STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA SDĚLOVACÍ TECHNIKY

110 00 Praha 1, Panská 856/3 URL: www.panska.cz

☎ 221 002 111, 🖹 221 002 666 e-Mail: sekretariat@panska.cz

MATURITNÍ ZKOUŠKA

PRAKTICKÁ ZKOUŠKA Z ODBORNÝCH PŘEDMĚTŮ

Sbírka řešených úloh z fyziky

Studijní obor: **78-42-M/001**
Technické lyceum

Třída: **4.L**

Školní rok: **2008/2009**

Roman Kačírek

jméno a příjmení autora

Anotace

Práce obsahuje zadání netradičních úloh z fyziky spolu s podrobně vysvětleným řešením a správnými výsledky. Cílem práce je motivovat studenty ke studiu fyziky. Úlohy jsou řazeny dle jednotlivých témat a v rámci nich dle námětů, jichž se úloha týká.

This project is consisted of unconventional assignments of tasks in physics with detailed solutions and correct results. The goal of the work is to motivate students to studying physics. Tasks are lined up according to the topics and by one topic they are lined up by the subjects that have something to do with the tasks.

Úvod

Prvotním cílem této sbírky je, aby posloužila autorovi jako kvalitní součást k dlouhodobé maturitní práci na střední škole, kterou autor navštěvuje.

Mimo jiné je tato sbírka příkladů vhodná především pro studenty gymnázií a středních škol, kde patří fyzika mezi nadprůměrně důležité předměty v náplni učiva. To ovšem neomezuje nikoho, aby si zde našel inspiraci pro svou tvorbu nebo jiné potřeby.

Naleznete zde úlohy z učiva fyziky výhradně na téma mechanika. Úlohy jsou seřazeny systematicky, podle standardního průběhu studia fyziky, nicméně ve svých podtématech nejsou seřazeny dle náročnosti. Úlohy obsahují zadání, řešení a správné výsledky (označeny jako „SV" pod každým zadáním úlohy). V každém menším tematickém celku jsou skupiny úloh na společné téma, jako např. Gravitační pole – *Nezbední studenti*. Důvod členění je zřejmý. Čtenář si může vybrat téma, které je pro něho příjemné, aby lépe a s radostí pochopil problematiku příslušné kapitoly fyziky. Pokud se vybraná témata netýkají Vašich zájmů, nebo jsou Vám dokonce přímo odporná, pak můžete zabrousit do podskupiny *Ostatní*.

Z velké části jsou úlohy navrženy tak, aby čtenář byl donucen se zamyslet, zda fyzikální veličiny a hodnoty, které mu jsou předloženy, vypovídají o řešení a počtu řešení. Zjednodušeně pro představu: Jedu na kole nakoupit noviny k čerpací stanici. Je dána dráha, velikost úhlové rychlosti kol a jejich poloměr. To vypovídá o čase, za který se dostanu k pumpě.

Výsledky jsou zaokrouhlovány tak, aby čtenář poznal, že jsou fyzikálně správné, ale také tak, aby odpovídaly smyslu fyziky jako takové. Tzn., že při počítání dráhy Praha – Tachov nelze očekávat, že výsledek bude zaokrouhlen na jednotky milimetrů. Proto se může stát, že čtenářovy výsledky budou přesnější než zde udané, nicméně fyzikální podstatou se lišit nebudou. A to je možné si ověřit v řešeních úloh.

Pravidla pro počítání s platných cifer a další, na základě nichž se správně zaokrouhlují hodnoty fyzikálních veličin, nejsou akceptována. Takové zaokrouhlení by bylo pro čtenáře matoucí, neboť by se výsledky mohly od výsledků čtenáře velmi lišit.

Budiž tato sbírka přinese plno užitku všem, kteří ji použijí.

1. KINEMATIKA

1.a – Vše s auty

1.a.1 – Předjíždění

Škoda Forman na dálnici předjíždí autobus. Forman jede stálou rychlostí o velikosti 116 $km.h^{-1}$ a autobus si udržuje svých 80 $km.h^{-1}$. Proces předjíždění trvá 1,4 s. Jak dlouhý je autobus, měří-li Forman 4 m? Kolik metrů při předjíždění ujede Forman? Za jakou dobu se zařadí před autobus, má-li mít bezpečnou rezervu 5 m?

SV: 10 m; 45,11 m; 0,5 s

1.a.2 – Šílený taxikář

Taxikář je na cestě domů a spěchá za svou manželkou. Blíží se ke světelným signálům rychlostí o velikosti 50 $km.h^{-1}$. 50 m před semafory vidí, že se rozsvítí oranžová. Začne prudce rovnoměrně zrychlovat o velikosti 2 $m.s^{-2}$, ale po pěti sekundách se rozsvítí červená, a tak taxikář prudce zabrzdí a dojede těsně ke světlům. Na jaké dráze taxikář zrychluje? Bude mít zrychlení při brzdění větší nebo menší absolutní hodnotu než při zrychlování na oranžovou? Jak velké by bylo zrychlení při brzdění, kdyby začal rovnoměrně brzdit už na oranžovou?

SV: 25 m; větší; 1,93 $m.s^{-2}$

1.b – Křeček

1.b.1 – V kolečku

Křeček běží konstantní rychlostí o velikosti 1 $km.h^{-1}$ v křeččím kolečku 30 minut v kuse, přičemž se kolečko během této doby otočilo právě 1000 krát. Jak velký je křeček, je-li průměr kolečka dvakrát větší než on? Jak velkou rychlostí se křeček pohybuje vůči své přepravce?

