



STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA SDĚLOVACÍ TECHNIKY

110 00 Praha 1, Panská 856/3,

☎ 221 002 111, 🌐 www.panska.cz, ✉ sekretariat@panska.cz



ABSOLVENTSKÝ PROJEKT

Děje s exponenciálním průběhem

Autor: **Jaroslav Skala**

Studijní obor: **78-42-M/01 Technické lyceum**

Školní rok: **2012/2013**

Kód třídy: **09L**

ANOTACE:

Práce se zabývá popisem fyzikálních experimentů, které jsou popsány exponenciální závislostí fyzikálních veličin. Naměřená data jsou fyzikálně vysvětlena. Vybrané experimenty jsou popsány matematicky.

ANNOTATION:

The work deals with the description of physical experiments which are characterized by exponential dependence of physical quantities. The measured data are explained by physical theory. The selected experiments are described with mathematics.

1. Úvod

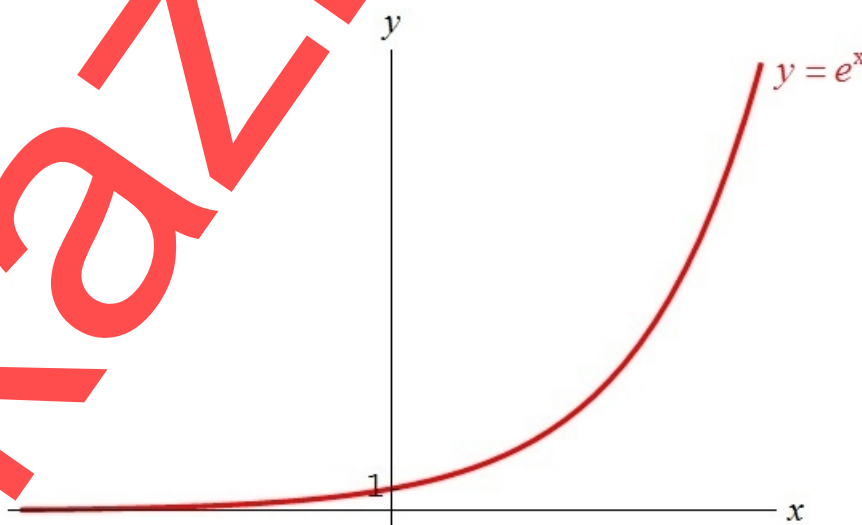
Průběh většiny fyzikálních, biologických a chemických jevů lze popsat vhodnou matematickou funkcí. Nejčastěji se ve fyzice používá funkce lineární, jejímž grafem v příslušné soustavě jednotek je přímka. Lineární průběh představuje např. velikost rychlosti v závislosti na čase u rovnoměrně zrychlených pohybů. Když si tuto závislost promítnu do grafu, vznikne nám lineární neboli přímka. Kvadratická funkce se používá např. k popisu závislosti dráhy uražené tělesem na čase u rovnoměrně zrychlených pohybů. Další funkce používané k popisu periodických dějů, jako je kmitání nebo vlnění, jsou funkce sinus a cosinus. V této práci se zaměřím na fyzikální děje s exponenciálním průběhem, kterých je velké množství. Budu se zaměřovat na praktické pokusy, ve kterých dokážu exponenciální průběh dějů při nich probíhajících pomocí přístrojů od firmy Vernier. Přitom budou popsány fyzikální experimenty, u kterých mají sledované fyzikální veličiny jak exponenciální nárůst, tak exponenciální pokles. Vybrané pokusy také popíši matematicky s využitím diferenciálního a integrálního počtu a předpisů exponenciálních funkcí. Než se pustím do praktické části, ozřejmím, jak vlastně exponenciála vypadá.

2. Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je jednou z mála funkcí, jejíž graf je uznáván i mnoha nematematicky. Pro praktické využití ve světě, v oblastech jako jsou finance, věda a dokonce i populační růst, se stalo slovo "exponenciální" slovem používaným v běžném jazyce. Ale kolik toho vlastně víme o této funkci? Podívejme se na exponenciální funkci a hlavně na konstantu e podrobněji. e je Eulerovo číslo (též označované jako základ přirozených logaritmů), je to jedna ze základních matematických konstant. Je pojmenováno podle švýcarského matematika Leonarda Eulera (1707 - 1783). Jeho přibližná hodnota je 2,71828 ...

První matematici měli tendenci soustředit se na logaritmy, a i když je teď přirozený logaritmus (základ e) poměrně dobře známý, matematici si čísla e dlouho nevšíмали. Díky tomu se e nestalo světově proslulou konstantou jako je např. π , ale pomalu se začalo objevovat jako náhodné číslo v oborech, jako jsou finance. Proč je tedy Eulerovo číslo tak důležité? Jedním z důvodem jistě je i fakt, že funkce $y = e^x$ je jediná funkce, která po zderivování (podle proměnné x) je stejná, jako funkce původní, tj. $y = e^x$.

Exponenciální funkci lze zapsat ve tvaru $y = a^x$, kde $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$. Definiční obor této funkce je celý obor reálných čísel. Oborem hodnot exponenciální funkce je interval $(0; \infty)$. Graf exponenciální funkce o základu e je vidět na obr. 1. To je graf funkce $y = e^x$.



obr. 1

3. „e“ a finančníctví

Jednou z důležitých oblastí ve finančníctví je úročení. Úrok je poplatek za půjčení peněz. Budu-li se zabývat složeným úročením, dospěji až k Eulerovu číslu. Nejprve, ale řeknu něco málo o úročení.

Existují dva základní způsoby úročení. První je jednoduché úročení a druhé je složené úročení. O jednoduchém úročení hovoříme tehdy, jestliže se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále se tedy neúročí. To znamená, že se úroky počítají stále z původního kapitálu a nevznikají úroky z úroků. O složeném úročení se jedná tehdy, jestliže se úroky připsují k peněžní částce a spolu s ní se dále úročí. Dejme tomu, že jsem vložil 100 Kč na konto s 5 % úrokem, úrokováný ročně. Po roce na mém kontě bude $100 \text{ Kč} \cdot 1,05 = 105 \text{ Kč}$. Na začátku druhého úrokovacího období budu mít 105 Kč a opět bude úrok 5 %. Na konci druhého roku tedy budu mít $105 \text{ Kč} \cdot 1,05 = 110,25 \text{ Kč}$, na konci třetího roku $110,25 \text{ Kč} \cdot 1,05 = 115,76 \text{ Kč}$, atd. Zde je vidět proč se toto úročení nazývá složené. Úročí se jak základ, tak připočítané úroky. Takto bude můj kapitál růst podle geometrické posloupnosti s kvocientem 1,05. Obecný případ složeného úročení je uveden v tab. 1. P_0 je původní kapitál, r je úroková sazba vyjádřená jako desetinné číslo, n je počet let, po které zůstávají peníze na kontě, P_1 až P_n jsou výše kapitálu na konci prvního až n -tého roku.

Rok	Stav kapitálu na konci roku	
1	$P_1 = P_0 + P_0 \cdot r$	$= P_0(1 + r)$
2	$P_2 = P_1 + P_1 \cdot r = P_1 \cdot (1 + r)$	$= P_0(1 + r)^2$
3	$P_3 = P_2 + P_2 \cdot r = P_2 \cdot (1 + r)$	$= P_0(1 + r)^3$
:	:	:
n	$P_n = P_{n-1} + P_{n-1} \cdot r = P_{n-1} \cdot (1 + r)$	$= P_0(1 + r)^n$

tab. 1

$$(1) \quad P_n = P_0(1 + r)^n$$

Tato formule je základem prakticky všech finančních kalkulací, ať už se jedná o bankovní konta, půjčky a jiné. Úroky lze ale počítat několikrát za rok. Jak se bude lišit roční a půl roční úročení, lze ukázat na dalším příkladě. Na konto s 5 % ročním úrokovým podílem vložím částku 100 Kč. Když budu úroky počítat ročně, budu mít po roce částku 105 Kč. Při půlročním úrokováním použiji jednu polovinu ročního úrokového podílu, tj. základ 100 Kč bude úrokován dvakrát, pokaždé s úrokem 2,5 %.

5. Praktické úlohy

5.1 Pokusy s teplotou

5.1.1 Chladnutí vody

První praktická úloha, kterou jsem naměřil, je chladnutí vody. Měřil jsem tedy pokles teploty vody v závislosti na čase v místnosti s teplotou asi 25° C.

K tomuto pokusu jsem potřeboval GO!Temp (čidlo pro měření teploty), které je zobrazeno na obr. 3, vroucí vodu, nádobu (já jsem použil kovový hrnec) a rozhraní LabQuest.



