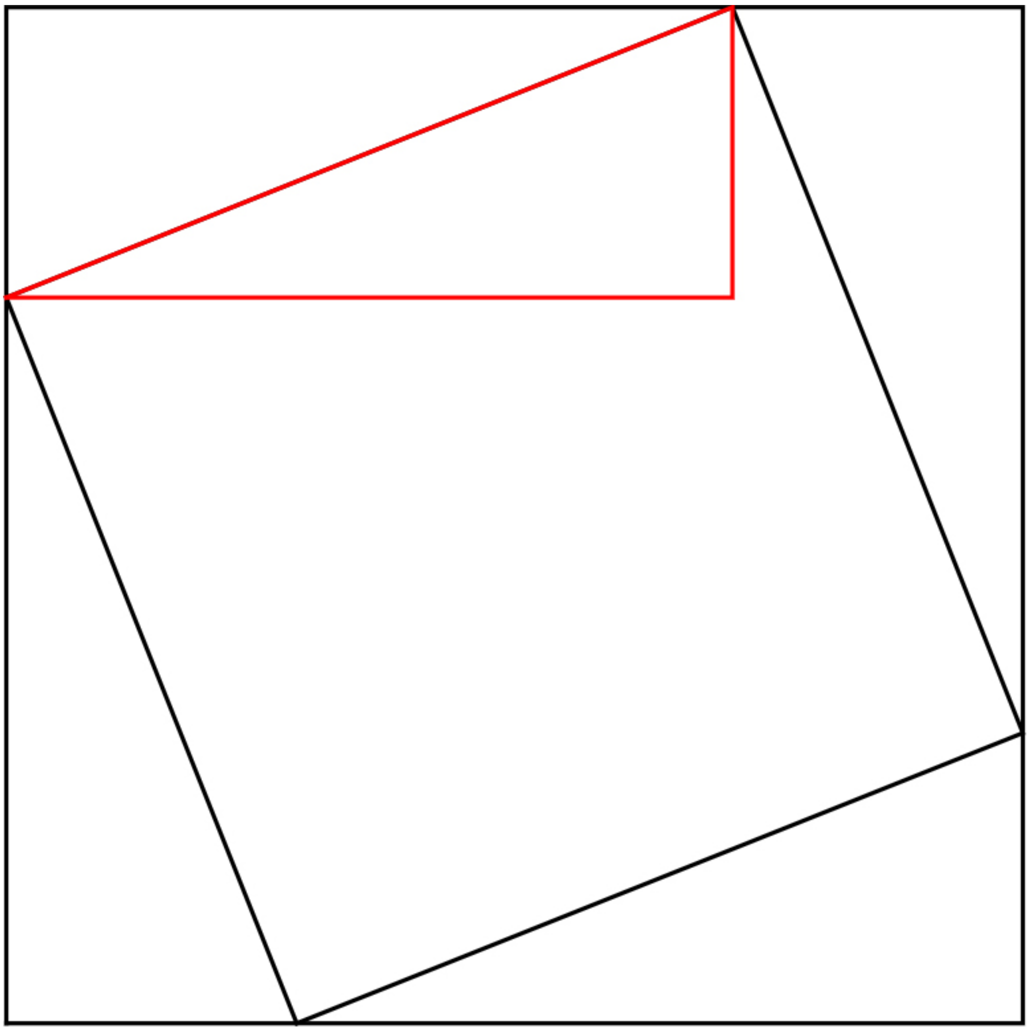


obr. 59

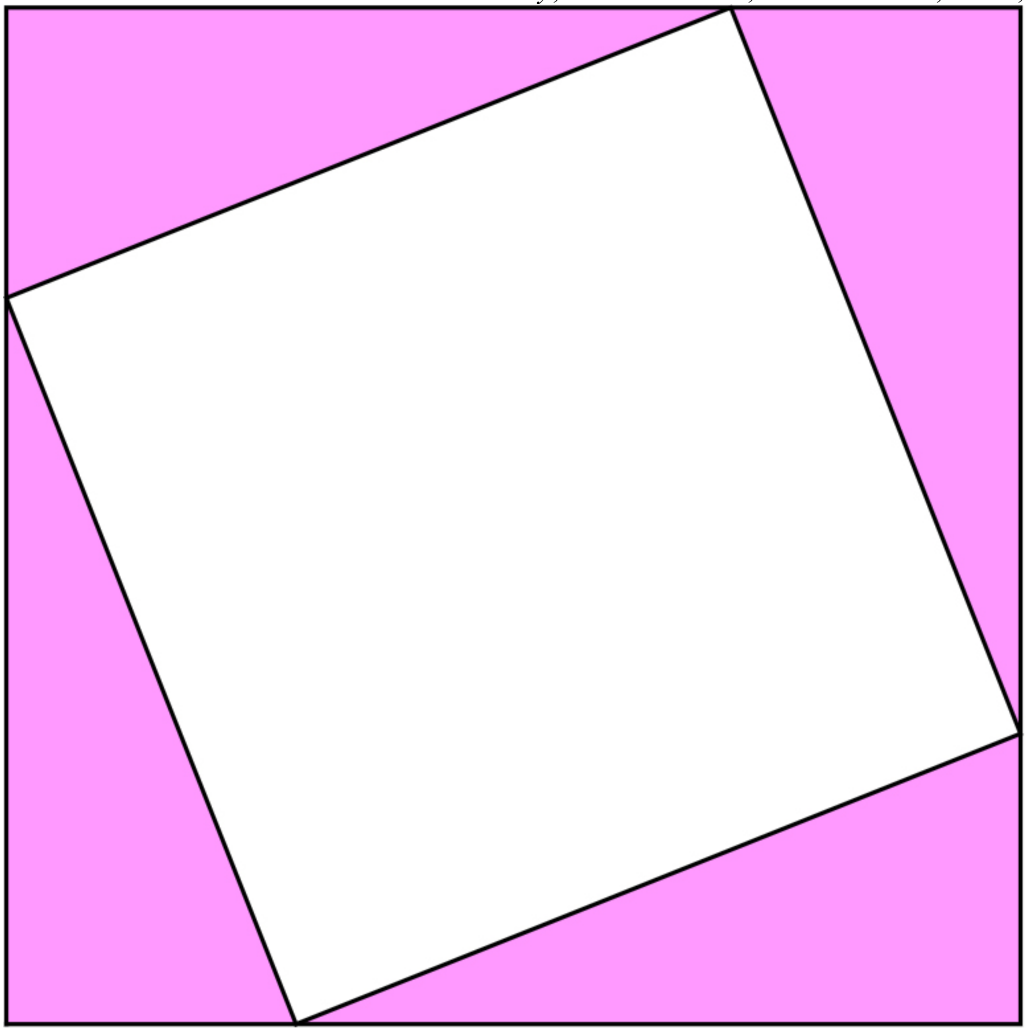


obr. 60

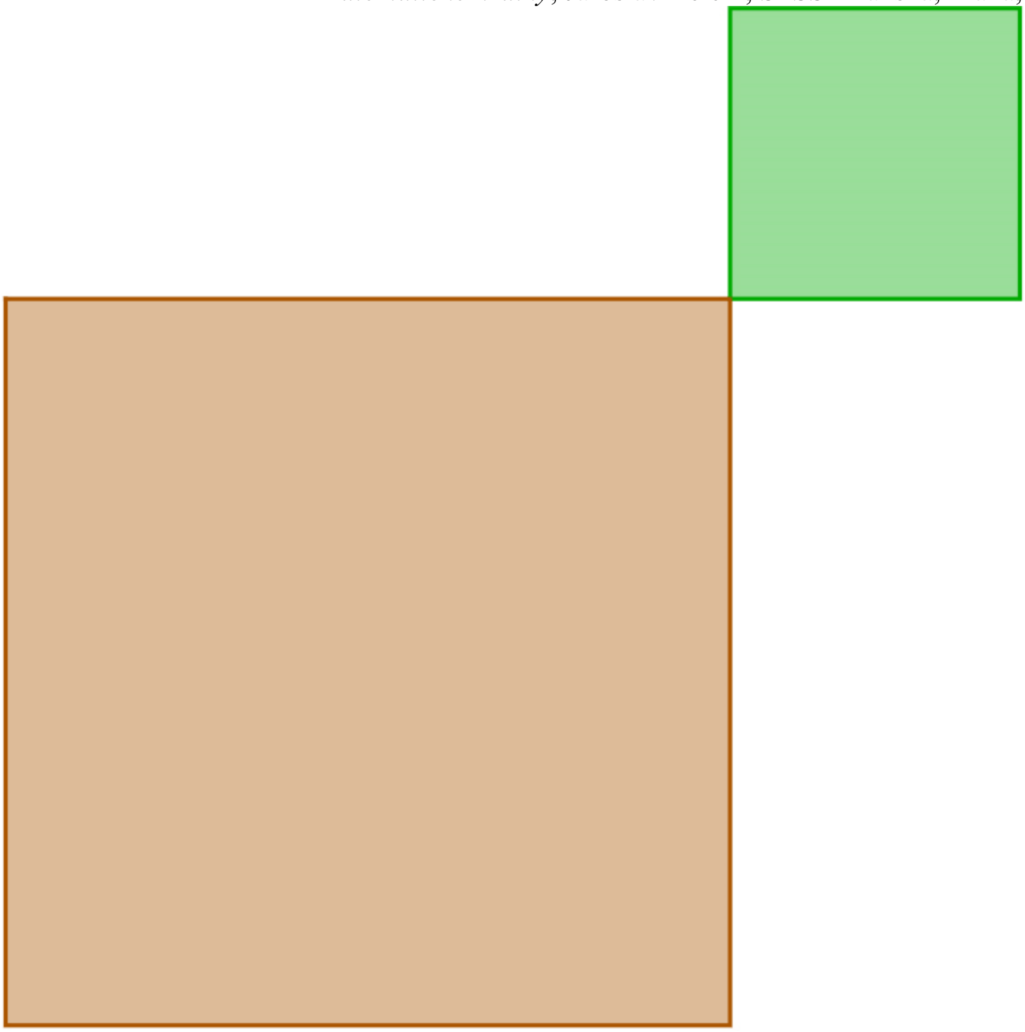
Na obr. 61 je zobrazena síť, do které je třeba seskládat útvary zobrazené na obr. 62 (budou potřeba pouze čtyři trojúhelníky) a obr. 63 (budou třeba oba oddělené čtverce).