SV: 8 cm; 0 $m.s^{-1}$

1.b.2 – Honička

Křečka honí divá zvěř. Křeček rychle vystartuje a během nepatrného okamžiku dosáhne rychlosti o stálé velikosti 3,6 $km.h^{-1}$ a utíká 15 metrů do úkrytu. Divá zvěř vystartuje ve stejný moment jako křeček z klidu a rovnoměrně zrychluje se zrychlením o velikosti 2 $m.s^{-2}$. Po dosažení rychlosti 8 $m.s^{-1}$ se velikost zrychlení sníží na 1 $m.s^{-2}$ a s tímto zrychlením běží na dráze 8 m. Následně si udržuje tuto svojí maximální rychlost, která mu musí stačit na dráhu 96 m, kde už čeká křečkův úkryt. Jak velká je maximální rychlost divoké zvěře? Stihne křeček utéct zvěři do úkrytu? O kolik?

SV: 12 $\frac{m}{s}$; ano; o 1 s

2. DYNAMIKA

2.a – Madonna

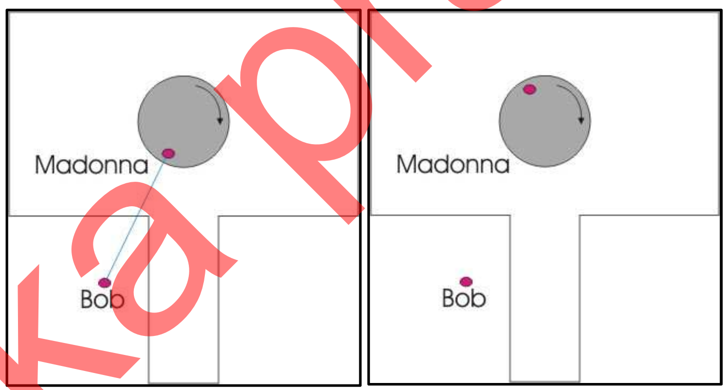
2.a.1 – *Music Inferno*

Na *Confessions Tour* při písni *Music Inferno* se dva tanečníci na kolečkových bruslích rozjedou proti sobě, srazí se a chytnou se za ruce. Jedou chvilku spolu a pak do nich narazí rychlostí o velikosti 5 $\frac{m}{s}$ další tanečník, který je podpoří ve směru jízdy. Výsledná velikost rychlosti je 1,9 $\frac{m}{s}$. První tanečník (22 let, 180 cm, 70 kg) se z klidu rozjížděl na dráze 5 m se zrychlením o velikosti 1 $\frac{m}{s^2}$ a druhý (27 let, 183 cm, 80 kg) na dráze 4 m se zrychlením o velikosti 2 $\frac{m}{s^2}$. Doplňte chybějící informaci o třetím tanečníkovi (25 let, 170 cm, ? kg).

SV: 61 kg

2.a.2 – *Drowned World Tour*

V samotném závěru tohoto turné popová královna zpívá na obrovské gramofonové desce, která se s ní otáčí (*viz obrázek 2 – Madonna a Bob jakožto růžové tečky*). Fanda Bob ji fotí v pravidelném intervalu 10 s, kdy stojí přesně naproti ní, v tyto okamžiky (*viz obrázek 1*) ji má totiž nejblíže k sobě (*naznačuje modrá úsečka na obrázku 1*). Střed gramofonové desky je od Boba vzdálen 10 m. Pětačtyřiceti kilogramová Madonna cítí odstředivou sílu 35,5 N. Jak je daleko Madonna od Boba, když jsou zrovna nejblíže k sobě?



Obrázek 2 Obrázek 1

SV: 8 m

2.b - Zatáčky

2.b.1 – Kruhový objezd

Blázen vjel na kruhový objezd o poloměru 9 m a jezdí dokola a zrychluje. Při jak veliké rychlosti se už auto utrhne a dostane smyk? Součinitel smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou je 0,64.

SV: 40,6 km.h^{-1}

2.b.2 – Highspeedtest race

Existují speciální dráhy pro závody aut s velmi vysokými maximálními. Mají tvar nuly. Jejich obě zatáčky mají stejný poloměr a obě jsou nakloněny pod stejným úhlem vůči zemi. O jak velký úhel se jedná, je-li odstředivá síla aut 1,5 krát menší než síla tíhová?

SV: 33,7°

2.c – Na pouti

2.c.1 – Velký Matěj
Velký Matěj se přetahoval s malými dětmi lanem. Matěj působil silou 500 N, zatímco tři malé děti (každé o hmotnosti 40 kg) se ho snažily přetlačit tím, že každé dítě působilo silou 100 N. Součinitel smykového tření mezi botami malých dětí a podlahou je 0,3. V případě Matěje je f tak velký, že nelze uvažovat, že by se Matěj ani v jednom případě posouval po podlaze. O jak velké síle se bude pohybovat lano, když zanedbáme tření? A když tření nezanedbáme?

SV: 200 N; 0 N

2.c.2 – Krasobruslař
V malém stadionu na pouti je jednodenní překvapení. Krasobruslař zdarma veřejnosti představuje své dovednosti na ploše pokryté ledem. Zrovna projíždí zatáčkou o poloměru 10 m tak, že jeho odstředivá síla je velikostně rovna jeho tíhové síle. Jak velkou rychlostí jede? Za jak dlouho zatáčkou projede, jestliže tanečník svým pohybem opíše pouze $\frac{\pi}{3}$ zatáčky? Jak je velký tanečník, když světlo, které je v jednom okamžiku přímo nad ním ho osvítí tak, že stín na ledě je 1,4 m dlouhý? Pro tento příklad počítejte s g = 10 m.s^{-2}.