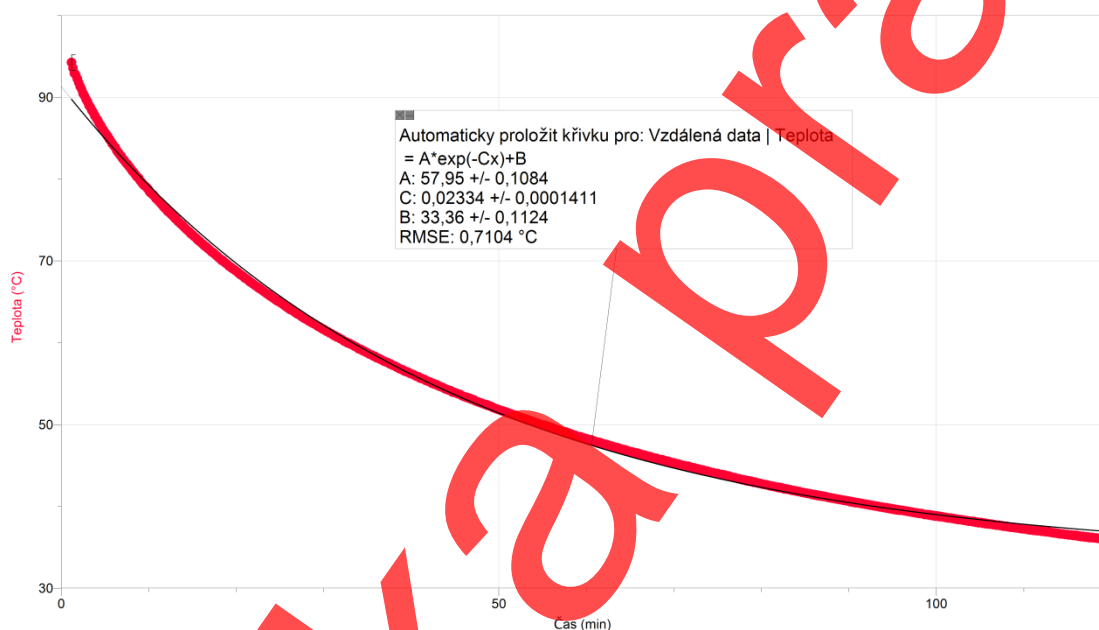
obr. 3

K přístroji LabQuest jsem připojil čidlo, které snímá teplotu. Do hrnce jsem nalil vodu, vložil do ní čidlo a vodu jsem zahříval až k dosažení jejího bodu varu. Když se voda začala vařit, hrnec jsem stáhl z keramické desky a nechal pomalu chladnout při teplotě místnosti. Přístroj jsem nastavil, aby zaznamenával data každých 10 sekund po dobu 120 minut. Snažil jsem se o co nejmenší chybu měření. Hrnec jsem utěsnil, aby se z vody neodpařovala pára a neovlivňoval jsem okolní teplotu (v místnosti byla zavřená okna i dveře atd.). Na obr. 4 je vidět exponenciální závislost i proložená funkce, která mi vyšla po vložení naměřených údajů do programu LoggerPro. Na vodorovné ose je čas a na svislé ose je teplota vody uvedená ve stupních Celsia (°C).

Program LoggerPro, ve kterém jsem měření zpracovával, umožňuje proložit naměřená data funkcí, kterou si uživatel může vybrat ze seznamu předdefinovaných funkcí nebo kterou si sám nadefinuje. Před vlastním proložením naměřených dat je nutné ta data, která chceme danou funkcí proložit, označit. V některých dále popsáných experimentech jsem totiž prokládal funkci pouze částí naměřených dat (ostatní data byla pro daný průběh experimentu nedůležitá nebo data byla od jisté hodnoty dále už konstantní).

Informační okno, které program LoggerPro zobrazí spolu s funkcí prokládající naměřená data, obsahuje číselné hodnoty jednotlivých koeficientů vystupujících

v předpisu funkce. Tyto koeficienty jsou vypsány společně s nepřesností, s jakou program (dle příslušné matematické metody) tyto hodnoty určuje. Přesnost teoretické funkce ve srovnání s naměřenými daty lze buď odhadnout na základě grafu, nebo charakterizovat na základě vypočtené chyby. Čím přesněji odpovídá nalezená funkce naměřeným datům, tím jsou menší vzájemné odchylky této funkce a naměřených dat v grafu. Kvantitativně lze přesnost aproximace určit pomocí zobrazeného koeficientu RMSE, který je dopočítán na základě použité metody. S klesající hodnotou koeficientu RMSE roste přesnost nalezené funkce vzhledem k naměřeným datům.



obr. 4

5.2 Pokusy s elektrinou

5.2.1 Nabíjení a vybíjení kondenzátoru

Kondenzátor je pasivní elektrotechnická akumulární součástka používaná v elektrických obvodech k dočasnému uchování elektrického náboje, a tím i k uchování potenciální elektrické energie.

5.2.2 Proměňování elektrického napětí a proudu

Já jsem se rozhodl proměřit časové závislosti elektrického napětí a elektrického proudu během nabíjení a vybíjení kondenzátoru; na základě teorie mají mít tyto závislosti také exponenciální průběh.

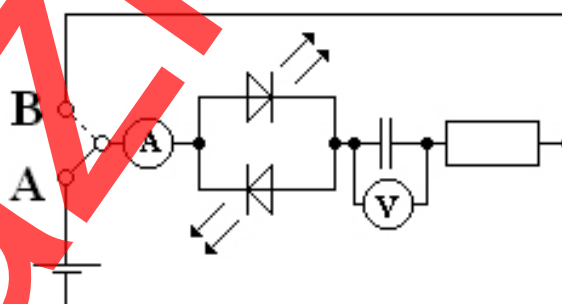
Zapojil jsem jednoduchý obvod, ve kterém byl zapojen kondenzátor s kapacitou 1 mF, dvě LED různých barev, zdroj napětí 9 V, čidlo ampérmetr typu DCP-BTA, voltmetr typu VP-BTA od firmy Vernier a rozhraní LabQuest. Veškeré pomůcky jsou zobrazené

na obr. 5. Při měření jsem nastavil frekvenci vzorkování na 10 Hz (tedy 10 měření za 1 s) a dobu měření na 10 s.



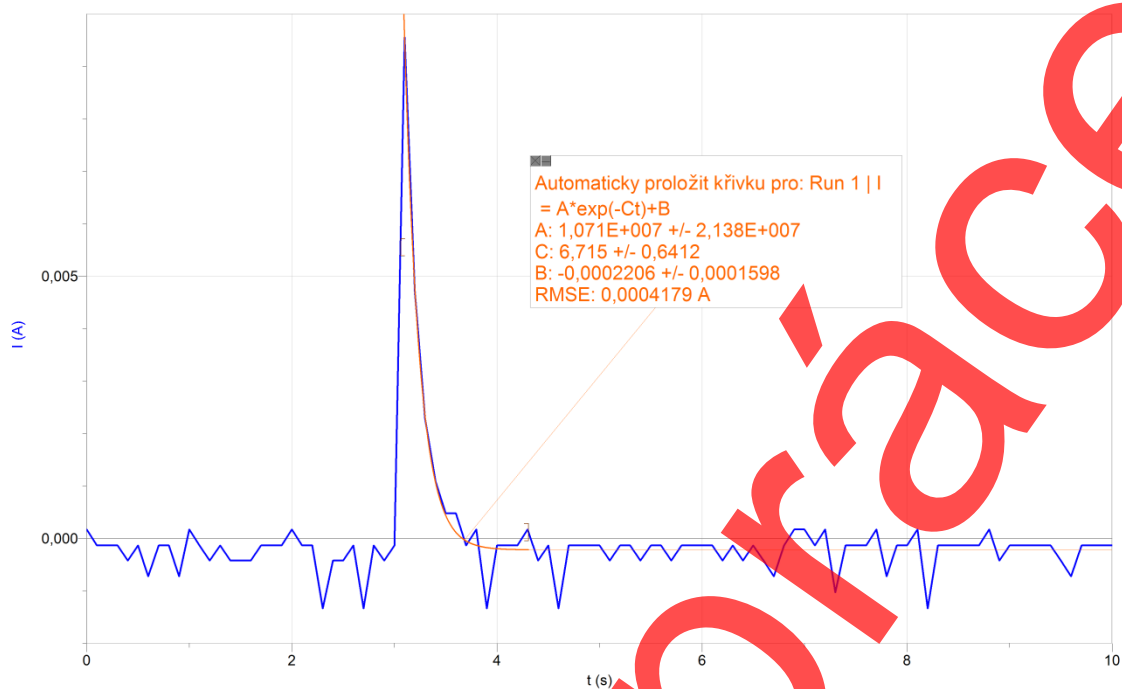
obr. 5

Tyto součástky jsem spojil podle schématu zobrazeného na obr. 6.