obr. 61



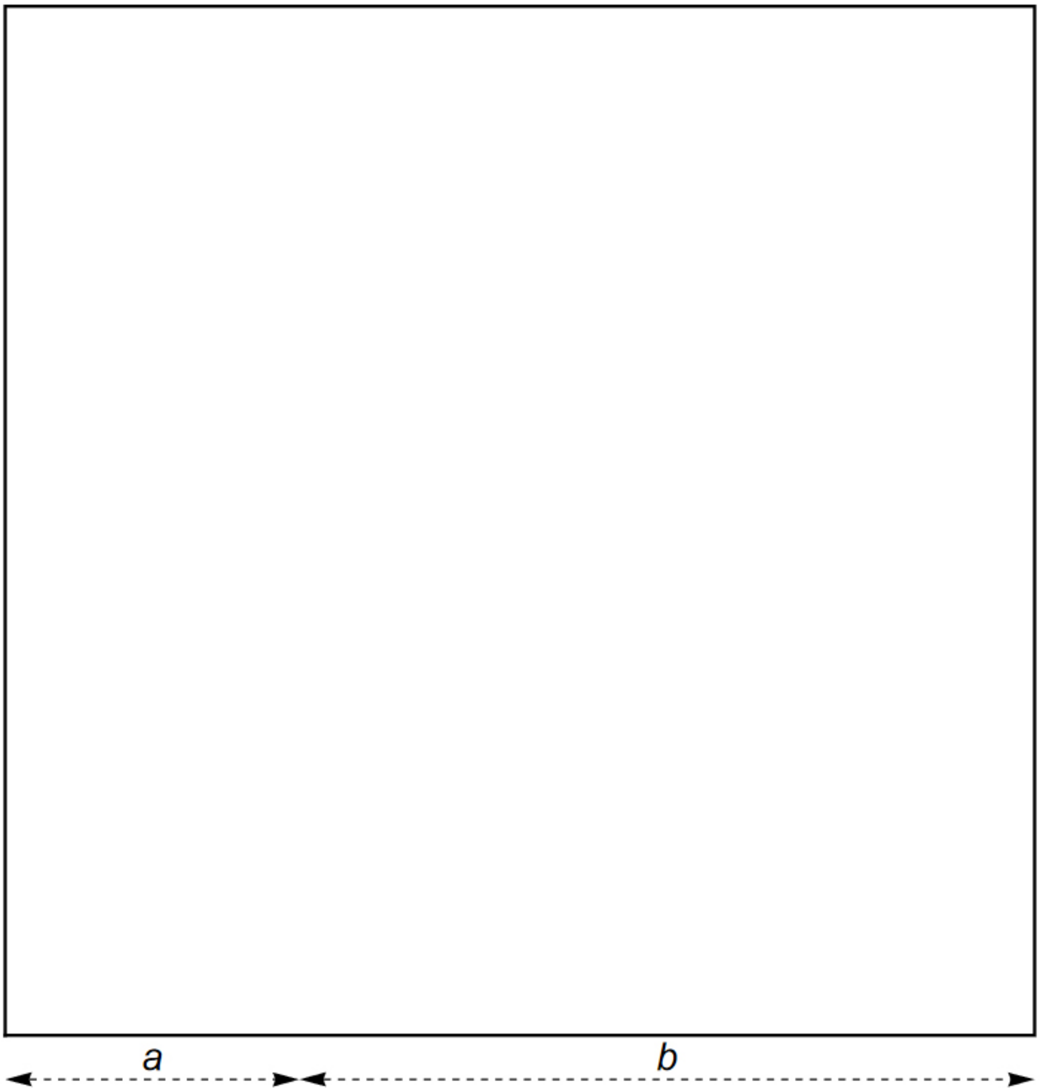
obr. 62



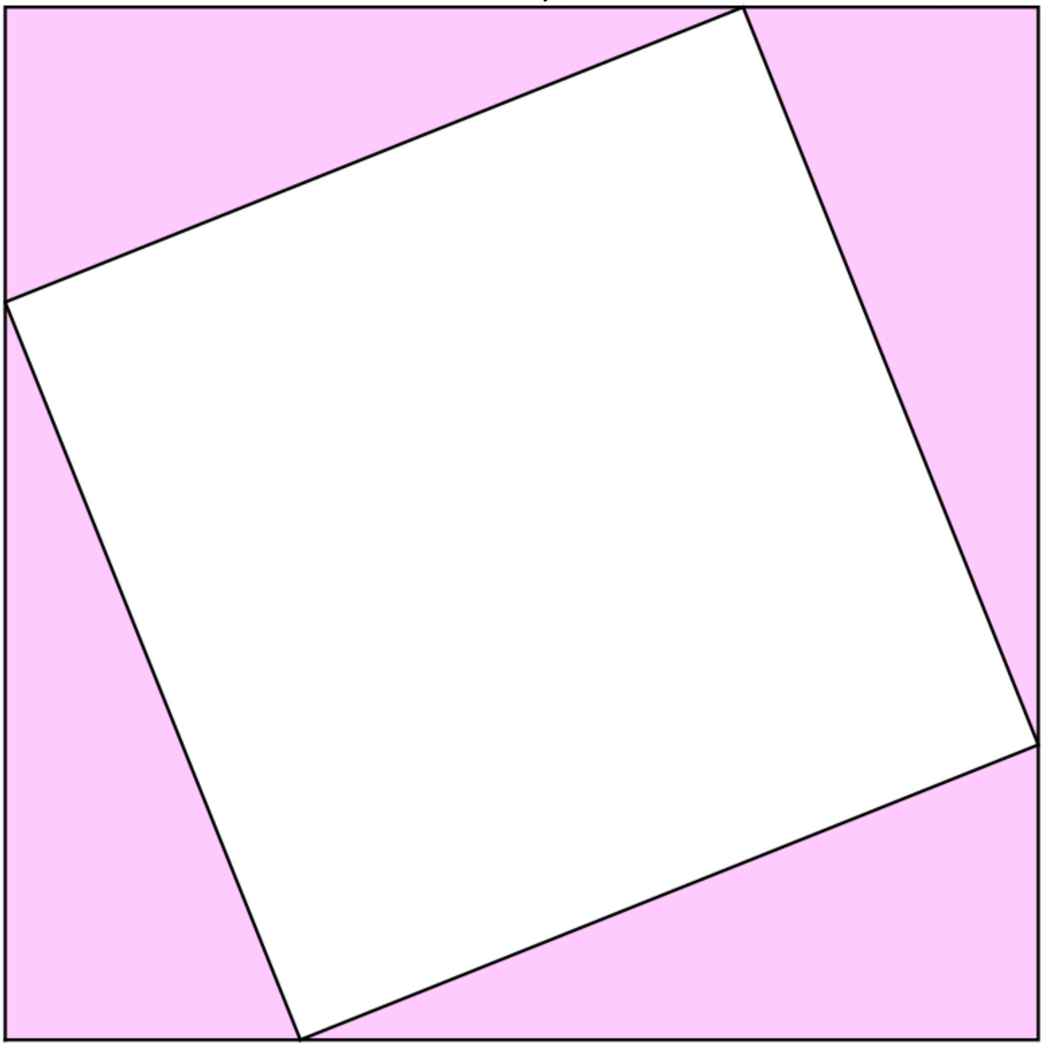
obr. 63

13.2 Algebraické vztahy

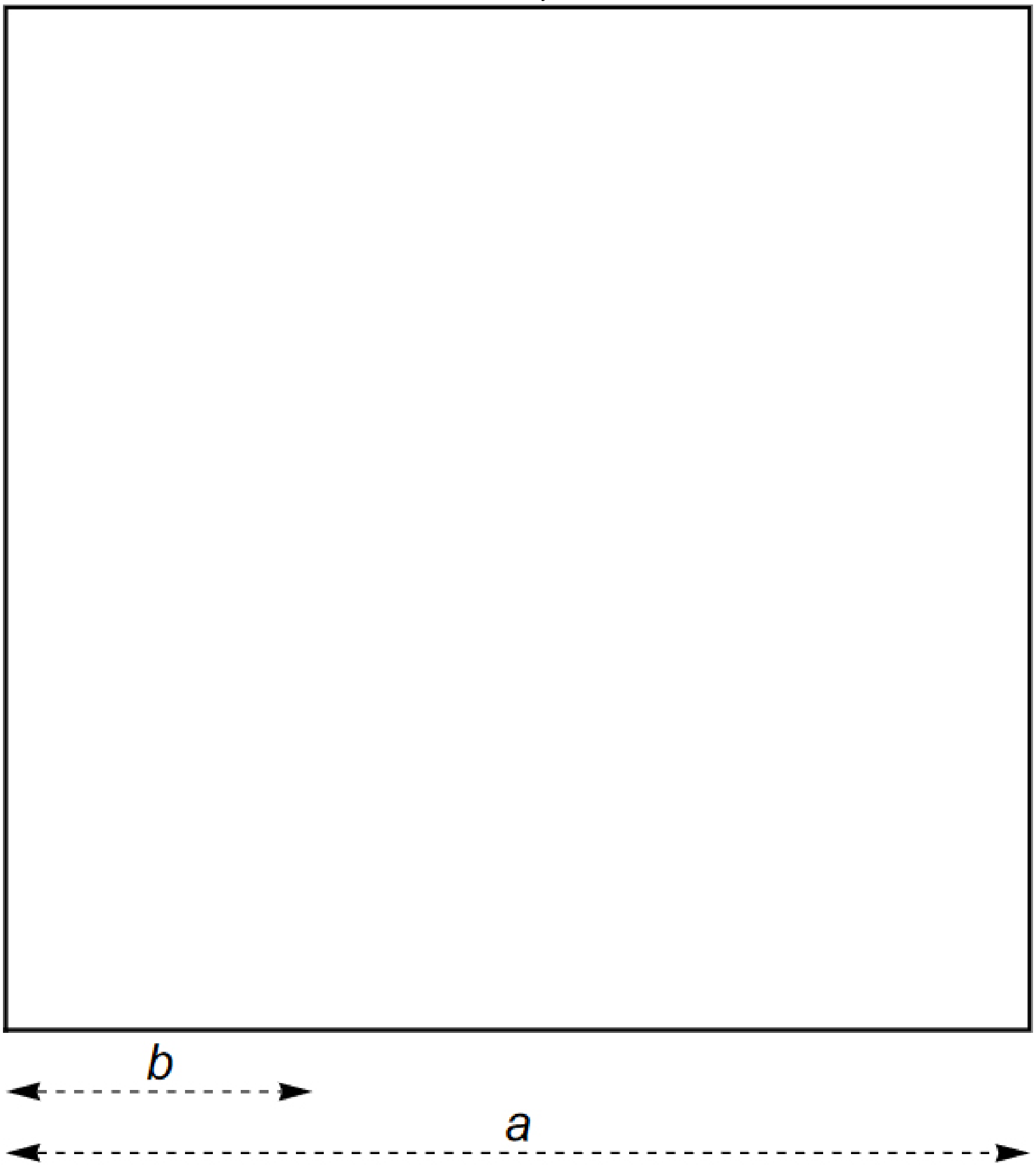
Na obr. 64 je zobrazena síť, do které bude potřeba vystřihnout všechny dílky (tj. čtyři trojúhelníky a jeden čtverec) zobrazené na obr. 65. Pro další algebraický vztah je síť zobrazena na obr. 66, na obr. 68 jsou pak zobrazeny dva čtverce a obdélník, které bude pro aktivitu potřeba vystřihnout. K poslednímu algebraickému vztahu je síť zobrazena na obr. 69 a na obr. 67 jsou zobrazeny dva obdélníky, které budou k výše popsanému důkazu zapotřebí.