SV: 10 m.s^{-1}; 1 s; 2 m

2.c.3 – Válečky
Ivana míří puškou na válečky. Tvrdí, že když namíří naprosto přesně, v naprostém klidu a nebude let kulky rušit vítr, pak jediné, co může nepatrně kulku ovlivnit je její tíhová síla. Má zcela pravdu?

SV: ne

3. MECHANICKÁ PRÁCE A ENERGIE

3.a – Na vesnici

3.a.1 – Hnůj
Stokilogramová Zdislava kydá hnůj. Hází ho vidlemi 1 m nad zem do vozíku. Vozík je o hmotnosti 180 kg a má kola o průměru 1 m. Hnoje nahází celkem 200 kg. Když dohází, zapřáhne pár dvěstěkilogramových volů, který ho odveze rychlostí o konstantní velikosti za malý kravín na kopec, který je dlouhý 1500 m a je o stoupání 10°. Úhel mezi lanem a čelem vozu je 60°. Jak velkou práci vykonala Zdislava? Jak velkou práci vykonal jeden z volů? Počítejte nejprve se zanedbáním tření, poté tření uvažujte. Rameno valivého odporu je 3,5 cm.

SV: 2 kJ; 0,975 MJ; 1,377 MJ

3.a.2 – Dělníci na lanech
Papáčkovi staví nový dům, ale dělníci se místo práce baví. Jeden se zavěsil na lano a hodlá vyskočit z okna a houpat se. Když se po výskoku dostal do svislé polohy, škrtnul zadkem o zem v rychlosti $20\,\frac{km}{h}$. Z jaké výšky vyskočil?

SV: 1,6 m

3.b – Vše s auty

3.b.1 – Felicia vs. Octavia
Po dálnici jedou dva automobily stálou rychlostí. Škoda Felicia o výkonu 50 kW hnaná silou motoru 1,25 kN a Škoda Octavia o výkonu 85 kW hnaná silou 1,55 kN. Které z aut je rychlejší a o kolik?

SV: Škoda Octavia; o 53 km.h^{-1}

3.b.2 – Výtah
Jak velký příkon musel vyvinout motor výtahu s účinností 80%, který po dobu 30 s zvedal staré, těžké Volvo o hmotnosti 1,5 tuny? Auto se převáželo z 1. do 4. patra, přičemž patro je vysoké 3 m.

SV: 5,51 kW

3.b.3 – Nová kola

Auto pana Dušana má prasklé pneumatiky, a tak se pan Dušan s manželkou rozhodli koupit nová letní kola již s většími ráfky a novými pneumatikami, které jsou opět 4 '' tlusté jako jeho předchozí pneumatiky. Nejdříve ale oba museli dotlačit auto do servisu, který je blízko vzdálený a cesta tam je rovinná. Pan Dušan tlačil auto zezadu, zatímco jeho manželka upevnila provaz dlouhý 1 m vpředu auta za pevný bod, který je 30 cm nad zemí, opačný konec provazu držela ve výšce 80 cm nad zemí a táhla za provaz. Manželka pana Dušana působila na provaz silou o velikosti 500 N, ale velikost složky této síly využité pro pohyb auta je pouze poloviční ve srovnání s jejím manželem, který vydal 600 kJ energie pro pohyb auta. Jak dlouho jim trvala cesta do servisu, jestliže se kola otočila 228krát a otáčela se s periodou 8 s? Jak velkou rychlostí tlačili auto? Jak velké ráfky mají nová kola auta pana Dušana, jestliže při cestě ze servisu mu policie naměřila velikost rychlosti 55 $km.h^{-1}$ na místě, kde tachometr auta ukazoval 50 $km.h^{-1}$?

SV: 30 min a 24 s; 0,38 $\frac{m}{s}$; 17 ''