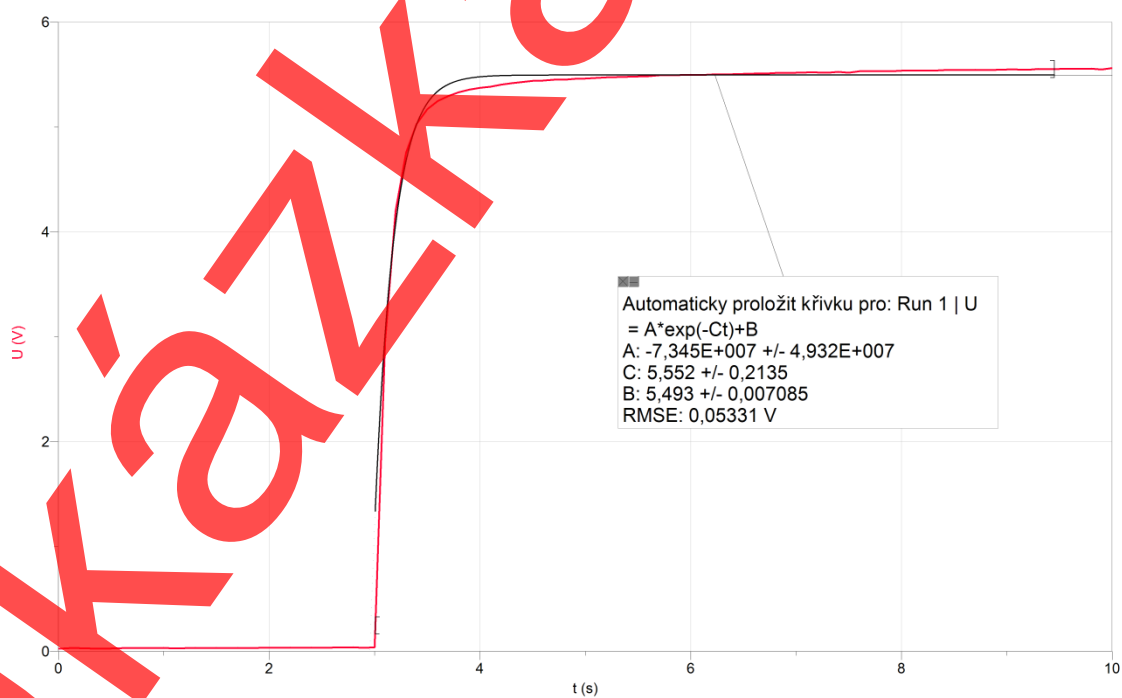
obr. 6

Ke kondenzátoru je připojen ochranný rezistor o odporu $100\ \Omega$. LED jsou v obvodu spojeny antiparalelně; tím zaručím, že bude procházet elektrický proud právě jednou LED bez ohledu na polaritu zdroje napětí.

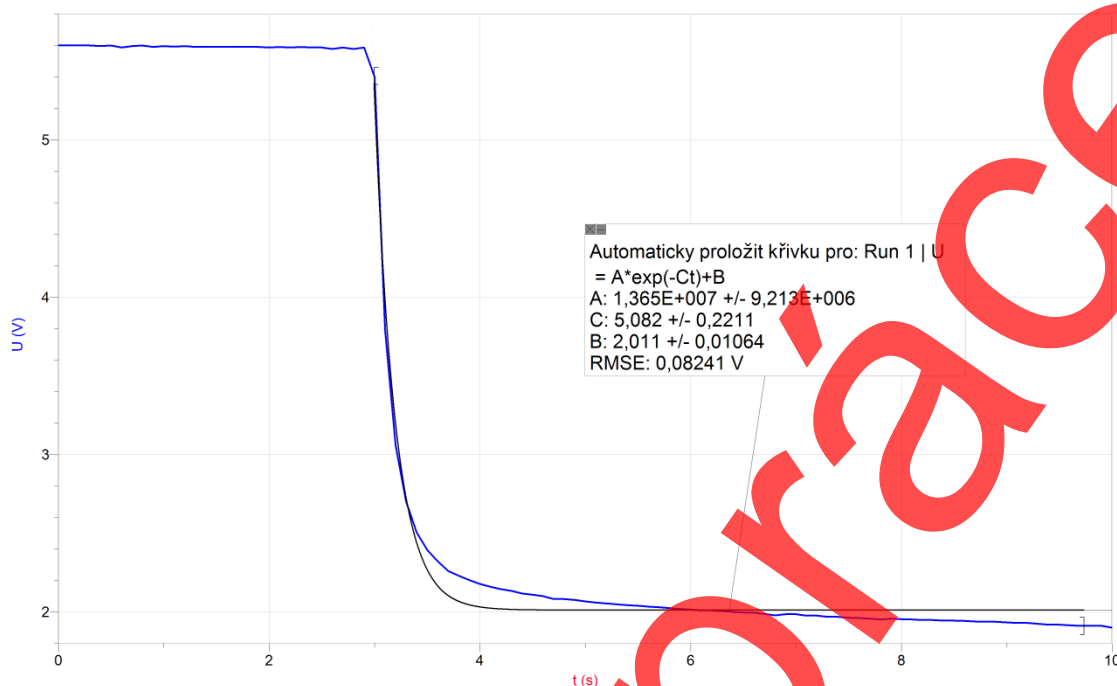


obr. 9

Časový průběh elektrického napětí při nabíjení kondenzátoru je zobrazen na obr. 10. Zatímco proud klesl po nabití kondenzátoru téměř na nulu, napětí je na maximální hodnotě.



obr. 10



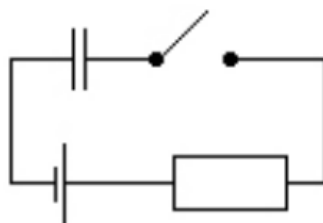
obr. 12

5.2.2.1 Výpočet časové závislosti napětí a proudu nabíjení kondenzátoru

Pro výpočet časové závislosti elektrického napětí měřeného na deskách kondenzátoru s kapacitou C při jeho nabíjení a časovou závislost elektrického proudu, který při nabíjení prochází obvodem, lze použít jeden typ matematických rovnic, které se nazývají **diferenciální rovnice**.

Diferenciální rovnice je matematická rovnice, ve které jako proměnné (resp. neznámé) vystupují funkce nebo jejich derivace. Diferenciální rovnice jsou pro popis fyzikálních dějů a jevů velmi podstatné; lze se s nimi ale setkat i v dalších nejen technických oborech.

Kondenzátor je připojen se sériově zapojeným ochranným rezistorem o odporu R ke zdroji stejnosměrného napětí U_0 . Schéma zapojení je na obr. 13.



obr. 13

Po zapnutí vypínače začne obvodem procházet elektrický proud. To znamená, že elektricky nabitě částice z elektrod zdroje napětí se budou přenášet na kondenzátor.

Označím-li napětí na kondenzátoru, které chci nalézt, symbolem u , bude okamžitá hodnota elektrického proudu i , dána vztahem

$$(4) \quad i = \frac{U_0 - u}{R}$$

Elektrické napětí se totiž rozdělí na kondenzátor a rezistor. Napětí zdroje se tedy musí rovnat součtu napětí na rezistoru a napětí na kondenzátoru.

Elektrický náboj na kondenzátoru se za dobu Δt zvýší o hodnotu ΔQ , která je dána vztahem

$$(5) \quad \Delta Q = i \cdot \Delta t$$

Za stejnou dobu tedy elektrické napětí na kondenzátoru vzroste o hodnotu Δu , která je dána vztahem

$$(6) \quad \Delta u = \frac{\Delta Q}{C}$$

Chci vyjádřit závislost elektrického napětí na kondenzátoru na čase, a tedy dosadím vztahy (4) a (5) do vztahu (6). Tak dostanu vztah:

$$\Delta u = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{i \cdot \Delta t}{C} = \frac{(U_0 - u) \cdot \Delta t}{RC}. \text{ Tuto rovnici můžu přepsat do tvaru}$$

$$(7) \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{U_0 - u}{RC}.$$

Tyto úvahy budou platit, jen když budu uvažovat dobu Δt velmi malou ve srovnání s dobou nabíjení kondenzátoru. Proto je matematicky přesnější přepsat rovnici (7) do tvaru s diferenciály:

$$(8) \quad \frac{du}{dt} = \frac{U_0 - u}{RC}.$$

Tento krok lze popsat definicí derivace pomocí limity. Další krok lze uskutečnit jen za předpokladu, že si uvědomím, co vlastně zkoumám. Hledám závislost napětí na čase, a tedy budu předpokládat, že tento hledaný průběh bude spojitý. Z fyzikálního hlediska by to byl jinak nesmysl. A protože závislost napětí na čase zkoumám právě z fyzikálního hlediska, mohu symbol diferenciálu $\frac{du}{dt}$ upravovat jako běžný zlomek.

Matematicky tento postup korektní není, ale ve fyzice (právě proto, že sledované veličiny jsou spojité) si ho můžu dovolit.

Rovnici (8) můžu vyřešit metodou zvanou separace proměnných. Pomocí ekvivalentních úprav přepíši rovnici do tvaru $\frac{du}{U_0 - u} = \frac{dt}{RC}$.

Nyní rovnici zintegrujeme. Dostanu tak rovnici ve tvaru $\int \frac{du}{U_0 - u} = \int \frac{dt}{RC}$. Po naznačené integraci získám rovnici

$$(9) \quad -\ln(U_0 - u) = \frac{t}{RC} + K,$$

kde K je libovolná reálná konstanta. Integrační konstanta by měla být na obou stranách rovnice. Konstanty můžu převést na jednu stranu rovnice, a tedy můžu psát konstantu jen na jedné z nich. Já hledám časovou závislost napětí u , a tedy musím z rovnice (9) toto napětí vyjádřit. Nejprve rovnici upravím velmi snadno do tvaru $\ln(U_0 - u) = -\frac{t}{RC} - K$ a nyní převedu tuto rovnici na ekvivalentní tvar k logaritmické

funkci: $U_0 - u = e^{-\frac{t}{RC} - K}$, kde e je Eulerovo číslo, které je zmíněno na začátku této

práce. Teď vyjádřím napětí u : $u = U_0 - e^{-\frac{t}{RC} - K}$.

Pro zjednodušení ještě přepíšu člen s exponenciální funkcí do tvaru vhodnějšího pro další výpočty: $e^{-\frac{t}{RC} - K} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{-K} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot A$, kde A je reálná konstanta. Pokud Eulerovo číslo umocním na konstantu K , je to opět konstanta. Já jsem jí pojmenoval A .