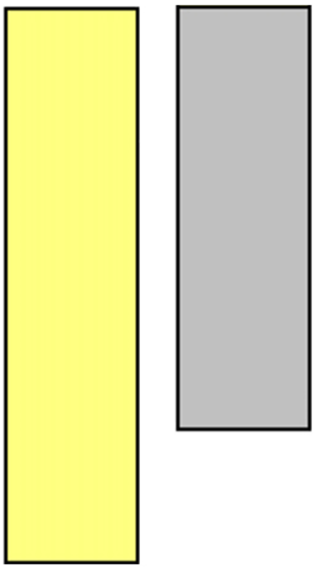
obr. 64



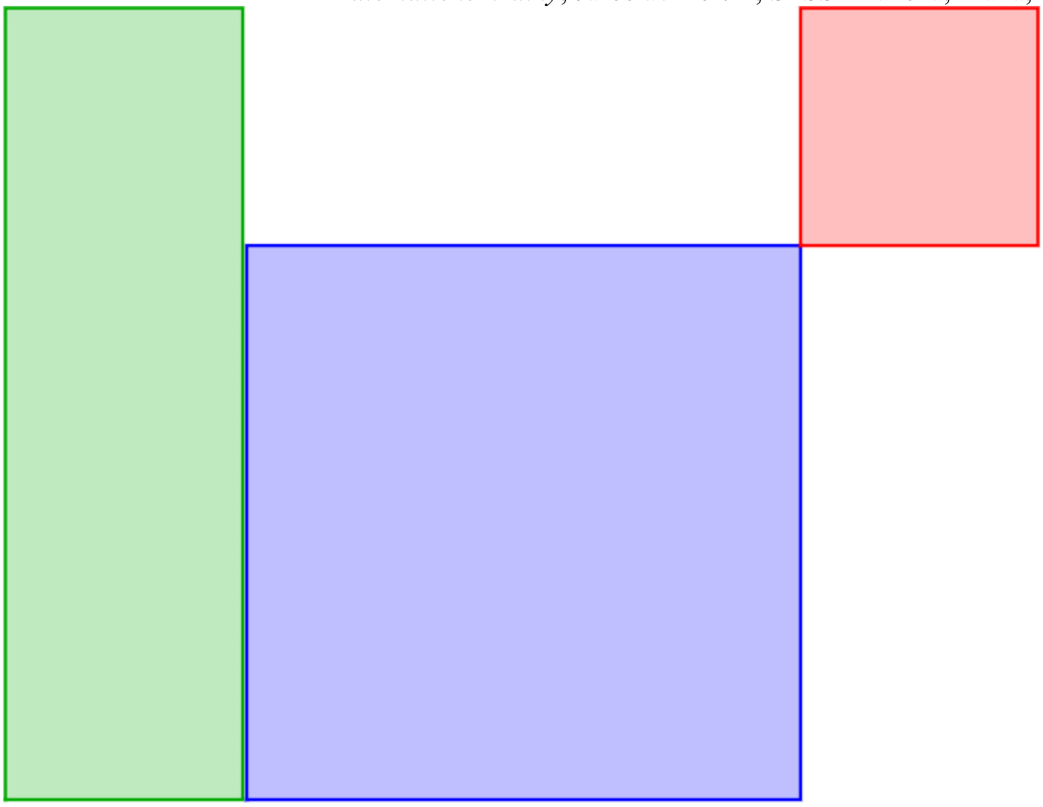
obr. 65



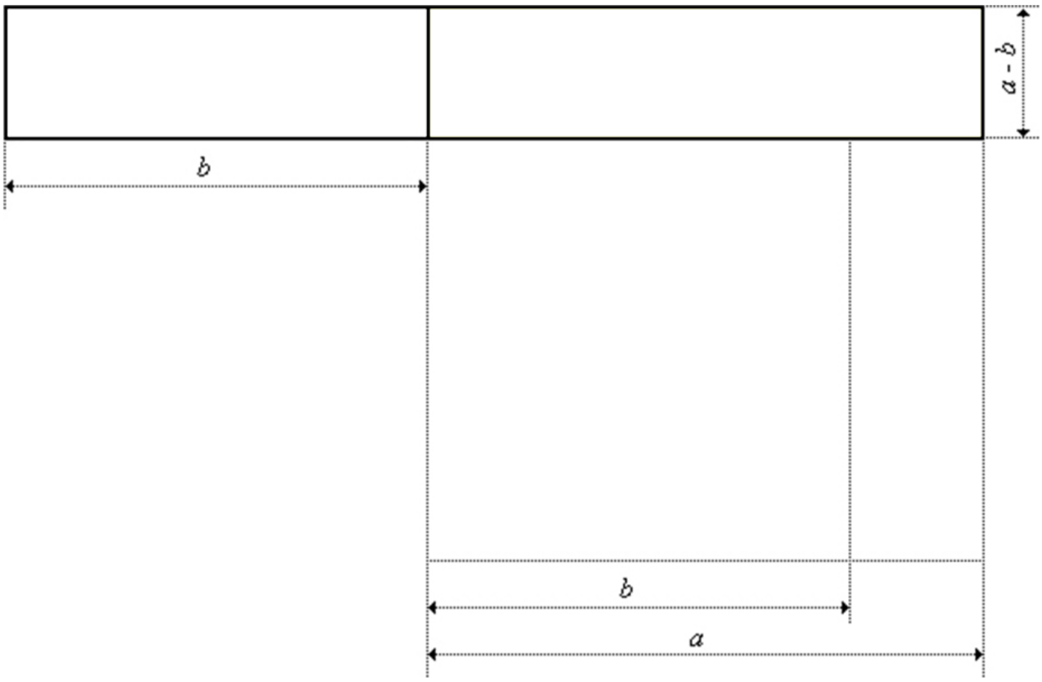
obr. 66



obr. 67

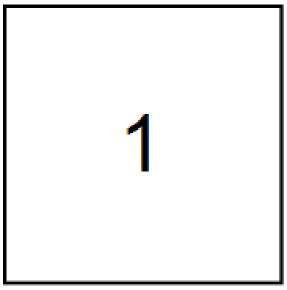


obr. 68

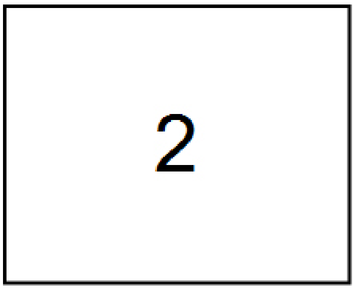


obr. 69

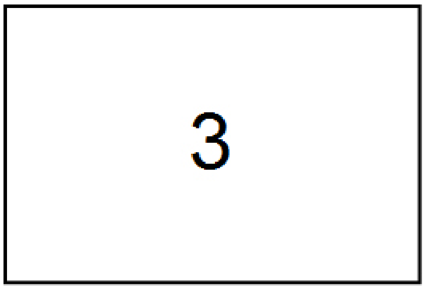
13.3 Zlatý řez



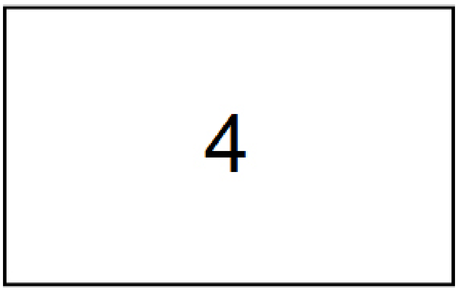
obr. 70



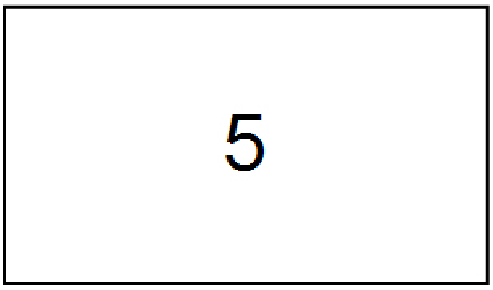