4. GRAVITAČNÍ POLE

4.a – Nezbední studenti

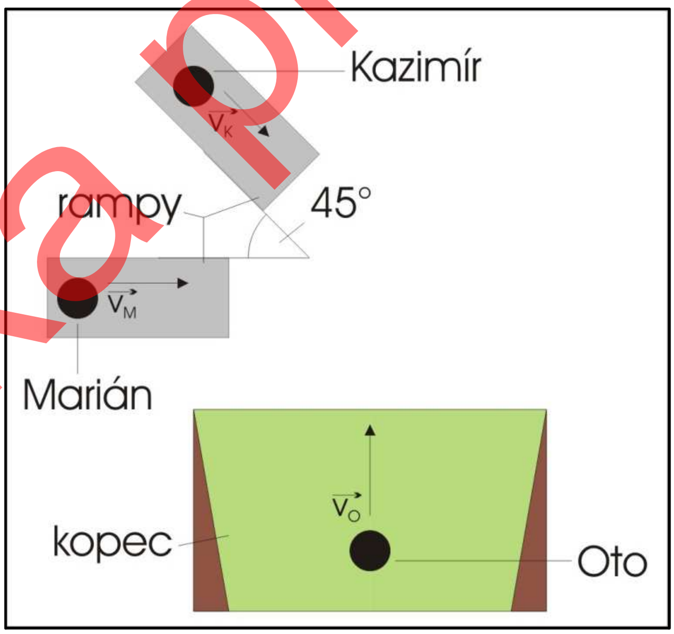
4.a.1 – Tlustá Dorota a hubená Gizela

Studentky Dorota a Gizela šly po škole na kolečkové brusle. Hubená Gizela se rozhodla se rozjet a přeskočit schody. Když to viděla tlustá Dorota, hned se za Gizelou rozjela a pohybovala se větší velikostí rychlosti než Gizela. Obě jely ještě před schody rovnoměrně přímočaře, jejich kinetické energie byly stejně velké, přičemž Dorota je o 44% hmotnosti Gizely těžší, a bezprostředně před skokem Dorota Gizelu chytla, aby letěly společně o stejně velké počáteční rychlosti letu. Délka jejich letu je 2,2 m a výška schodiště odpovídá změně potenciální energie o 1471,5 J pro těleso o hmotnosti jeden metrák. Určete velikost rychlosti Doroty a Gizely bezprostředně před nárazem.

SV: $v_D \doteq 3{,}39\,\frac{m}{s}$; $v_G \doteq 4{,}07\,\frac{m}{s}$

4.a.2 – Rampy

Marián s Kazimírem a Otou vyrazili na kolečkových bruslích na rampy. Nejlehčí Ota řekl, že váží o 40 kg méně než devadesáti kilogramový Kazimír, a že Ota půjde na blízký kopec o stoupání 10° a oni dva půjdou na rampy (viz obrázek 3). Cílem hry bylo, aby se všichni rozjeli z ramp nebo kopce a po nárazu do sebe se jako jedno těleso pohybovali ve směru rychlosti Mariána. Rovinné rampy jsou umístěny ve stejné výšce a svírají mezi sebou úhel 45°. Kazimír se těsně před skokem pohyboval stejně velkou rychlostí jako Marián těsně po seskoku z rampy, tedy rychlostí o velikosti 16,2 km.h^{-1}. Kazimírovi se seskok nepovedl, neboť 10% energie se přeměnilo na deformaci jeho brzdy na brusli. Všechny ostatní odporové vlivy jsou zanedbatelné. Velikost změny potenciální energie u Mariána byla rovna jeho kinetické energii bezprostředně před seskokem. Za jak dlouho sjel Oto kopec, když vyrazil z klidu?



Obrázek 3

SV: 4,34 s

Řešení

1. KINEMATIKA

1.a – Vše s auty

1.a.1 – Předjíždění

v_F = 116 km.h^{-1}

v_A = 80 km.h^{-1}

t_1 = 1,4 s

l_F = 4 m

s_R = 5 m

l_A = ?

s_2 = ?

t_2 = ?

Uvažujme děj pro ekvivalentní soustavu, kdy autobus je v klidu a Forman ho předjíždí rychlostí velikosti (116 km.h^{-1} – 80 km.h^{-1} = 36 km.h^{-1} = 10 m.s^{-1}). Čas je 1,4 s, pak platí:

s_1 = v.t_1 = 10.1,4 m = 14 m.

Předjíždění začíná, když přední část Formana se dostane na úroveň zadní části autobusu, a končí, když zadní část Formana opouští autobus, proto:

$s_1 - l_F = l_A$

14 m – 4 m = 10 m

l_A = 10 m

Zpět do soustavy Forman – dálnice. Vůči dálnici ujede Forman (při 116 km.h^{-1} ≐ 32,2 m.s^{-1}) dráhu $s_2 = v_2.t_1$ = 32,2 . 1,4 m = 45,11 m. Pro zařazení po 5 metrech platí $t_2 = \frac{s_R}{v} = \frac{5\ m}{10\ m.s^{-1}}$ = 0,5 s.

Autobus měří 10 m.

Forman při předjíždění ujede 45,11 m.

Forman se zařadí před autobus za 0,5 s.

1.a.2 – Šílený taxikář

v_0 = 50 km.h^{-1}

a_1 = 2 m.s^{-2}

t_1 = 5 s

s_2 = ?

a_2 = ?

Zrychluje na dráze $s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}2.5^2$ m = 25 m.

Je tedy jasné, že ke světlům zbývá dalších 25 m, neboť z 50 m (vzdálenost před signály) ujel polovinu (s_2 = 50 m - 25 m).

Ovšem původní velikost rychlosti je kladná. Dle $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ platí, že $|a|$ bude větší při brzdění.

Kdyby začal brzdit na oranžovou, pak s_1 = 50 m a Δv = 50 km.h^{-1} ≐ 13,9 m.s^{-1}.

Do vzorce $s_1 = \frac{1}{2}at^2$ dosadíme $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Tedy $s_1 = \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{\Delta t}t^2 = \frac{1}{2}\Delta vt$

$t = \frac{2s_1}{\Delta v}$. Dosadíme do $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

$a_2 = \frac{\Delta v}{\frac{2s_1}{\Delta v}} = \frac{\Delta v^2}{2s_1} = \frac{13{,}9^2}{2.50}$ m.s^{-2} ≐ 1,93 m.s^{-2}.

Taxikář zrychluje na dráze 25 m.

Zrychlení při brzdění bude mít větší absolutní hodnotu než při zrychlování.

Velikost zrychlení při brzdění na oranžovou by byla 1,93 m.s^{-2}.