Dostal jsem tedy řešení rovnice (8) ve tvaru

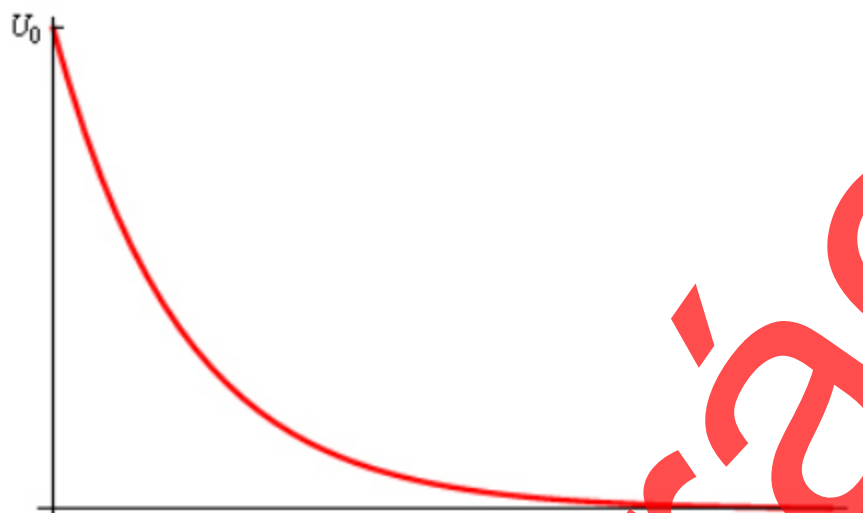
$$(10) \quad u = U_0 - A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Nyní musím vypočítat konstantu A . Počáteční podmínky, ze kterých lze konstantu A vypočítat, jsou jednoduché. Kondenzátor byl nenabitý, tj. $u(0) = 0$. Dosazením této podmínky do rovnice (10) dostaneme:

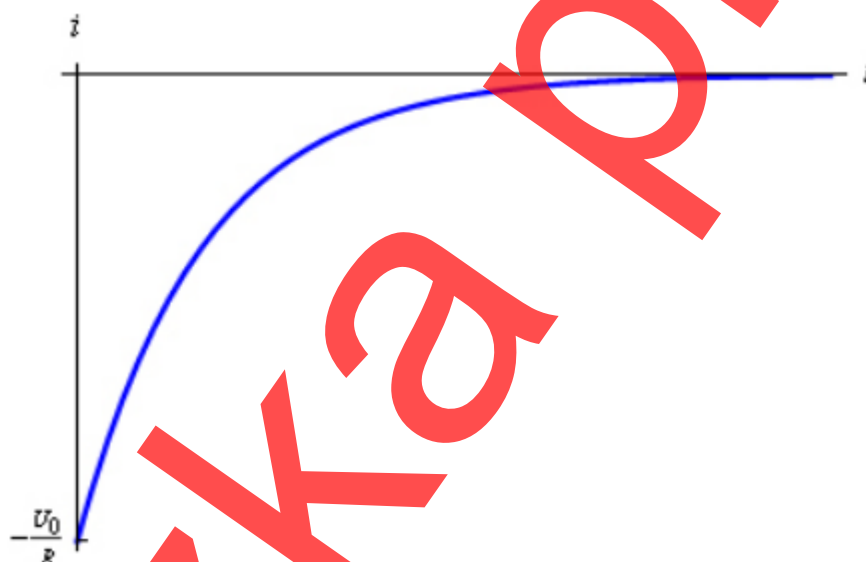
$$0 = U_0 - A \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = U_0 - A \cdot 1 = U_0 - A. \text{ Z této rovnice tedy vyplývá, že } U_0 = A.$$

Můžu tedy vyjádřit konečný vztah z rovnice (10) ve tvaru:

$$(11) \quad u = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



obr. 17

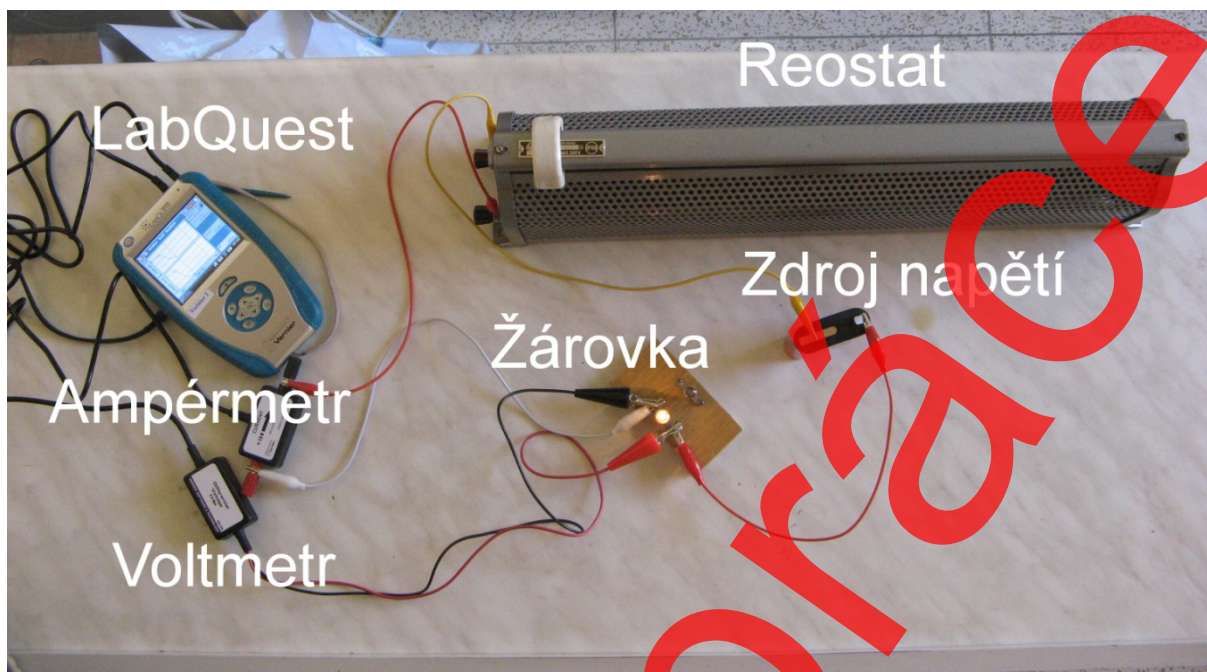


obr. 18

5.2.3 Časové průběhy napětí a proudu nelineárních součástek

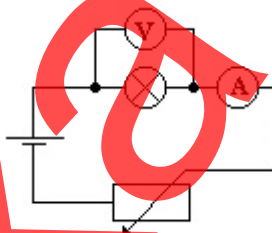
Dalším praktickým pokusem je proměření časových průběhů elektrického napětí a elektrického proudu v žárovce, tzv. úsporné žárovce a Zenerově diodě. Tyto součástky se chovají nelineárně, to znamená, že grafem závislosti elektrického proudu na elektrickém napětí (tzv. voltampérové charakteristice) není přímka, ale obecně nějaká křivka. V tomto případě exponenciála.

Pro tento pokus budu potřebovat zdroj napětí 4,5 V, daný spotřebič (žárovku, diodu, ...), reostat, LabQuest a čidla ampérmetr a voltmetr. Tyto pomůcky jsou zobrazeny na obr. 19.



obr. 19

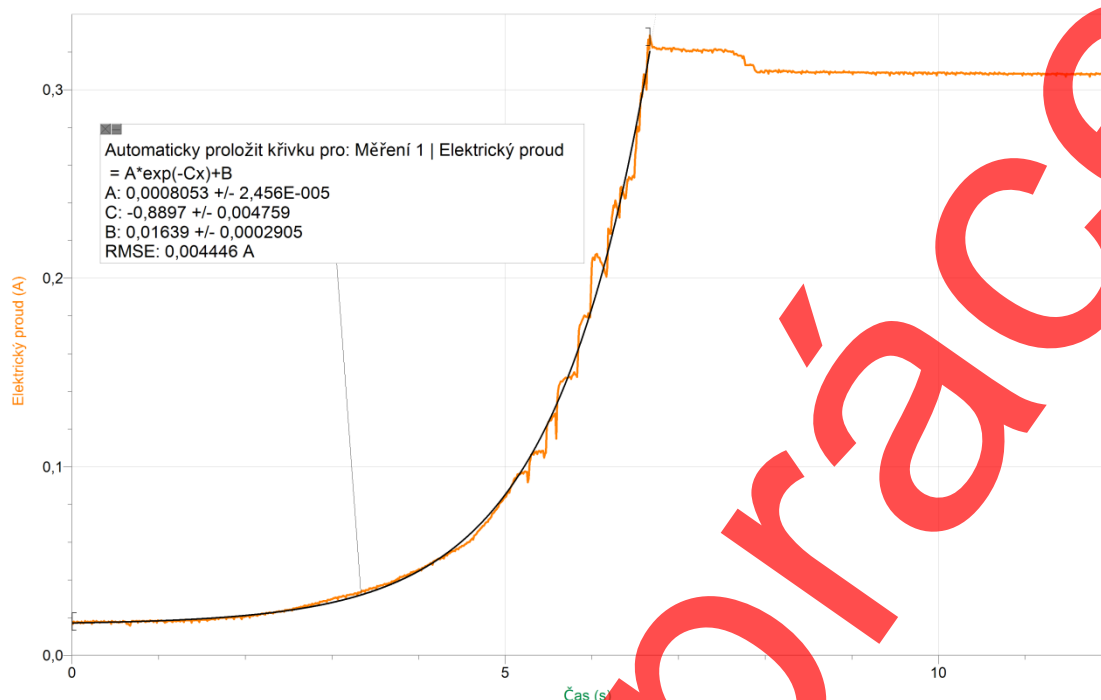
První část pokusu jsem provedl se žárovkou s parametry 6 V a 100 mA. Zapojil jsem obvod podle schématu na obr. 20.



obr. 20

Nastavil jsem LabQuest aby snímal s frekvencí 100 Hz po dobu 12 s a spustil jsem měření. Odpor reostatu jsem se snažil měnit co nejplynuleji, aby bylo měření velmi přesné.