obr. 71



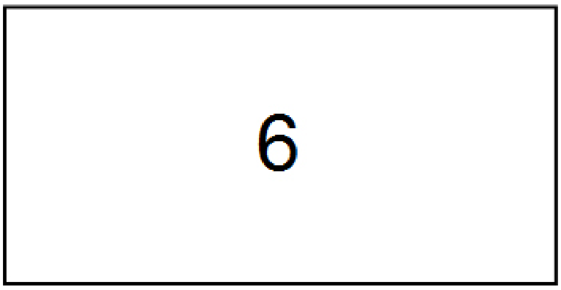
obr. 72



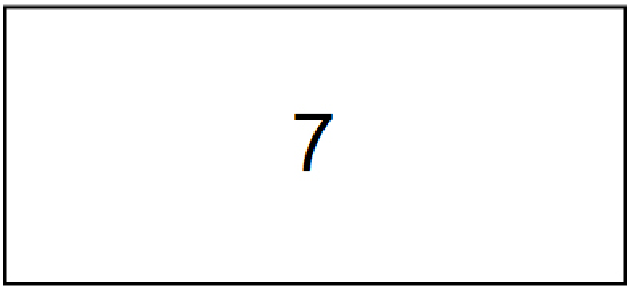
obr. 73



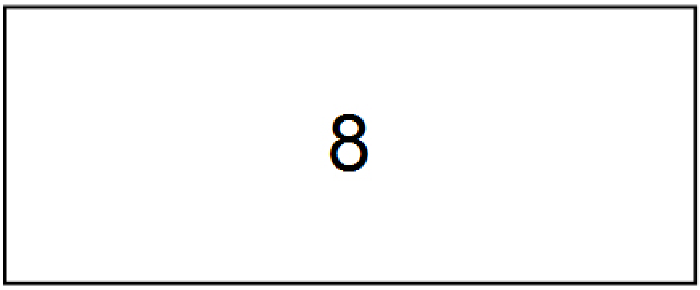
obr. 74



obr. 75

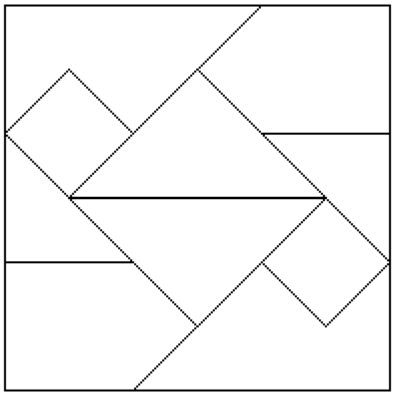


obr. 76



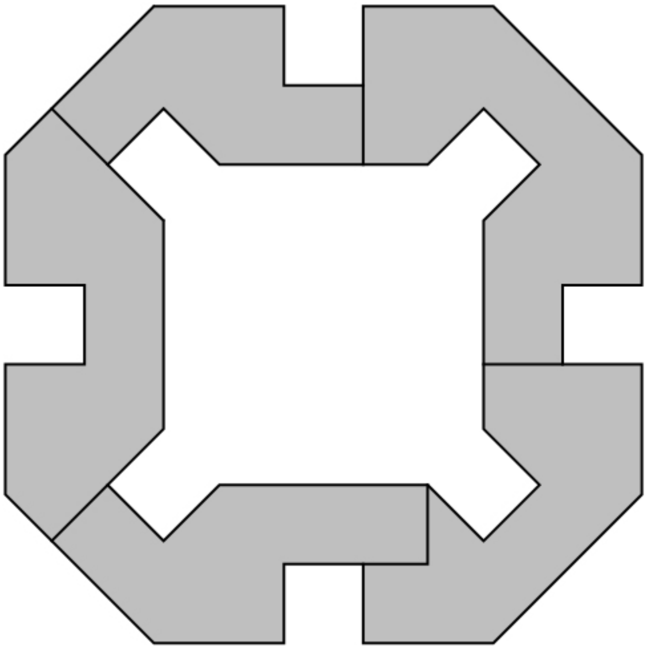
obr. 77

13.4 Skládání čtverců



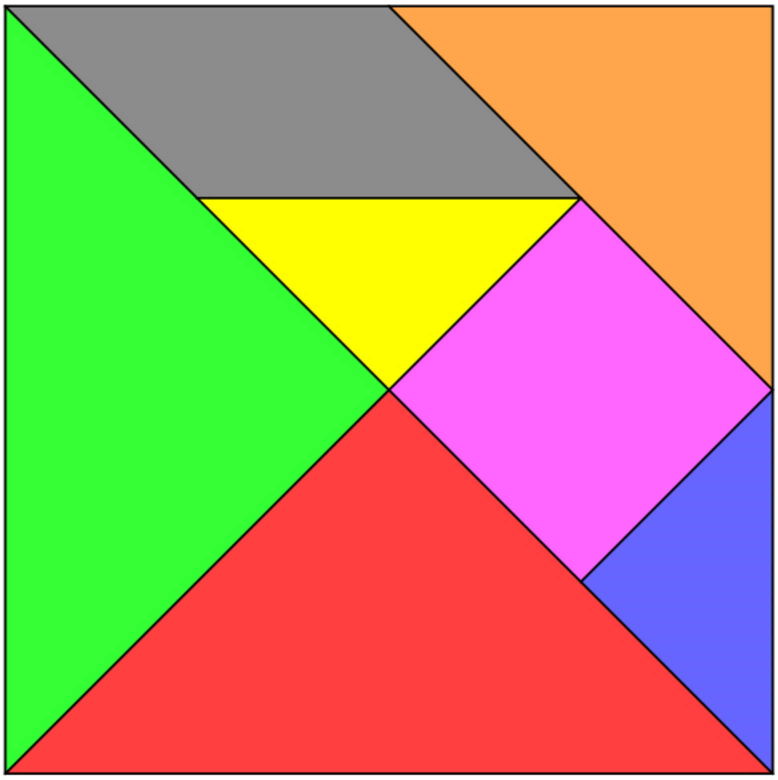
obr. 78

13.5 Geometrický hlavolam



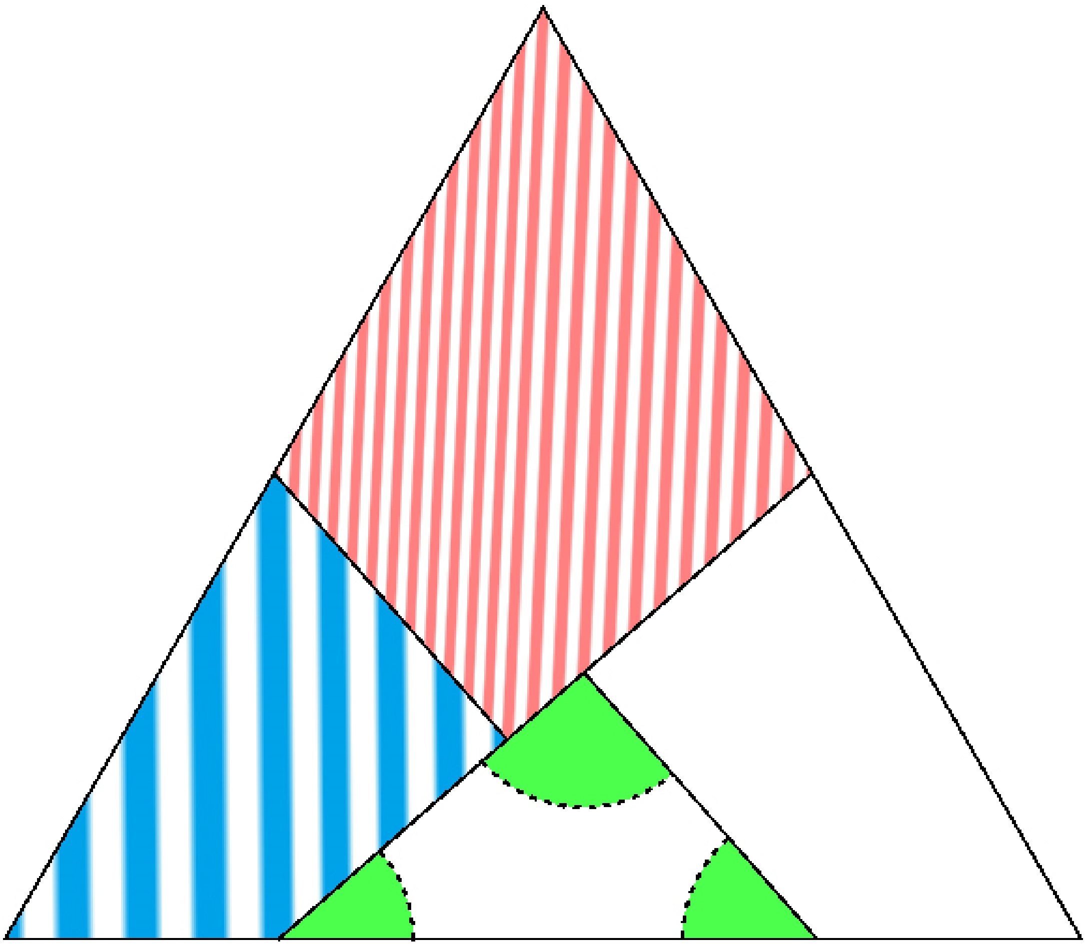