1.b – Křeček

1.b.1 – V kolečku

v = 1 km.h^{-1}

t = 30 min = 0,5 h

n = 1000

l = ?

$s = v.\ t$ = 1 . 0,5 km = 0,5 km.

$s = n\ .\ O$

$s = 1000\ .\ \pi\ .\ d$

$d = \frac{s}{n.\pi} = \frac{0{,}5}{1000\ .\pi}$ km = $\frac{50000}{1000\ .\pi}$ cm.

d = 16 cm → r = 8 cm.

Křeček měří 8 cm.

Kolečko, ve kterém křeček běží, se sice otáčí kolem své osy, ale jako objekt se vůči přepravce nepohybuje. Křeček se vůči ose kolečka také nepohybuje. Pakliže se ani osa kolečka nepohybuje, pak se ani křeček vůči přepravce nepohybuje.

1.b.2 – Honička

v_K = 3,6 km.h^{-1} = 1 m.s^{-1}

s_K = 15 m

a_{Z1} = 2 m.s^{-2}

a_{Z2} = 1 m.s^{-2}

v_{Z1} = 8 m.s^{-1}

s_{Z2} = 8 m

s_{Z3} = 96 m

v_{Z2} = ?

Δt = ?

Pro maximální rychlost zvěři platí:

$a_{Z2} = \frac{\Delta v_{Z12}}{\Delta t_{Z12}} \rightarrow \Delta v_{Z12} = a_{Z2}\ .\ \Delta t_{Z12}$

Dále platí:

$s_{Z2} = \frac{1}{2}a_{Z2}t_{Z12}^2 \rightarrow t_{Z12} = \sqrt{\frac{2s_{Z2}}{a_{Z2}}}$

$\Delta v_{Z12} = a_{Z2}.\sqrt{\frac{2s_{Z2}}{a_{Z2}}} = 1.\sqrt{\frac{2.8}{1}}\frac{m}{s} = 4\frac{m}{s}$

2. DYNAMIKA

2.a – Madonna

2.a.1 – *Music Inferno*

$v_{1,2,3}$ = 1,9 $\frac{m}{s}$

v_3 = 5 $\frac{m}{s}$

a_1 = 1 m.s^{-2}

a_2 = 1,9 m.s^{-2}

s_1 = 5 m

s_2 = 4 m

m_1 = 70 kg

m_2 =80 kg

m_3 = ?

$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$

$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}}$

$v_1 = a_1 . \sqrt{\frac{2s_1}{a_1}} = \sqrt{2a_1 s_1}$

$v_1 = \sqrt{2.1.5}\ \frac{m}{s}$

$v_1 \doteq 3{,}2\ \frac{m}{s}$

$v_2 = \sqrt{2a_2 s_2}\ \frac{m}{s}$

$v_2 = \sqrt{2.2.4}\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 4\ \frac{m}{s}$

zákon zachování hybnosti:

$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{1,2} = m_{1,2} . v_{1,2}$

$v_{1,2} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_{1,2}}$

$v_{1,2} = \frac{70.3{,}2 - 80.4}{150}\ \frac{m}{s}$

$v_{1,2} = -0{,}64\ \frac{m}{s}$

nyní zvolme tento směr jízdy jako kladný ($v_{1,2} = 0{,}64\ \frac{m}{s}$)

zákon zachování hybnosti:

$m_{1,2} v_{1,2} + m_3 v_3 = (m_{1,2} + m_3) v_{1,2,3} = m_{1,2} v_{1,2,3} + m_3 v_{1,2,3}$

$m_3 = \frac{m_{1,2} v_{1,2,3} - m_{1,2} v_{1,2}}{v_3 - v_{1,2,3}}$

$m_3 = \frac{150.1{,}9 - 150.0{,}64}{5 - 1{,}9}$ kg

$m_3 \doteq 61$ kg

Třetí tanečník váží 61 kg.

2.a.2 – *Drowned World Tour*

l = 10 m

x = ?

m_M = 45 kg

Nejblíže k sobě ji má, když stojí Madonna přesně naproti němu.

$x = l - r$

$F_O = m \,.\, a_D$

$F_O = m \,.\, \frac{v^2}{r}$

$F_O = m.\omega^2.r$

$F_O = m.(\frac{2\pi}{T})^2.r$

$r = \frac{F_O}{m(\frac{2\pi}{T})^2}$

$r = \frac{35,5}{45.(\frac{2.3,14}{10})^2}$ m

$r \doteq 2$ m

$x = l - r$

x = 10 m – 2 m

x = 8 m

Madonna je 8 metrů daleko od Boba, když jsou zrovna nejblíže k sobě.

2.b - Zatáčky

2.b.1 – Kruhový objezd

r = 9 m

f = 0,64

v = ?