Na obr. 21 je zobrazen časový průběh elektrického proudu. Tato závislost má exponenciální průběh, o čemž svědčí proložená křivka.



obr. 21

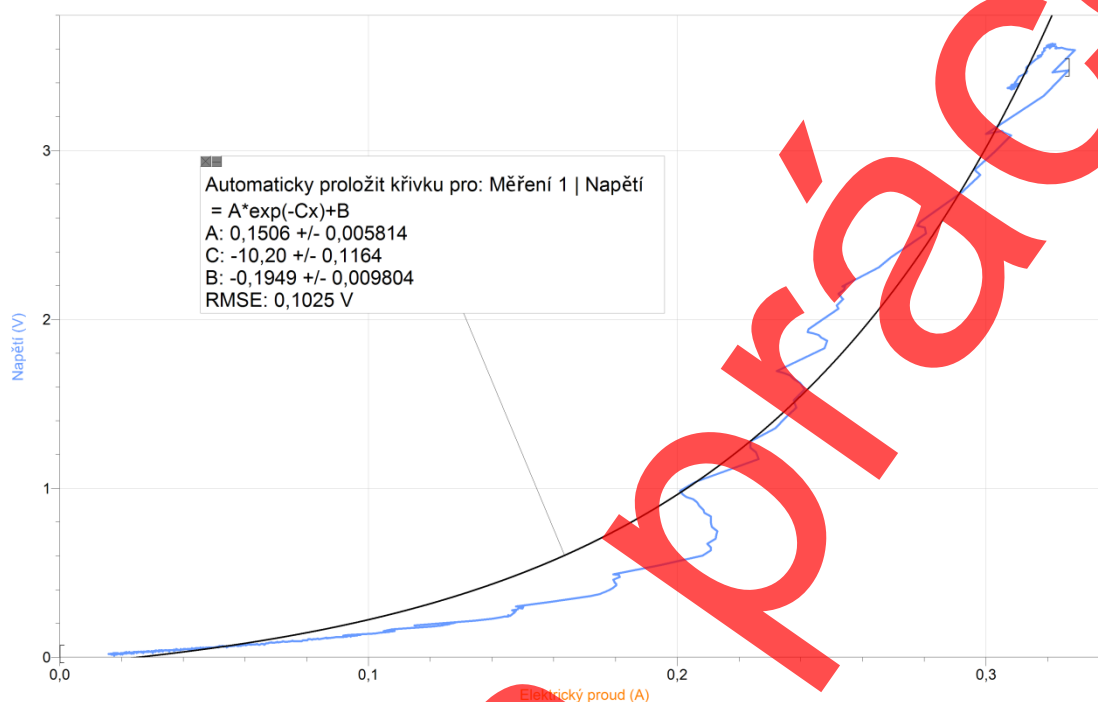
Na obr. 22 je zobrazen časový průběh elektrického napětí. Tato závislost také vyšla exponenciálně.



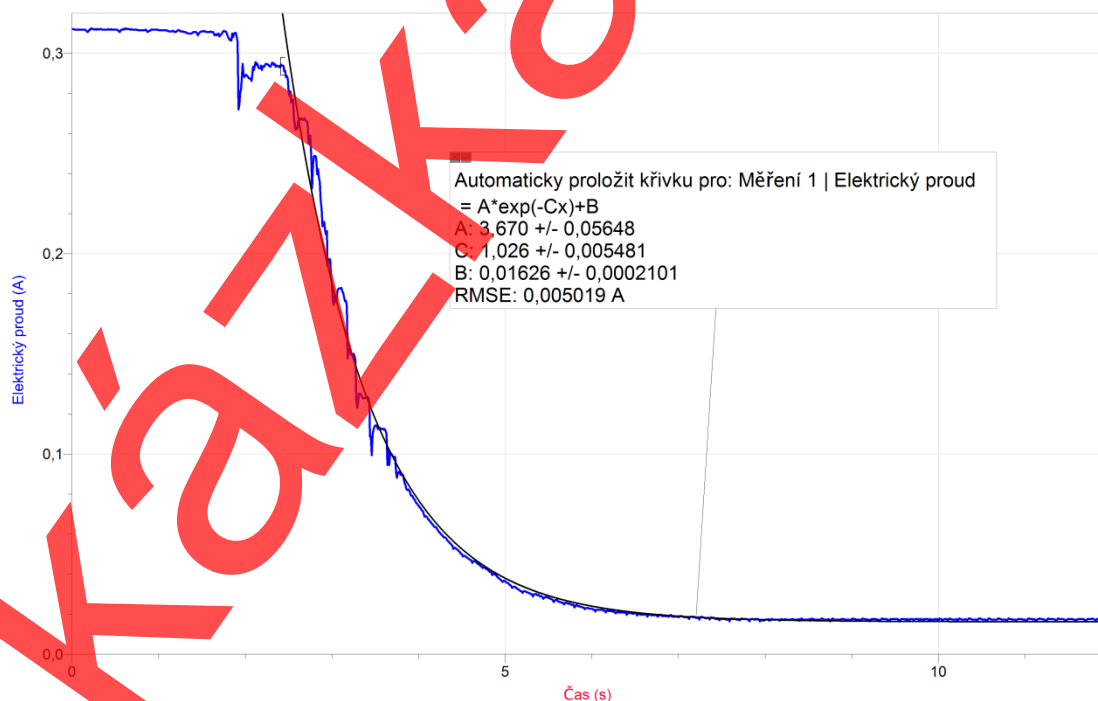
obr. 22

Na obr. 23 je pak zobrazena voltampérová charakteristika žárovky. Tedy závislost elektrického napětí na elektrickém proudu. Jak jsem dříve zmínil, je vidět, že

tato součástka je nelineární, jelikož popsaná charakteristika nevyšla lineární. Výchylky od proložené exponenciály mohly být způsobeny např. nepřesnou a ne právě plynulou změnou odporu reostatu. Přesto vyšel exponenciální nárůst.



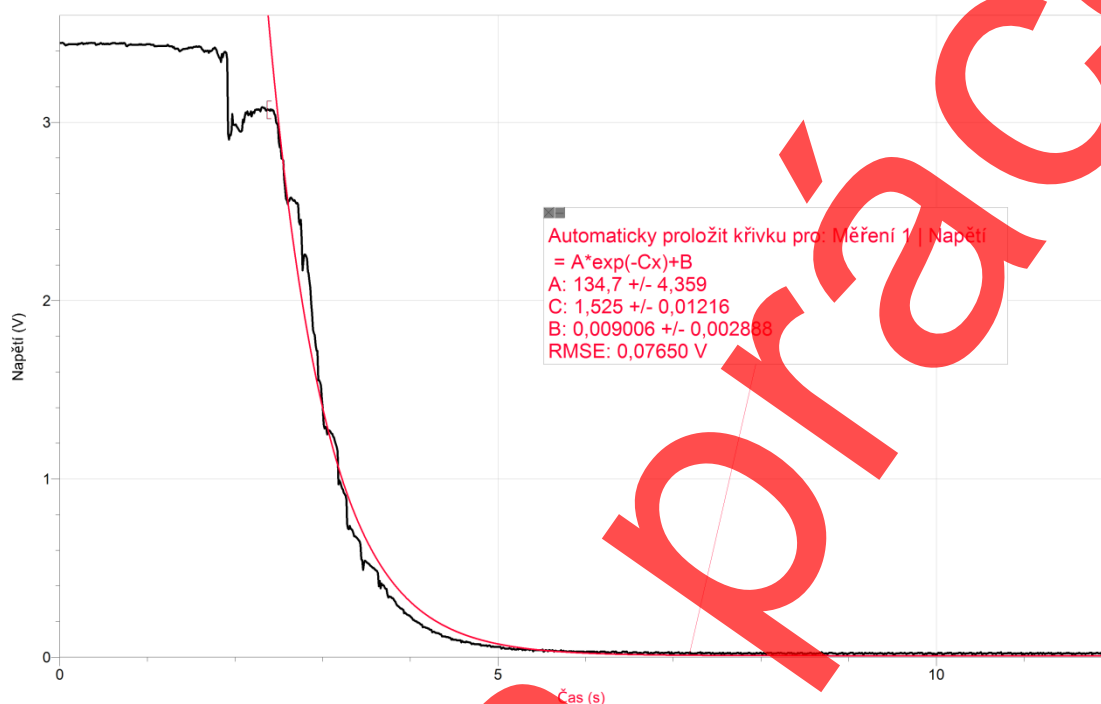
obr. 23



obr. 24

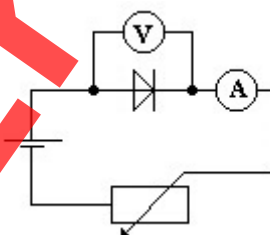
Tyto křivky zaznamenávají nárůst elektrického proudu a elektrického napětí. To znamená, že jsem postupně snižoval odpor reostatu. Když se odpor zvyšuje, závislost

elektrického proudu a elektrického napětí na čase klesá. Tento pokles představují křivky zobrazené na obr. 24 a obr. 25. Časový průběh elektrického proudu je znázorněn na obr. 24 a časový průběh elektrického napětí je zobrazen na obr. 25.