obr. 79

13.6 Tangram

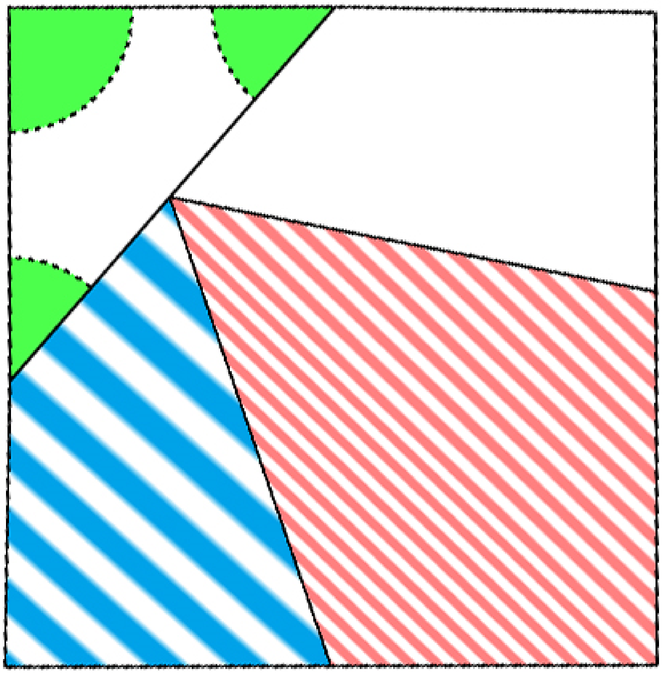


obr. 80

13.7 Přeskládání trojúhelníka na čtverec

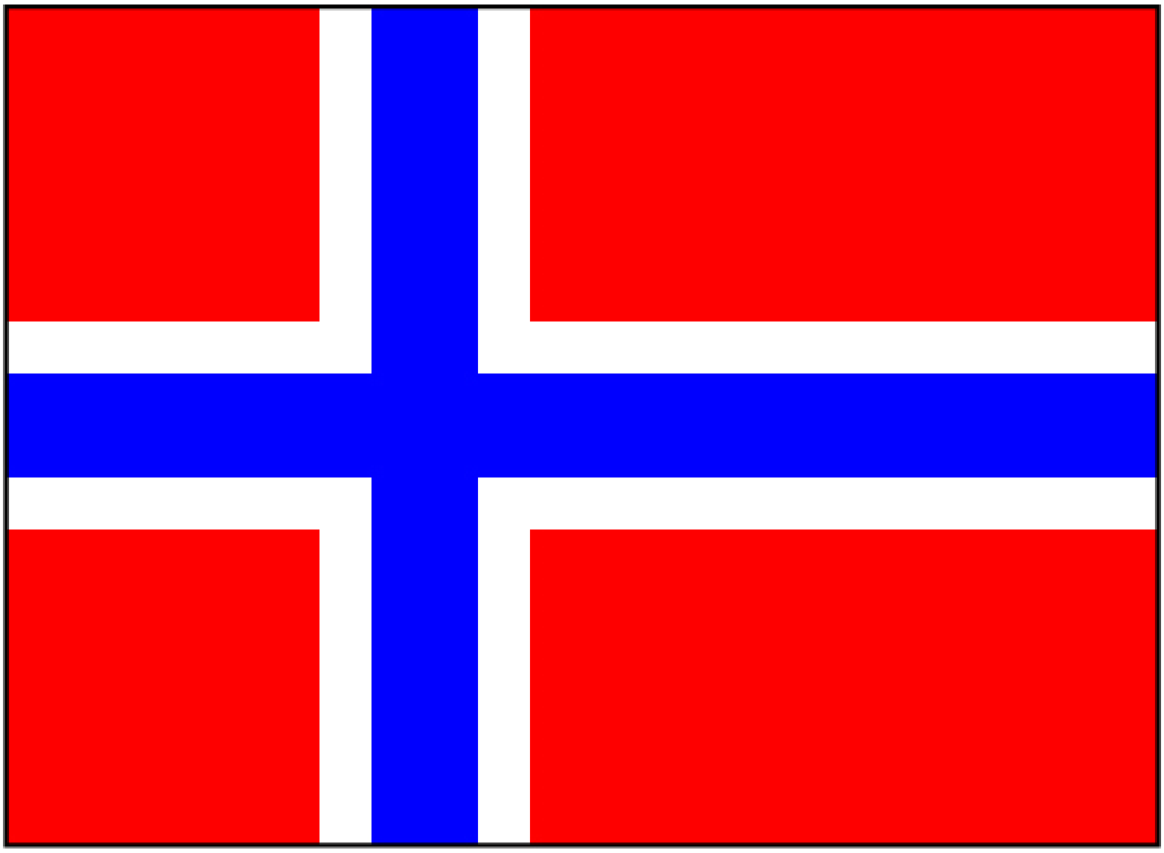


obr. 81

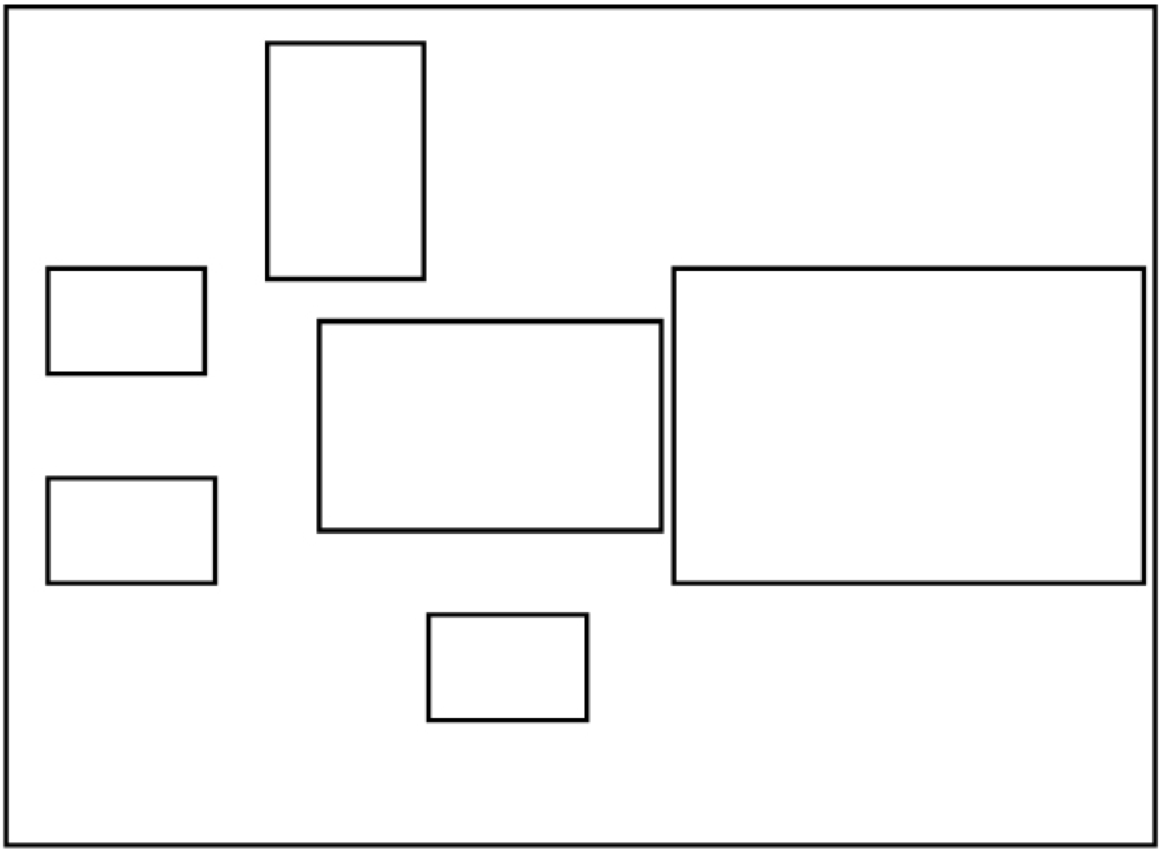


obr. 82

13.8 Vlajky

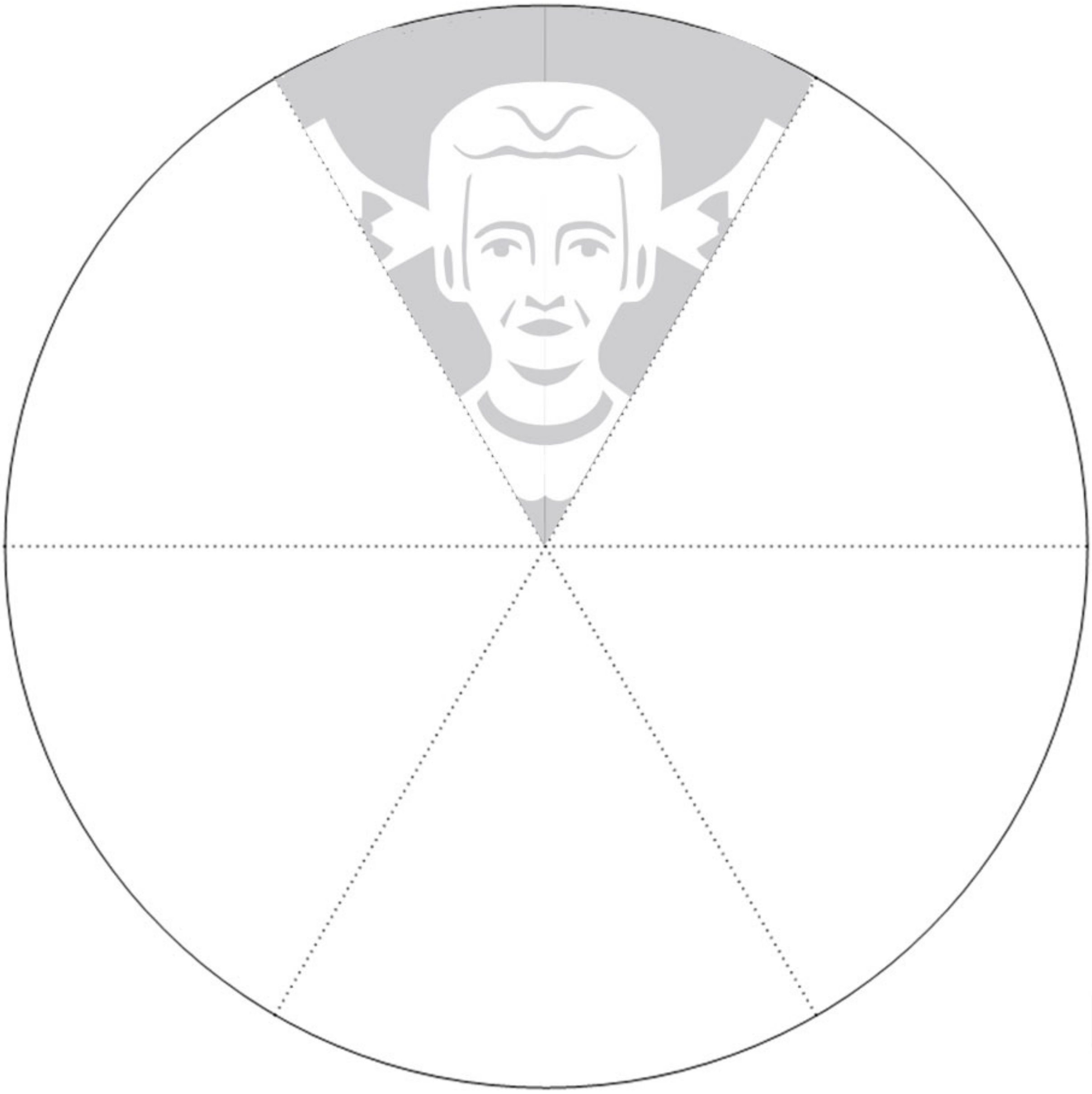


obr. 83



obr. 84

13.9 Vědecká prostírání



obr. 85

obr. 86

obr. 87

14. Literatura a zdroje

[1] http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1459
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Tangram
[3] http://www.bosounohou.cz/tangram/?c=0
[4] http://www.shockwave.com/gamelanding/daily-tangram.jsp?day=28&month=12&year=15
[5] https://cs.wikipedia.org/wiki/Norsk%C3%A1_vlajka
[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Indon%C3%A9sk%C3%A1_vlajka
[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Polsk%C3%A1_vlajka
[8] https://cs.wikipedia.org/wiki/Nizozemsk%C3%A1_vlajka
[9] https://cs.wikipedia.org/wiki/Finsk%C3%A1_vlajka
[10] https://cs.wikipedia.org/wiki/Francouzsk%C3%A1_vlajka
[11] https://cs.wikipedia.org/wiki/Thajsk%C3%A1_vlajka
[12] http://www.symmetrymagazine.org/article/december-2014/deck-the-halls-with-nobel-physicists?utm_content=buffer0f56b&utm_medium=social&utm_source=twitter.com&utm_campaign=buffer
[13] http://www.gifbin.com/984987