$F_t \leq F_O$

$f.F_G \leq F_O$

$f.m.g \leq m.\frac{v^2}{r}$

$v \geq \sqrt{f.r.g}$

$v \geq \sqrt{0,64.9.9,81}$ m.s^{-1}

$v \geq 0,8.3.\sqrt{9,81}$ m.s^{-1}

$v \geq 11,28$ m.s^{-1}

$v \geq 40,6$ km.h^{-1}

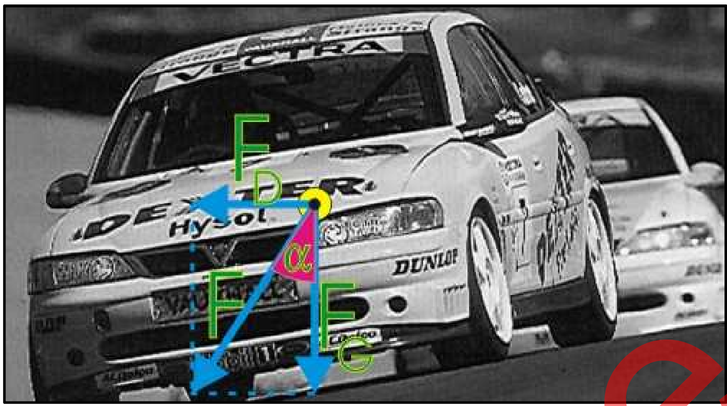
Automobil se utrhne a dostane smyk při rychlosti o velikosti 40,6 km.h^{-1}.

2.b.2 – Highspeedtest race

$F_G = 1,5.F_D$

α = ?

Úhel naklonění automobilu musí být shodný s úhlem naklonění silnice. Tento úhel α je na obrázku (*obrázek 4*) růžově vyznačen. Pro představu si stačí vybavit jízdu na kole. Jsme-li v zatáčce, působí na nás odstředivá síla. Kompenzujeme ji nakloněním na opačnou stranu. Proto občas ztrácíme rovnováhu, ale silnice nakloněná není. Je nejlepší, když se silnicí svíráme úhel 90°. Proto i auta musí být nakloněna v zatáčkách a přitom by měla stále být kolmo k silnici. Jedeme-li rovně, nepotřebujeme náklon silnice. Odstředivá složka je nulová, proto i úhel našeho naklonění je nulový jakožto úhel naklonění silnice. Čím větší na nás působí odstředivá síla, tím více se nakláníme, ale rádi bychom byli stále kolmo k zemi, proto jsou tyto rychlostní tratě v zatáčkách nakloněny. Tedy úhel α na obrázku je stejný s úhlem naklonění silnice. Dostředivá síla F_D a tíhová F_G (i jejich výslednice F) jsou zakresleny modře.



Obrázek 4

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_D}{F_G}$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_D}{1{,}5.F_D}$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{1{,}5}$

$\alpha \doteq 33{,}7°$

Zatáčky jsou nakloněny pod úhlem 33,7°.

2.c – Na pouti

2.c.1 – Velký Matěj

Při zanedbání tření:

$F_{\mathrm{LANO}} = F_{\mathrm{MATĚJ}} - F_{\mathrm{DĚTI}}$

$F_{\mathrm{LANO}} = F_{\mathrm{MATĚJ}} - (F_1 + F_2 + F_3)$

$F_{\mathrm{LANO}} = 500\ \mathrm{N} - 3.100\ \mathrm{N}$

$F_{\mathrm{LANO}} = 200\ \mathrm{N}$

Při nezanedbání tření:

$F_t = 3.f.m.g$

$F_t = 3.0{,}5.40.9{,}81\ \mathrm{N}$

$F_t = 588{,}6\ \mathrm{N}$

Matěj tuto třecí sílu u dětí navýšenou o samotnou sílu dětí nepřekoná. Děti zase nepřekonají sílu Matěje. I kdyby překonaly sílu Matěje, nepřekonají třecí sílu u Matěje.

$F_{\mathrm{LANO}} = 0\ \mathrm{N}$

2.c.2 – Krasobruslař

$r = 10\ \mathrm{m}$

$l = 1{,}4\ \mathrm{m}$

$g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$

$v = ?$

t = ?

x = ?

$F_G = F_O$

$m.g = m.\frac{v^2}{r}$

$v = \sqrt{r.g}$

$v = \sqrt{10.10}$ m.s^{-1}

v = 10 m.s^{-1}

$v = \frac{2.\pi.r}{T}$

$T = \frac{2.\pi.r}{v}$

Perioda je doba, jež nám říká, jak dlouho trvá jeden oběh. Jestliže krasobruslař svým pohybem neopisuje celou zatáčku, ale jen $\frac{\pi}{3}$ zatáčky, tedy její šestinu, pak čas vypočteme tak, že celý zlomek vydělíme šesti.

$t = \frac{2.\pi.r}{v.6}$

$t = \frac{2.3{,}14.10}{10.6}$ s

$t \doteq 1$ s

$F_G = F_O$

$\alpha = 45°$

$\cos\alpha = \frac{1{,}4}{x}$

$x = \frac{1{,}4}{\cos 45}$

$x = \frac{1{,}4}{0{,}7}$ m

x = 2 m

Krasobruslař projíždí zatáčkou rychlostí o velikosti 10 m.s^{-1}.

Daný úsek zatáčky projede za 1 sekundu.

Krasobruslař je 2 metry vysoký.

2.c.3 – Válečky

Nemá. Existuje totiž ještě Coriolisova síla, která, byť na tuto krátkou vzdálenost, nepatrně let kulky ovlivní. Je totiž dána rotací Země. Ivana by měla pravdu, kdyby byla na rovníku, což je dosti nepravděpodobné.