obr. 25

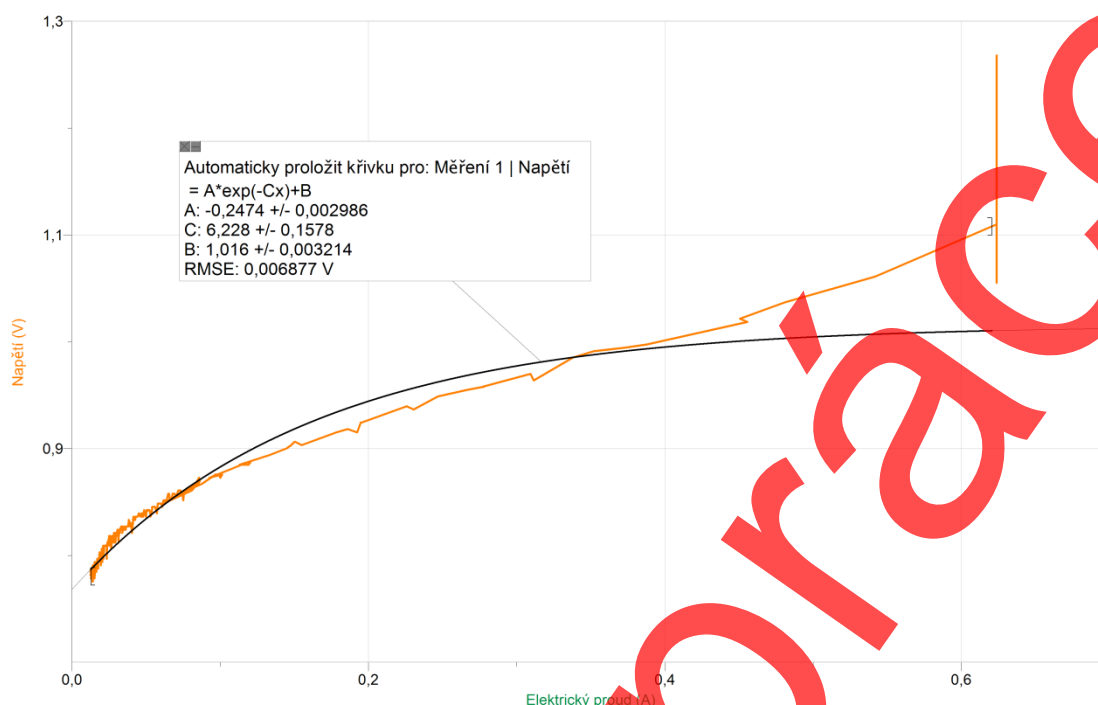
Druhou část pokusu jsem provedl s diodou. Dioda je elektrotechnická součástka, jejímž úkolem v elektrickém obvodu je propouštět elektrický proud pouze jedním směrem. Obvod jsem zapojil podle schématu zobrazeného na obr. 26.



obr. 26

LabQuest jsem nastavil tak, aby snímal hodnoty s frekvencí 100 Hz po dobu 12 s a spustil jsem měření.

Na obr. 27 je zobrazen časový průběh elektrického proudu při zvyšování odporu reostatu.



obr. 33

Z právě uvedených grafů je vidět, že diody mají ve své pracovní oblasti strmější nárůst hodnot elektrického proudu, než je tomu u běžné žárovky.

5.3 Měření s „luxmetrem“

5.3.1 Světlo procházející různým počtem papírů

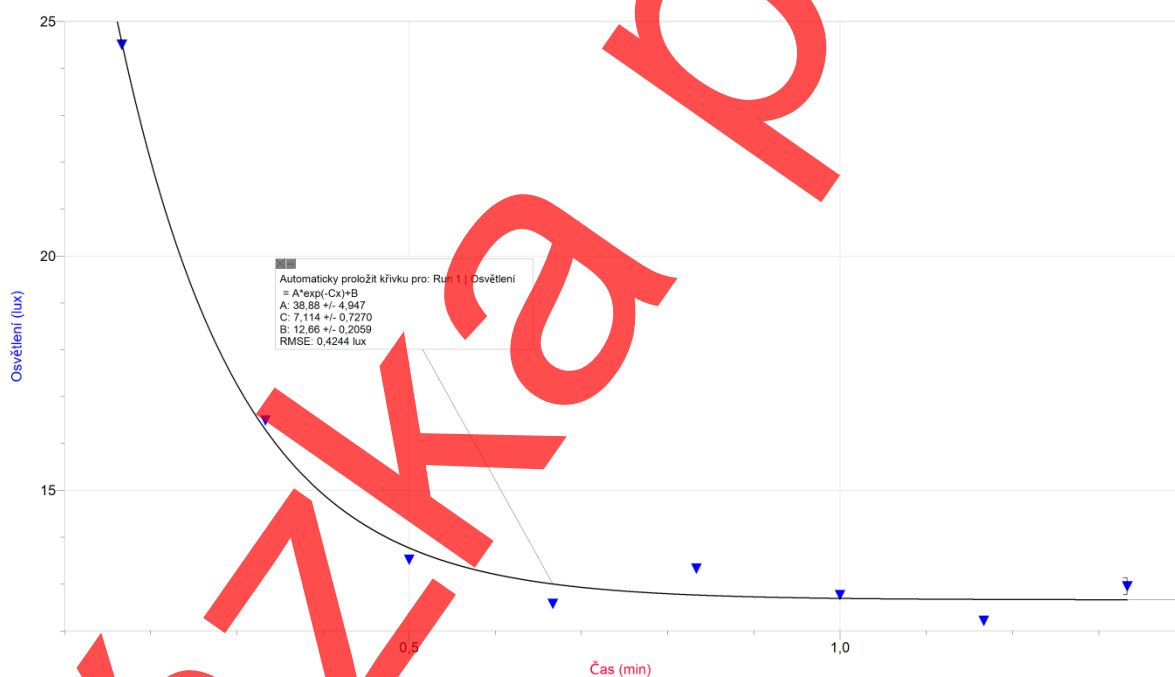
Další měření, které jsem udělal, bylo založeno na průchodu světla skrz různý počet papírů. K tomuto pokusu jsem potřeboval zdroj světla (lampičku), kancelářské bílé papíry, Light sensor (luxmetr, čidlo měřící osvětlení) typu LS-BTA od firmy Vernier, který je zobrazen na obr. 34, a rozhraní LabQuest.



obr. 34

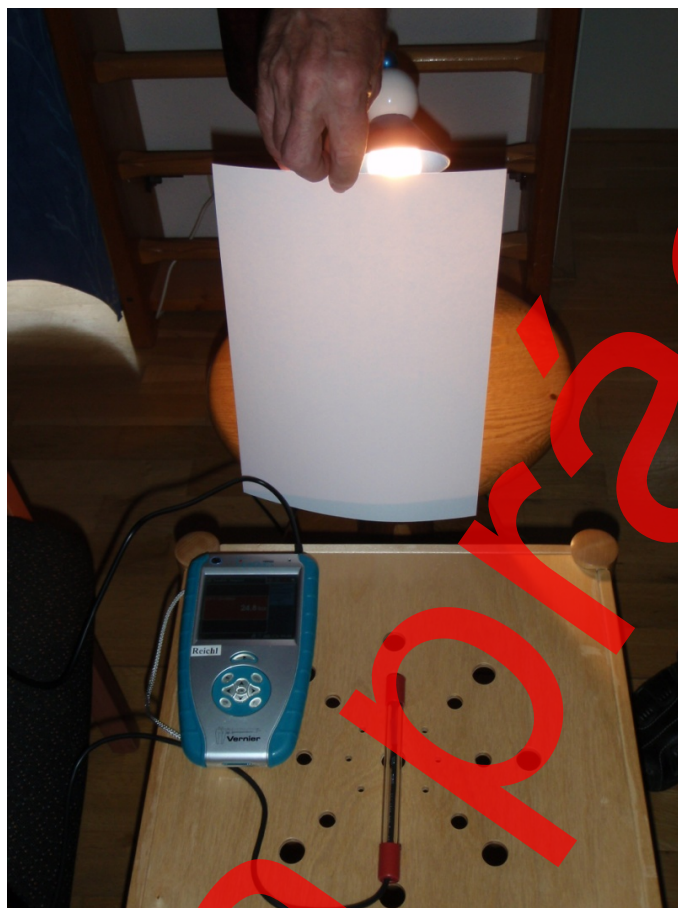
K měřicímu přístroji LabQuest jsem připojil čidlo, které zaznamenává osvětlení v luxech. Čidlo jsem namířil na zdroj světla, v mém případě lampičku, a spustil jsem měření. Záznam dat jsem nastavil na hodnotu jednou za 10 sekund. Během prvních 10

sekund jsem vzal první papír a vložil jsem ho mezi zdroj světla a čidlo. Po každých deseti sekundách jsem pak přidával vždy jeden další papír, dokud papíry nepropustily žádné světlo. Po devíti papírech, které byly mezi zdrojem světla a čidlem, se už měřené hodnoty neměnily, a proto jsem ukončil zaznamenávání dat. Naměřené hodnoty jsem vložil do grafu. Na vodorovné ose je zobrazen čas a na svislé ose je zobrazena intenzita osvětlení. Čas nás v tomto případě nezajímá, ale naměřené hodnoty osvětlení jsem musel vložit po stejných intervalech; každý časový interval přitom znamená jeden přidávaný papír. Proto údaje v sekundách na vodorovné ose vlastně určují počet papírů mezi zdrojem světla a čidlem. Když v právě popsaném grafu, který je zobrazen na obr. 35, proložím pomocí programu LoggerPro naměřená data exponenciální funkcí se základem e , vyjde mi křivka bez větších odchylek od naměřených dat.



obr. 35

Pro lepší představu jsem pořídil fotografii z postupu práce během tohoto experimentu. Tato fotografie je zobrazena na obr. 36.



obr. 36

5.3.2 Intenzita osvětlení žárovek

Dalším z praktických pokusů je proměřování osvětlení jednoho z běžně používaných zdrojů světla - kompaktní zářivky.