4. GRAVITAČNÍ POLE

4.a – Nezbední studenti

4.a.1 - Tlustá Dorota a hubená Gizela

$E_{kD} = E_{kG}$

$m_D = m_G + 0{,}44m_G = 1{,}44m_G$

$d = 2{,}2$ m

$m_T = 1$ metrák = 100 kg

$\Delta E_{pT} = 1471{,}5$ J

$v_D = ?$

$v_G = ?$

Informace o kinetických energiích nám sděluje:

$\frac{1}{2}m_D v_D^2 = \frac{1}{2}m_G v_G^2$

$m_D v_D^2 = m_G v_G^2$

$1{,}44 m_G v_D^2 = m_G v_G^2$

$1{,}44 v_D^2 = v_G^2$

$1{,}2^2 v_D^2 = v_G^2$

Následuje neekvivalentní úprava rovnice, kterou můžeme provést i bez zkoušky, neboť u obou neznámých očekáváme právě jeden kladný kořen. Můžeme tedy danou rovnici odmocnit.

$1{,}2 v_D = v_G$

Z hlediska hybnosti můžeme psát:

$m_G v_G + m_D v_D = v(m_G + m_D)$

Dosadíme informaci o poměru hmotností.

$m_G v_G + 1{,}44 m_G v_D = v(m_G + 1{,}44 m_G)$

$m_G(v_G + 1{,}44 v_D) = v(m_G + 1{,}44 m_G)$

$m_G(v_G + 1{,}44 v_D) = v.2{,}44 m_G$

$v_G + 1{,}44 v_D = 2{,}44v$

Máme již druhý vztah mezi jednotlivými velikostmi rychlostí. Ten první dosaďme do druhého.

$v_G + 1{,}44 v_D = 2{,}44v$

$1{,}2 v_D + 1{,}44 v_D = 2{,}44v$

$2{,}64 v_D = 2{,}44v$

$1{,}18 v_D = v$

Z hlediska vrhu lze psát:

$h = \frac{1}{2} g t_d^2$

$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$x = v_0 t_d$

$d = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Podle vztahu $d = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$ můžeme vypočítat velikost počáteční rychlosti vrhu, tedy velikost rychlosti Gizely a Dorota jakožto jednoho objektu (hmotného bodu v dané soustavě).

O výšce vrhu h vypovídá informace o změně potenciální energie pro jiné těleso. (1 metrák = 100 kg).

$\Delta E_{pT} = m_T g h$

$h = \frac{\Delta E_p}{mg}$

$h = \frac{1471{,}5}{100.9{,}81}$ m

$h = 1{,}5$ m

$d = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$

$v = \frac{2{,}2}{\sqrt{\frac{2.1{,}5}{9{,}81}}}\frac{m}{s}$

$v \doteq 4\,\frac{m}{s}$

$1{,}18 v_D = v$

$v_D = \frac{v}{1{,}18}$

$v_D = \frac{4}{1{,}18}\frac{m}{s}$

$v_D \doteq 3{,}39\,\frac{m}{s}$

$1{,}2 v_D = v_G$

$v_G = 1{,}2.3{,}39\,\frac{m}{s}$

$v_G \doteq 4{,}07\,\frac{m}{s}$

Lze i rychle zkontrolovat, že velikost rychlosti *v* je prostřední (menší než jedna a větší než druhá) z velikostí všech tří rychlostí, což je logické vzhledem k tomu, že obě studentky se pohybovaly ve stejném směru.

Velikost rychlosti Doroty těsně před nárazem byla 3,39 $m.s^{-1}$.

Velikost rychlosti Gizely těsně před nárazem byla 4,07 $m.s^{-1}$.

4.a.2 – Rampy

$m_K = 90$ kg

$m_O = 90$ kg – 40 kg = 50 kg

$v_{1K} = v_{2M} = 16{,}2\ km.h^{-1} = 4{,}5\ m.s^{-1}$

$\alpha = 10°$

$t_O = ?$

Platí zákon zachování hybnosti, ale zde je třeba si uvědomit, že příklad nelze řešit skalárně kvůli různým směrům rychlostí chlapců, tedy i jejich hybností. Když rozložíme vektory do dvou směrů, „první" je směr rychlosti Mariána a „druhý" na něj kolmý (směr rychlosti Oty), zajímá nás pouze ten „druhý". Ota musí svou hybností co do velikosti vykompenzovat „druhou" složku vektoru hybnosti Kazimíra.

Z hlediska zákona zachování mechanické energie u Mariána platí:

$E_{k1M} + \Delta E_{pM} = E_{k2M}$ $(E_{k1M} = \Delta E_{pM})$

$2\Delta E_{pM} = E_{k2M}$

$2 m_M g h = \frac{1}{2} m_M v_{2M}^2$

$h = \frac{1}{4}\frac{v_{2M}^2}{g}$

$h = \frac{1}{4}\frac{4{,}5^2}{9{,}81}$ m $\doteq$ 0,52 m

Pro Kazimíra lze psát rovnici zákona zachování mechanické energie následovně:

$E_{k1K} + \Delta E_{pK} = 0{,}9E_{k2K}$

$\frac{1}{2}m_K v_{1K}^2 + m_K gh = 0{,}9\frac{1}{2}m_K v_{2K}^2$

$\frac{1}{2}v_{1K}^2 + gh = 0{,}9\frac{1}{2}v_{2K}^2$

$v_{2K} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}v_{1K}^2 + gh}{\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}v_{1K}^2 + gh}{\frac{9}{20}}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}v_{1K}^2 + 5gh}$

$v_{2K} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}\cdot 4{,}5^2 + 5.9{,}81.0{,}52}$ m.s^{-1} = 5,82 m.s^{-1}

Nyní lze aplikovat zákon zachování hybnosti. Nejdříve je nutné zjistit velikost „druhé“ složky hybnosti Kazimíra (tedy její velikost pouze pro směr shodný s hybností Oty).