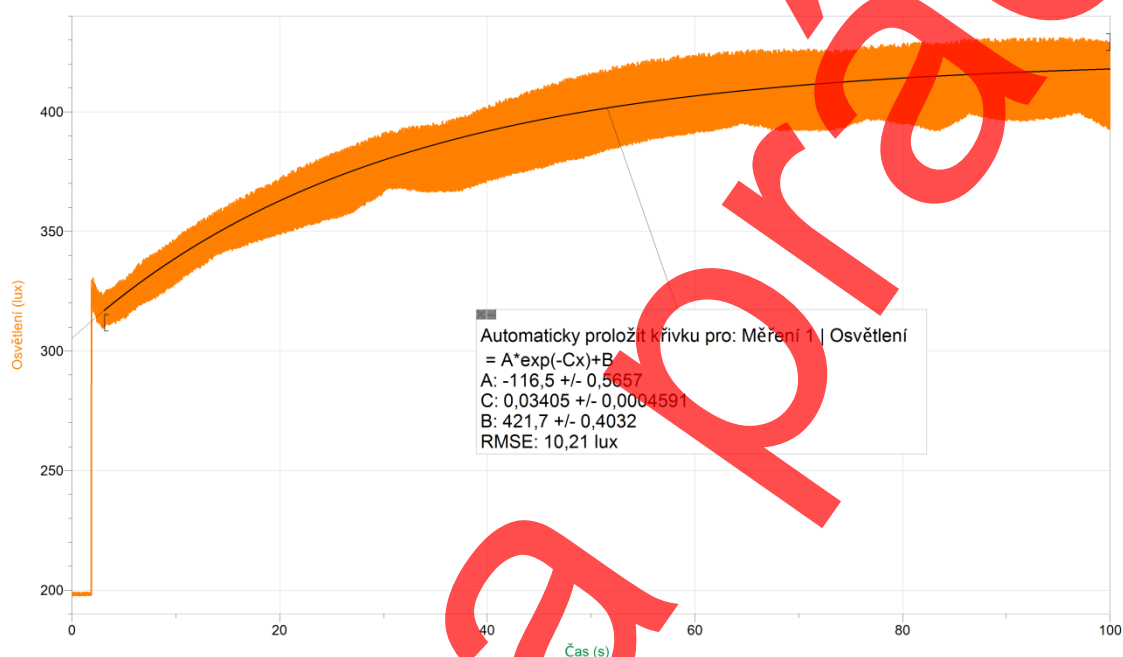
Pod názvem kompaktní zářivka je těžké si něco představit, ale jedná se o tzv. úspornou žárovku; tímto termínem je běžně kompaktní zářivka nesprávně označována. Kompaktní zářivka je elektrický zdroj světla pracující na shodném principu jako lineární zářivka. Kompaktní zářivky jsou ale navrženy tak, aby zejména svým světelným výkonem nahradily běžné žárovky.

Kompaktní zářivky jsou opatřeny patičí jako běžné žárovky, jejich rozměry ale oproti žárovkám bývají často trochu větší. Mívají delší životnost – od 6000 hodin do 16 000 hodin. Kompaktní zářivky mají přibližně o 80 % menší spotřebu energie oproti klasické žárovce při stejném světelném toku. Měrný výkon kompaktních zářivek se pohybuje od $50 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$ do $100 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$.

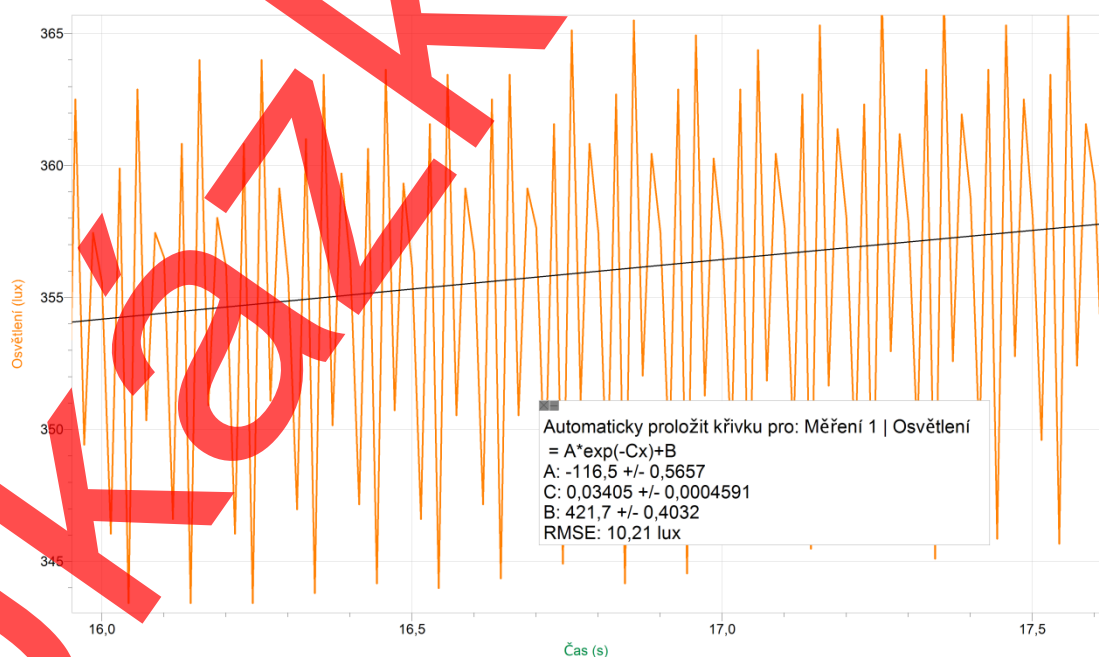
U moderních kompaktních zářivek je start téměř okamžitý, ale náběh na plný světelný výkon chvíli trvá. Tento náběh by měl mít exponenciální nárůst a právě tímto se budu zabývat.

První pokus jsem dělal s kompaktní zářivkou o parametrech 230 V a 15 W - viz obr. 38.

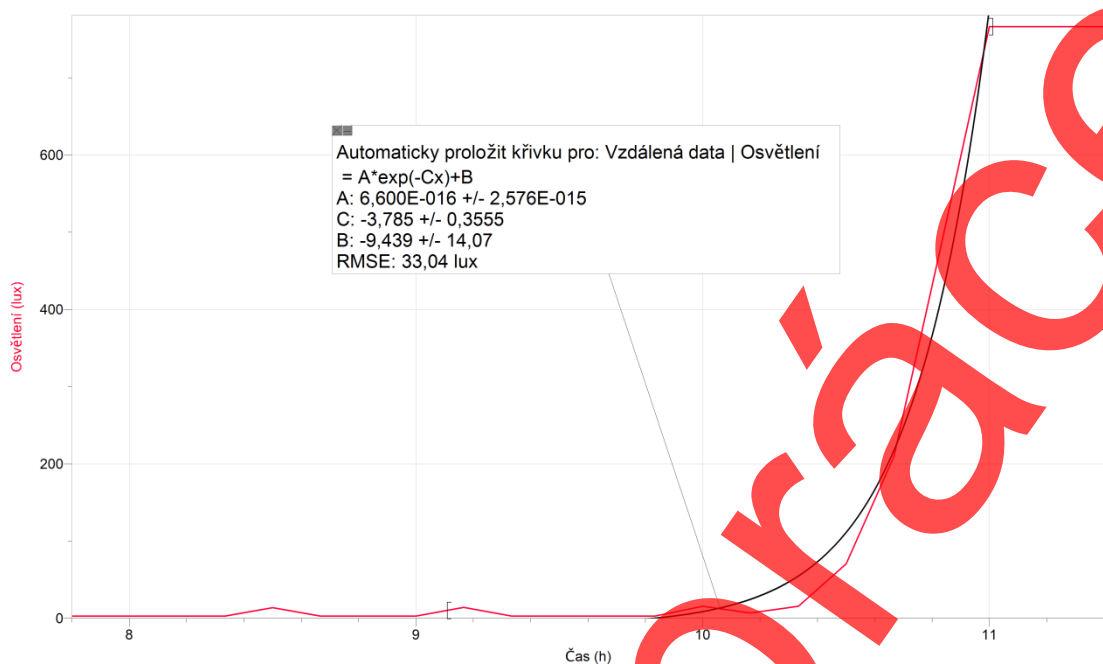
Na LabQuestu jsem nastavil vzorkování s frekvencí 70 Hz po dobu 100 s. V grafu na obr. 39 je vidět, jak se zářivka postupně rozsvěcela. Z grafu je také zřejmé, že se kompaktní zářivka rozsvěcela tak, že osvětlení v závislosti na čase exponenciálně narůstalo.



obr. 39



obr. 40



obr. 45

5.4 Měření se sonarem

5.4.1 Tlumené kmitání tělesa zavěšeného na pružině

Kmitání neboli oscilace je druh pohybu, který se periodicky opakuje. Příklady kmitavých pohybů jsou např. pulsování srdce, kyvadlo v pendlovkách, ale také všechny hudební nástroje nebo vysílání a příjem signálů rozhlasu a televize.

Kmitající těleso se nazývá oscilátor. Existují dva „speciální“ typy mechanických oscilátorů. Prvním typem jsou kyvadla a druhým je těleso zavěšené na pružině. Já se budu zabývat tělesem zavěšeného na pružině.

Ideální oscilátor by byl netlumený. To znamená, že se žádná část mechanické energie nemění na práci nutnou k překonání odporových sil. Proto by se takový oscilátor nikdy nezastavil. V praxi se ale setkáme výhradně s oscilátorem tlumeným. Při jeho kmitání se část mechanické energie kmitů přeměňuje na jinou formu - většinou na práci nutnou na překonání třecích a odporových sil. Pokud takový oscilátor rozkmitáme a nebudeme na něj dále nijak silově působit, po určité době se zastaví.

Pomůcky k tomuto pokusu jsou stojan, těleso na pružině a sonar Motion Detector typu MD-BTD, čidlo od firmy Vernier. Čidlo je zobrazeno na obr. 46.



obr. 46

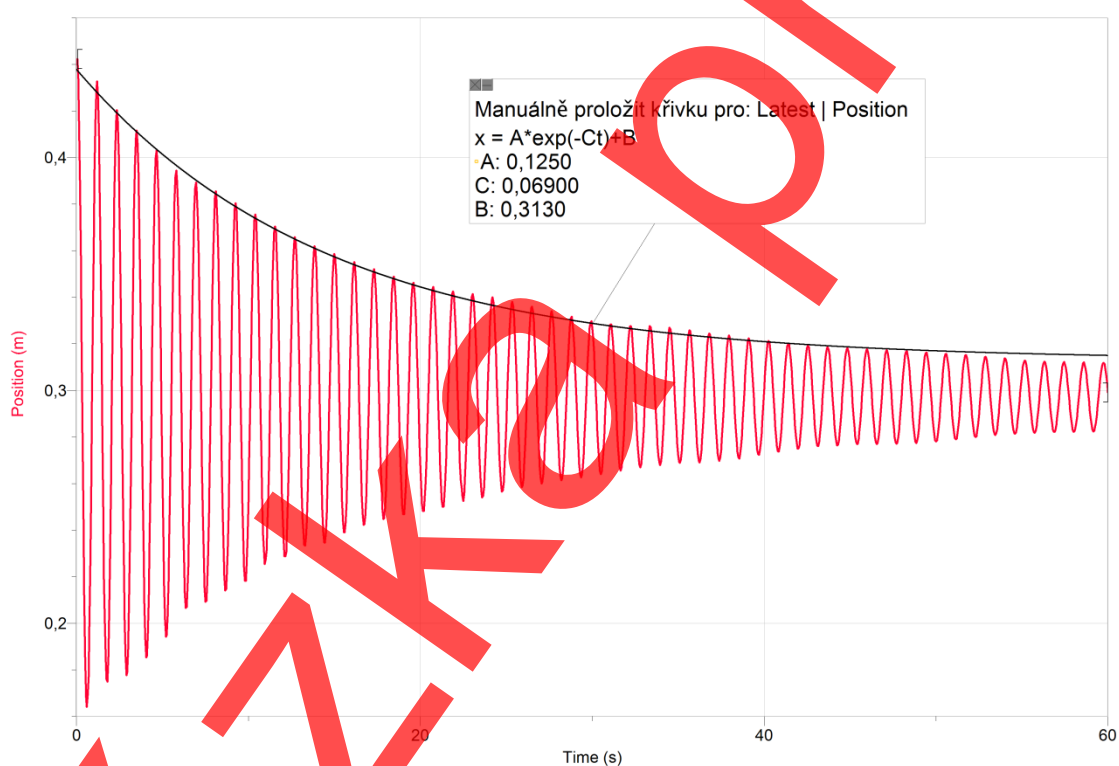
Toto čidlo polohy a pohybu využívá ultrazvuk k měření vzdálenosti mezi čidlem a pozorovaným předmětem. Sonar vyšle ultrazvukový pulz a měří dobu, za kterou se k němu tento pulz po odrazu od pozorovaného předmětu vrátí. Analýzou těchto pulzů pak vypočítá vzdálenost, velikost rychlosti a velikost zrychlení pozorovaného tělesa. Všechny pomůcky nutné k tomuto experimentu jsou zobrazeny na obr. 47.



obr. 47

Jako těleso zavěšené na pružině jsem využil dekoraci, kterou lze koupit v běžném obchodě s hračkami. Je to dřevěný pavouk zavěšený na pružině. Nohy pavouka jsem ohnul tak, aby co nejméně vyčnívaly přes okraj pavouka. Velmi členitý povrch nohou by totiž způsoboval nežádoucí odrazy ultrazvukových impulsů, a tak výrazně zkresloval měřená data. Kvůli jednoznačně definovanému místu, kde se budou od pavouka odrážet ultrazvukové impulsy, jsem na spodní část pavouka přilepil čtverec tvrdého papíru.

V LabQuestu jsem nastavil frekvenci vzorkování na 20 Hz a dobu měření jsem nastavil na 60 s. Rozkmital jsem těleso na pružině a spustil jsem měření. Na obr. 48 je zobrazen graf závislosti okamžité výchylky pohybujícího se pavouka na čase.



obr. 48

Tento pokus mě v souvislosti s mojí prací zaujal proto, že útlum způsobený především odporem prostředí je exponenciální, tj. amplituda kmitání má exponenciální pokles. Na obrázku 49 je vidět, že maxima (resp. minima) této křivky tvoří exponenciálu.

Pokud na svislou osu grafu zobrazím velikost rychlosti, výsledná křivka (tj. závislost velikosti rychlosti na čase) bude vypadat téměř totožně. Tato závislost je zobrazena na obr. 49. Velikost rychlosti je v tomto grafu jak kladná, tak i záporná. To znamená, že těleso zavěšené na pružině se pohybuje oběma směry (tj. nahoru i dolů).

6. Závěr

Dějů s exponenciálním průběhem je velké množství, ale já vybral jen několik z nich. Snažil jsem se vybírat ty děje, které mi přišli nejzajímavější a s kterými se setkáme v běžném životě každý den. Pokusy jako je nabíjení a vybíjení kondenzátorů jsou známé, a proto mě nepřekvapil jejich výsledek. Naopak pokusy spojené s východem a západem slunce nebo průchod světla přes různý počet papírů byly pro mě velmi zajímavé. Po zobrazení naměřených dat zejména u těchto experimentů jsem byl příjemně překvapen: pokusy jsem si vymyslel sám a potěšilo mě, že proložená funkce byla i v tomto případě exponenciální funkce. Jediné měření z těch zrealizovaných, které se nepodařilo, je měření teploty při východu a západu slunce. Myslím si, že závislost teploty na čase by měla vyjít také exponenciální, ale nemám to experimentálně ověřeno. Abych tuto závislost skutečně přesně ověřil, musel bych zrealizovat jiný způsob upevnění teploměru. Svou roli v nepřesnosti měření sehrálo patrně proudění vzduchu a sálání tepla ze stěn domu, které byly sluncem během dne velmi prohřáté.

V tomto měření je vidět, jak je matematika propojena nejen s fyzikou, ale i s biologií, chemií a dalšími obory. Pokud má práce poslouží dalším žákům k rozšíření a zejména k vzájemnému propojení poznatků z matematiky a fyziky, budu rád.

7. Zdroje

- SODOMKA, LUBOMÍR. *Politika věda náboženství - Chovají se přírodovědné a technické děje exponenciálně?.* (PVN) [online]. 2011 [cit. 2012-05-08]. Dostupné z: <http://sodomkalubomir.blog.cz/1104/chovaji-se-prirodovedne-a-technicke-deje-exponencialne>
- REICHL, Jaroslav, SKALA Jaroslav. Časové průběhy napětí a proudu při nabíjení a vybíjení kondenzátoru. *Metodický portál: Články* [online]. 23. 08. 2011, [cit. 2012-05-07]. Dostupný z WWW: <<http://clanky.rvp.cz/clanek/c/G/13107/CASOVE-PRUBEHY-NAPETI-A-PROUDU-PRI-NABIJENI-A-VYBIJENI-KONDENZATORU.html>>. ISSN 1802-4785.
- RADOVÁ, J., P DVOŘÁK a J. MÁLEK. *Finanční matematika pro každého: 6. aktualizované vydání.* Praha 7: GRADA Publishing, a.s., 2007. ISBN 978-80-247-2233-7.
- SIKOROVÁ, Renata. MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA UNIVERZITA KARLOVA. *e: Diplomová práce*
- REICHL, Jaroslav, *Aplikovaná matematika, Materiály pro výuku matematiky* [online]. 2006, [cit. 2013-03-02]. Dostupný z WWW: <http://jreichl.com/matematika/vyuka/texty/aplikovana_matematika.pdf>
- <http://cs.wikipedia.org/>
- <http://fyzika.jreichl.com/>