$p_{KY} = \sin 45°.m_K v_{2K}$

$p_{KY} = \frac{\sqrt{2}}{2}90.5{,}82$ kg.m.s^{-1}

$p_{KY} = 370{,}4$ kg.m.s^{-1}

$p_{KY} = p_O$

$p_O = m_O v_{2O}$

$v_{2O} = \frac{p_O}{m_O}$

Kopec lze považovat za nakloněnou rovinu, a proto platí:

$\sin\alpha = \frac{F_P}{F_G} = \frac{m.a}{m.g} = \frac{a}{g} = \frac{v}{gt}$

Z posledních dvou odvození plyne:

$t = \frac{v}{\sin\alpha.g} = \frac{p_O}{m_O \sin 10°.g}$

$t = \frac{370{,}4}{50.0{,}174.9{,}81}$ s

$t = 4{,}34$ s

Oto sjel kopec z klidu za 4,34 s.

4.b – Na fotbale

4.b.1 – Míč ve studni

v = ?

Jde o vrh svislý, tedy trajektorie pohybu míče (modře vyznačena) musí ležet na přímce. Na obrázku 5 je jen pro zjednodušení situace pohyb dolů zobrazen na rovnoběžné přímce. Oranžové šipky napovídají směr pohybu míče. Úsek výšky vyznačení „X“ je podstatný. Víme o něm, že ve směru pohybu pouze nahoru tvoří čtvrtinu trajektorie míče. Tento úsek je stejný pro trajektorii míče ve směru dolů. To znamená, že ve směru nahoru míč uletí 4X a ve směru dolů 1X. Celková trajektorie je 5X. Víme, že $\frac{3}{5}$.5X = 9 m.

3X = 9 m

X = 3 m

Lze třeba ze zákona zachování mechanické energie vyvodit:

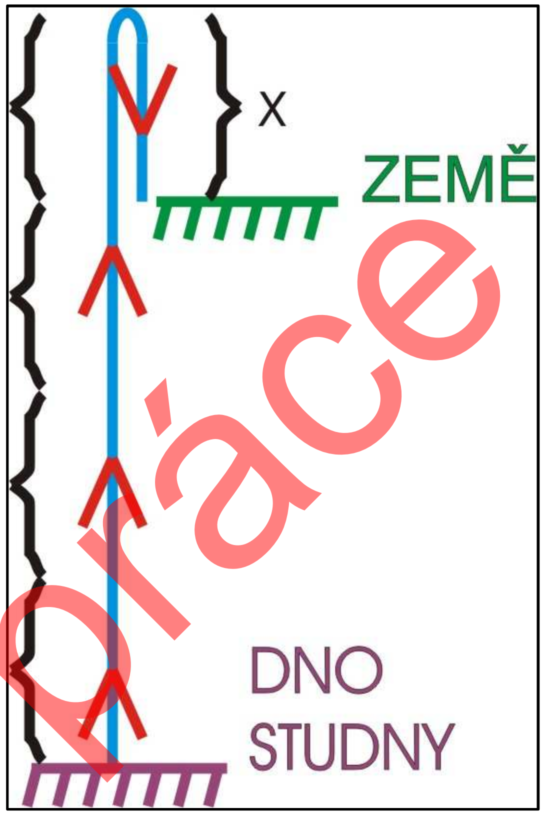
$mgh = 0{,}5mv^2$

$v = \sqrt{2gh}$

$v = \sqrt{2.9{,}81.3}\ \frac{m}{s}$

$v \doteq 7{,}67\ \frac{m}{s}$

Velikost rychlosti míče při dopadu na fotbalistovu nohu je $7{,}67\ \frac{m}{s}$.



Obrázek 5

Závěr

Pokládám za zdařilé návrhy a motivy příkladů. Očekávám, že se sbírka stane inspirací autorům jiných sbírek nebo prostě jen zdrojem příkladů pro učitele, kteří chtějí dát svým studentům nějaké zábavnější příklady do písemných prací. Věřím, že sbírka, jak se říká, nezůstane ležet pod vrstvou prachu a rozšíří se v místech, kde o ni bude zájem. Tím mám na mysli především střední školy. Eventuelně základní nebo i vysoké. Nikdo nebrání tomu, aby si kdokoli ze sbírky vybral příklad, který by si pro své potřeby zjednodušil nebo naopak ztížil, prostě změnil.

Slabší částí této sbírky je její matematická úroveň. Nejde o správnost počítání, ale o předpokládanou matematickou znalost čtenářů, pro které je především sbírka určena. Nemohu očekávat od studenta, jenž studuje prvním rokem střední školou, že bude v průběhu onoho školního roku ovládat například kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel. Na druhou stranu z hlediska logiky se meze nekladou. Tu by měl mít člověk bez ohledu na stupeň, v němž se na škole nachází. S tím souvisí i jistá představivost člověka, kterou jsem využíval během zadání úloh. Snažil jsem se je popsat tak, aby nebylo příliš náročné si situaci představit. Proto se některá zadání zdají být dlouhá. V jiných případech je úloha doplněna jednoduchými, názornými obrázky.

Lze samozřejmě předpokládat, že vzniknou i negativní recenze na tuto sbírku, a tak se sbírka stane neúspěšnou. Nebude-li to neúspěch zásadní, který by poukazoval na důležité nedostatky, pravděpodobně ho budu brát jako věc názoru, který nikdy nebývá pouze jednostranný.